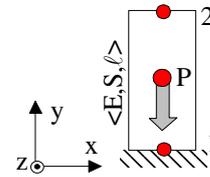


ELEMENTS FINIS : APPLICATIONS ELEMENTAIRES ET DE SYNTHESE

Exemple n° 1: barre soumise à son poids propre

⇒ Données :

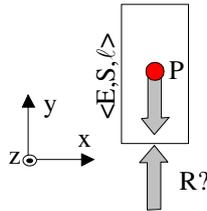
- Soit un **élément de barre** ayant pour caractéristiques E (N/m^2), S (m^2), ℓ (m), associé à des conditions aux limites nodales particulières :
- chargement réparti: poids propre de résultante P (< 0 , exprimée en N)
- déplacements nodaux: $v_1 = 0$ et déplacement v_2 inconnu



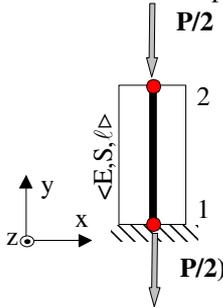
⇒ Problème:

Etudier l'équilibre de l'élément de barre. Rechercher les contributions nodales du poids P . Déterminer le déplacement v_2 engendré par l'action mécanique P ainsi que les autres inconnues du problème. Dessiner la configuration d'équilibre de l'élément fini de barre.

.⇒ Résolution : équilibre de l'élément de barre isolé



Structure correctement appuyée et contributions nodales du poids P



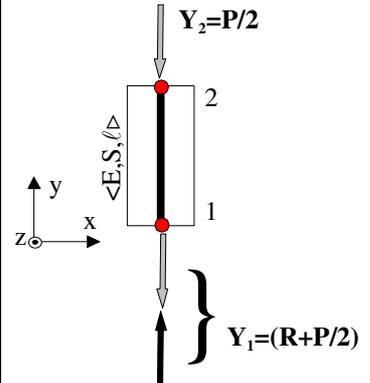
La résolution directe du système linéaire $\{F_{\text{el}}\} = [k]_{\text{élément}} \cdot \{d_{\text{el}}\}$ donne les expressions des inconnues algébriques:

$$\begin{cases} Y_1 = \left(R + \frac{P}{2} \right) = ? \\ Y_2 = \frac{P}{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \end{cases}$$

$$Y_2 = \frac{ES}{\ell} u_2$$

$$Y_1 = \left(R + \frac{P}{2} \right) = -\frac{ES}{\ell} u_2 \text{ et } Y_1 = -Y_2 = \frac{P}{2}$$

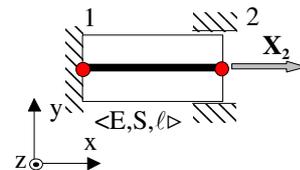
Configuration d'équilibre de l'élément fini de barre.



Exemple n° 2: élément de barre

⇒ Données :

- Soit un **élément de barre** ayant pour caractéristiques E (N/m^2), S (m^2), ℓ (m), associé à des conditions aux limites nodales particulières :
- chargement nodal au nœud 2: X_2 (force donnée > 0 , exprimée en N)
- déplacements nodaux: $u_1 = 0$ et déplacement u_2 inconnu.



⇒ Problème:

Déterminer le déplacement u_2 engendré par l'action mécanique X_2 ainsi que les autres inconnues du problème. Dessiner la configuration d'équilibre avec l'allure de la déformée de la barre réelle et de son l'élément fini associé.

Quelle est la valeur de la force X_2 (en N) qu'il faut appliquer pour engendrer un allongement u_2 de 1 m? Conclure sur la valeur de k_{22} .

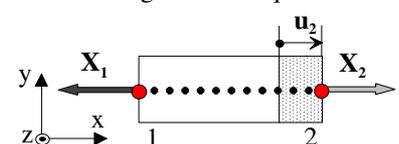
Par les méthodes analytiques classiques (lois de comportement et méthode énergétique: théorème de Castigliano) retrouver la valeur de u_2 .

.⇒ Résolution :

La résolution directe du système linéaire $\{F_{\text{el}}\} = [k]_{\text{élément}} \cdot \{d_{\text{el}}\}$ donne les expressions des inconnues algébriques:

$$\begin{cases} X_1 = ? \\ X_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \end{cases}$$

soit: $X_1 = -\frac{ES}{\ell} u_2$ et $u_2 = \frac{\ell}{ES} X_2$
 d'où la configuration d'équilibre:



Il faut appliquer au nœud 2 une force $X_2 = \frac{ES}{\ell} N$, pour obtenir un allongement de valeur unité, soit $u_2 = 1m$.

⇒ Conclusion : signification physique du terme diagonal $k_{22} = \frac{ES}{\ell}$: il correspond à la force exprimée en N, qu'il faut appliquer au nœud 2 pour avoir un allongement de 1 m pour ces conditions aux limites particulières.

Remarque: les autres termes k_{ij} avec ($i \neq j$), termes de **couplage**, permettent de prendre en considération la combinaison des effets de toutes les sollicitations.

► Résolution par les méthodes analytiques classiques :

▪ Loi de comportement pour de la traction simple:

à partir des expressions $\sigma = E \times \varepsilon_x$ et $\sigma = \frac{\mathcal{N}}{S}$ on obtient la relation $\frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{\mathcal{N}}{ES}$, soit $u_{(x)} = \frac{\mathcal{N}}{ES} x + C^{te}$

Expression de l'effort normal \mathcal{N} pour une section courante d'abscisse x: $\mathcal{N} = C^{te} = X_2$

• Conditions aux limites

- pour $x = 0$ $u_{(0)} = u_1 = 0$ soit $C^{te} = 0$

- pour $x = \ell$ $u_{(\ell)} = u_2 = \frac{\ell}{ES} X_2$

▪ Méthode énergétique théorème de Castigliano: $\frac{\partial E_{pot.}}{\partial F_i} = q_i$

$E_{pot.}$: énergie potentielle de déformation (exprimée en fonction des éléments de réduction du tenseur de cohésion) emmagasinée dans une poutre en équilibre au cours de son chargement par les actions mécaniques F_i

F_i : actions mécaniques appliquées sur la poutre (X, Y, Z, L, M, N)

q_i : déplacements associés à ces sollicitations ($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)

Expression de l'énergie potentielle de déformation pour une barre sollicitée en traction simple et de longueur ℓ :

$$E_{pot.} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{\mathcal{N}^2}{ES} dx$$

Expression de l'effort normal \mathcal{N} pour une section courante d'abscisse x: $\mathcal{N} = X_2 = C^{te}$

soit en remplaçant dans l'expression de l'énergie potentielle: $E_{pot.} = \frac{1}{2} \frac{\ell X_2^2}{ES}$

Application du théorème de Castigliano: pour l'effort X_2 , en dérivant par rapport à X_2 le déplacement correspondant au nœud

2 (ici l'allongement de la barre)s'écrit : $\frac{\partial E_{pot.}}{\partial X_2} = u_2$ soit: $u_2 = \frac{\ell}{ES} X_2$

Exemple n° 3: élément de poutre:

⇒ Données :

Soit un **élément de poutre** de caractéristiques E (N/m²), I (m⁴), ℓ (m), associé à des conditions aux limites nodales particulières :

- chargement nodal au nœud 2: Y_2 (force donnée >0, exprimée en N)

- déplacements nodaux: $v_1 = \theta_{z1} = \theta_{z2} = 0$ et déplacement v_2 inconnu.

⇒ Problème:

Déterminer le déplacement v_2 engendré par l'action mécanique Y_2 ainsi que les autres inconnues du problème. Dessiner la configuration d'équilibre avec l'allure de la déformée de la poutre réelle et de son l'élément fini associé. Conclure sur les signes des chargements nodaux.

Quelle est la valeur de la force Y_2 (en N) qu'il faut appliquer pour engendrer une flèche v_2 de 1 m? Conclure sur la valeur de k_{33} .

⇒ Résolution :

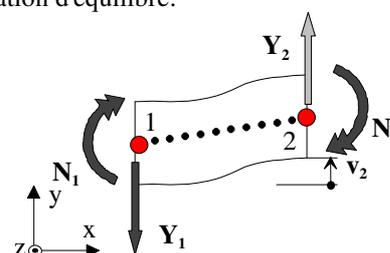
La résolution directe de ce système donne les expressions des inconnues du système linéaire $\{F_{\ell i}\} = [k] \cdot \{d_{\ell i}\}$:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 = ? \\ N_1 = ? \\ Y_2 = ? \\ N_2 = ? \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_{z2} = 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution directe de ce système donne les expressions des actions mécaniques garantissant l'équilibre de l'élément :

$$v_2 = \frac{\ell^3}{12EI} \times Y_2; Y_1 = -\frac{12EI}{\ell^3} \times v_2; N_1 = -\frac{6EI}{\ell^2} \times v_2; N_2 = -\frac{6EI}{\ell^2} \times v_2$$

d'où la configuration d'équilibre:



Signes des chargements nodaux: Y_1 et Y_2 signes opposés et N_1 et N_2 signes identiques.

Il faut appliquer au nœud 2 une force $Y_2 = \frac{12EI}{\ell^3} \times v_2$ N pour obtenir une flèche de valeur unité, soit $v_2 = 1m$.

⇒ Conclusion : signification physique du terme diagonal $k_{33} = \frac{12EI}{\ell^3}$: il correspond à la force exprimée en N, qu'il faut appliquer au nœud 2 pour avoir une flèche de 1 m pour ces conditions aux limites particulières.

► Résolution par les méthodes analytiques classiques :

▪ Loi de comportement pour de la flexion simple: $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{Mf_z}{EI}$

Expression du moment de flexion Mf_z pour une section courante d'abscisse x: $Mf_z = Y_2(\ell - x) + N_2$

Soit en remplaçant: $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [Y_2(\ell - x) + N_2]$

En intégrant une première fois, on obtient l'expression de la rotation de section pour une section courante d'abscisse x:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta_z(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + N_2 x + C^{te} \right]$$

• Conditions aux limites:

pour $x = 0$: $\theta_z(0) = \theta_{z1} = 0$ d'où $C^{te} = 0$

pour $x = \ell$: $\theta_z(\ell) = \theta_{z2} = 0$

$$\text{d'où } \theta_{z2} = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} \right) + N_2 \ell \right] = 0$$

$$\text{soit } N_2 = -Y_2 \frac{\ell}{2}$$

En intégrant une deuxième fois, on obtient l'expression de la flèche pour une section courante d'abscisse x:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - Y_2 \frac{\ell x^2}{4} + C^{te} \right]$$

• Conditions aux limites:

pour $x = 0$: $v(0) = v_1 = 0$ d'où $C^{te} = 0$

$$\text{pour } x = \ell: v(\ell) = v_2 = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{6} \right) - Y_2 \frac{\ell^3}{4} \right]$$

La flèche au nœud 2, a donc pour valeur: $v_2 = \frac{\ell^3}{12EI} Y_2$

▪ Méthode énergétique théorème de Castigliano: $\frac{\partial E_{pot.}}{\partial F_i} = q_i$

$E_{pot.}$: énergie potentielle de déformation (exprimée en fonction des éléments de réduction du torseur de cohésion) emmagasinée dans une poutre en équilibre au cours de son chargement par les actions mécaniques F_i

F_i : actions mécaniques appliquées sur la poutre (X, Y, Z, L, M, N)

q_i : déplacements associés à ces sollicitations (u, v, w, θ_x , θ_y , θ_z)

Expression de l'énergie potentielle de déformation dans une poutre sollicitée en flexion simple et de longueur ℓ :

$$E_{pot.} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{Mf_z^2}{EI} dx$$

Expression du moment de flexion Mf_z pour une section courante d'abscisse x: $Mf_z = Y_2(\ell - x) + N_2$

Soit en remplaçant dans l'expression de l'énergie potentielle précédente:

$$E_{pot.} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{[Y_2(\ell - x) + N_2]^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(Y_2^2 \frac{\ell^3}{3} + N_2^2 \ell + Y_2 N_2 \ell^2 \right)$$

Application du théorème de Castigliano:

□ pour le moment N_2 : $\frac{\partial E_{pot.}}{\partial N_2} = \theta_{z2} = 0$

soit après dérivation de l'expression de l'énergie potentielle par rapport à N_2 : $N_2 = -Y_2 \frac{\ell}{2}$

□ pour la force Y_2 : $\frac{\partial E_{pot.}}{\partial Y_2} = v_2$

après avoir remplacé N_2 par sa valeur dans l'énergie potentielle, soit $E_{pot.} = \frac{1}{2EI} \left(Y_2^2 \frac{\ell^3}{3} + Y_2^2 \frac{\ell^3}{4} - Y_2^2 \frac{\ell^3}{2} \right)$, on obtient par

dérivation de cette expression par rapport à Y_2 : $v_2 = \frac{\ell^3}{12EI} Y_2$

Exemple n° 4: élément de poutre:

⇒ Données :

Soit un **élément de poutre** de caractéristiques E (N/m^2), I (m^4), ℓ (m), associé à des conditions aux limites nodales particulières :

- chargement nodal au nœud 2: N_2 (moment donnée >0 , exprimé en Nm)

- déplacements nodaux: $v_1 = \theta_{z1} = v_2 = 0$ et déplacement angulaire θ_{z2} inconnu

⇒ Problème:

Déterminer le déplacement θ_{z2} engendré par l'action mécanique N_2 ainsi que les autres inconnues du problème. Dessiner la configuration d'équilibre avec l'allure de la déformée de la poutre réelle et de son l'élément fini associé. Conclure sur les sens des chargements nodaux.

Quelle est la valeur du moment N_2 (en Nm) qu'il faut appliquer, pour engendrer une rotation de section θ_2 de $1rd$? Conclure sur la valeur de k_{44} .

⇒ Résolution :

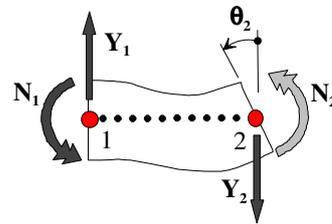
La résolution directe de ce système donne les expressions des inconnues du système linéaire $\{F_{\ell i}\} = [k] \cdot \{d_{\ell i}\}$:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 = ? \\ N_1 = ? \\ Y_2 = ? \\ N_2 = ? \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \end{Bmatrix}$$

soit:

$$\theta_{z2} = \frac{\ell}{4EI} \times N_2; Y_1 = \frac{6EI}{\ell^2} \times \theta_{z2}; N_1 = \frac{2EI}{\ell} \times \theta_{z2}; Y_2 = -\frac{6EI}{\ell^2} \times \theta_{z2};$$

D'où la configuration d'équilibre:



Signes des chargements nodaux: Y_1 et Y_2 signes opposés et N_1 et N_2 signes identiques.

Il faut appliquer au nœud 2 un moment $N_2 = \frac{4EI}{\ell} \times \theta_{z2}$ Nm , pour obtenir une rotation de section d'une valeur unité $\theta_{z2}=1m$.

⇒ Conclusion : signification physique du terme diagonal $k_{44} = \frac{4EI}{\ell}$: il correspond au moment N_2 exprimé en Nm , qu'il faut appliquer au nœud 2 pour engendrer une rotation de section θ_{z2} de $1rd$ pour ces conditions aux limites particulières.

► Résolution par les méthodes analytiques classiques :

▪ Loi de comportement pour de la flexion simple : $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{Mf_z}{EI}$

Expression du moment de flexion Mf_z pour une section courante d'abscisse x : $Mf_z = Y_2(\ell - x) + N_2$

Soit en remplaçant: $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [Y_2(\ell - x) + N_2]$

En intégrant une première fois, on obtient l'expression de la rotation de section pour une section courante d'abscisse x :

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta_z(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + N_2 x + C^{te} \right]$$

• Conditions aux limites:

$$\text{pour } x = 0: \theta_z(0) = \theta_{z1} = 0 \text{ d'où } C^{te} = 0 \qquad \text{pour } x = \ell: \theta_z(\ell) = \theta_{z2} = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} \right) + N_2 \ell \right]$$

En intégrant une deuxième fois, on obtient l'expression de la flèche pour une section courante d'abscisse x :

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + N_2 \frac{x^2}{2} + C^{te} \right]$$

• Conditions aux limites:

$$\text{pour } x = 0: v(0) = v_1 = 0 \text{ d'où } C^{te} = 0 \qquad \text{pour } x = \ell: 0 = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{6} \right) + N_2 \frac{\ell^2}{2} \right]$$

au nœud 2, Y_2 a donc pour valeur: $Y_2 = -\frac{3}{2\ell} N_2$

en portant cette valeur dans l'expression de θ_{z2} , soit $\theta_{z2} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{2\ell} \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} \right) N_2 + N_2 \ell \right]$

on obtient la valeur de la rotation de section, soit: $\theta_{z2} = \frac{\ell}{4EI} \times N_2$

▪ *Méthode énergétique théorème de Castigliano:* $\frac{\partial E_{\text{pot.}}}{\partial F_i} = q_i$

$E_{\text{pot.}}$: énergie potentielle de déformation (exprimée en fonction des éléments de réduction du torseur de cohésion) emmagasinée dans une poutre en équilibre au cours de son chargement par les actions mécaniques F_i

F_i : actions mécaniques appliquées sur la poutre (X, Y, Z, L, M, N)

q_i : déplacements associés à ces sollicitations (u, v, w, θ_x , θ_y , θ_z)

Expression de l'énergie potentielle de déformation dans une poutre sollicitée en flexion simple et de longueur ℓ :

$$E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{\mathcal{M}f_z^2}{EI} dx$$

Expression du moment de flexion $\mathcal{M}f_z$ pour une section courante d'abscisse x: $\mathcal{M}f_z = Y_2(\ell - x) + N_2$

Soit en remplaçant dans l'expression de l'énergie potentielle précédente:

$$E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{[Y_2(\ell - x) + N_2]^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(Y_2^2 \frac{\ell^3}{3} + N_2^2 \ell + Y_2 N_2 \ell^2 \right)$$

Application du théorème de Castigliano:

□ pour la force Y_2 : $\frac{\partial E_{\text{pot.}}}{\partial Y_2} = v_2 = 0$, après dérivation de l'expression de l'énergie potentielle par rapport à Y_2 : $Y_2 = -\frac{3}{2\ell} N_2$

□ pour le moment N_2 : $\frac{\partial E_{\text{pot.}}}{\partial N_2} = \theta_2$

après avoir remplacer Y_2 par sa valeur dans l'énergie potentielle, soit $E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2EI} \left(N_2^2 \frac{3\ell^2}{4} + N_2^2 \ell^2 - N_2^2 \frac{3\ell^2}{2} \right)$, on obtient

par dérivation de cette expression par rapport à N_2 , la valeur de la rotation de section, soit: $\theta_{z2} = \frac{\ell}{4EI} \times N_2$

Exemple n° 5: élément de poutre:

⇒ Données :

Soit un **élément de poutre** de caractéristiques E (N/m²), I (m⁴), ℓ (m), associé à des conditions aux limites nodales particulières :

- chargement nodal au nœud 2: Y_2 (force donnée >0, exprimée en N)

- déplacements nodaux connus: $v_1 = \theta_{z1} = 0$ et déplacements nodaux inconnus v_2 et θ_{z2} .

⇒ Problème:

Déterminer les déplacement v_2 et θ_{z2} engendrés par l'action mécanique Y_2 ainsi que les autres inconnues du problème. Dessiner la configuration d'équilibre avec l'allure de la déformée de la poutre réelle et de son l'élément fini associé. Par les méthodes analytiques classiques (lois de comportement et méthode énergétique: théorème de Castigliano) retrouver la valeur de v_2 et θ_{z2} .

Dans ce but on rappelle: $\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{\mathcal{M}f_z}{EI}$ et $E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{\mathcal{M}f_z^2}{EI} dx$.

⇒ Résolution :

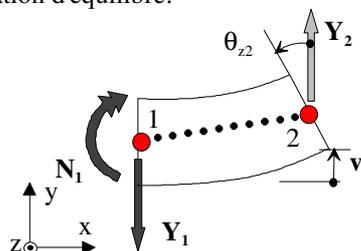
La résolution directe de ce système donne les expressions des inconnues du système linéaire $\{F_{\text{el}}\} = [k]_{\text{élément}} \cdot \{d_{\text{el}}\}$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 = ? \\ N_1 = ? \\ Y_2 \\ N_2 = ? \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 ? \\ \theta_{z2} ? \end{Bmatrix}$$

La résolution directe de ce système donne les expressions des actions mécaniques garantissant l'équilibre de l'élément :

$$v_2 = \frac{\ell^3}{3EI} Y_2 ; \theta_{z2} = \frac{\ell^2}{2EI} Y_2 ; Y_1 = -Y_2 ; N_1 = -\ell Y_2 ;$$

d'où la configuration d'équilibre:



$$\text{d'où: } X_2 = \frac{ES}{\ell}(-u_1 + u_2)$$

$$\text{l'équilibre de la barre entraîne: } X_1 + X_2 = 0 \text{ soit } X_1 = \frac{ES}{\ell}(u_1 - u_2)$$

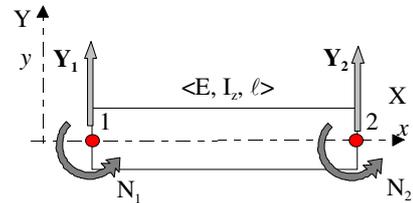
$$\text{les actions mécaniques en fonction des déplacements s'écrivent donc: } \begin{cases} X_1 = \frac{ES}{\ell}(u_1 - u_2) \\ X_2 = \frac{ES}{\ell}(-u_1 + u_2) \end{cases}$$

$$\text{sous la forme de l'écriture matricielle } \{F\} = [k] \cdot \{d\}: \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{qui permet d'écrire de matrice de raideur de l'élément de barre: } [k] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix}$$

Exemple n° 7: élément de poutre et loi comportement

⇒ Objectif: obtention de la matrice de raideur de l'élément de poutre en flexion simple à appliquer le principe de superposition pour une série de sollicitations appliquées à 4 poutres avec des conditions aux limites différentes.



⇒ Résolution

$$\text{Loi de comportement pour de la flexion simple: } \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{Mf_z}{EI}$$

$$\text{Expression du moment de flexion } Mf_z \text{ pour une section courante d'abscisse } x: Mf_z = Y_2(\ell - x) + N_2 \text{ ou } Mf_z = Y_1x - N_1$$

$$\text{Soit en remplaçant: } \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} Y_2(\ell - x) + N_2 \text{ ou } \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} Y_1x - N_1$$

En intégrant une première fois, on obtient l'expression de la rotation de section pour une section courante d'abscisse x:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta_z(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + N_2 x + C_1 \right] \text{ ou } \frac{dv(x)}{dx} = \theta_z(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_1 \frac{x^2}{2} - N_1 x + C_1' \right]$$

En intégrant une deuxième fois, on obtient l'expression de la flèche pour une section courante d'abscisse x:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + N_2 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right] \text{ ou } v(x) = \frac{1}{EI} \left[Y_1 \frac{x^3}{6} - N_1 \frac{x^2}{2} + C_1' x + C_2' \right]$$

• Conditions aux limites pour les rotations de section:

$$\text{pour } x = \ell: \theta(\ell) = \theta_2 = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^2}{2} + N_2 \ell + C_1 \right)$$

$$\text{pour } x = 0: \theta(0) = \theta_1 = \frac{C_1}{EI}$$

$$\text{soit: } \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^2}{2} + N_2 \ell \right)$$

• Conditions aux limites pour les flèches:

$$\text{pour } x = \ell: v_2 = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^3}{3} + N_2 \frac{\ell}{2} + C_1 \ell + C_2 \right)$$

$$\text{pour } x = 0: v(0) = v_1 = \frac{C_2}{EI}$$

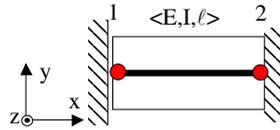
$$\text{soit: } v_2 - v_1 - \theta_{z1} \ell = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^3}{3} + N_2 \frac{\ell}{2} \right)$$

⇒ Conclusion:

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^2}{2} + N_2 \ell \right) \text{ et } v_2 - v_1 - \theta_{z1} \ell = \frac{1}{EI} \left(Y_2 \frac{\ell^3}{3} + N_2 \frac{\ell}{2} \right)$$

La sollicitation globale de cette poutre étant complexe, il est nécessaire d'isoler chaque sollicitation et de rechercher le comportement de la poutre pour chacune d'elle, soit 4 cas. Appliquons ces expressions générales aux 4 cas particuliers suivants:

○ Cas A



En utilisant les deux expressions générales précédentes:

- Conditions aux limites pour les rotations de sections

pour $x = 0$: $\theta_{zA}(0) = \theta_{zA1} = 0$

pour $x = l$: $\theta_{zA}(l) = \theta_{zA2} = 0$

soit $N_{A2} = -\frac{\ell}{2} Y_{A2}$

- Conditions aux limites pour les flèches:

pour $x = l$: $v_A(l) = v_{A2} = 0$

pour $x = 0$: $v_A(0) = v_{A1}$

$$v_{A1} = \frac{1}{EI} \left(-Y_{A2} \frac{\ell^3}{3} - N_{A2} \frac{\ell^2}{2} \right)$$

en fonction des déplacements: $Y_{A2} = -\frac{12EI}{\ell^3} v_{A1}$ et $N_{A2} = \frac{6EI}{\ell^2} v_{A1}$

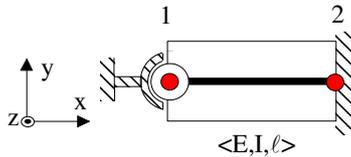
l'équilibre de la poutre entraîne:

$$Y_{A1} + Y_{A2} = 0$$

$$N_{A1} + N_{A2} + Y_{A2} \ell = 0$$

soit: $Y_{A1} = \frac{12EI}{\ell^3} v_{A1}$ et $N_{A1} = \frac{6EI}{\ell^2} v_{A1}$

○ Cas B:



En utilisant les deux expressions générales précédentes:

- Conditions aux limites pour les rotations de sections

pour $x = 0$: $\theta_{zB}(0) = \theta_{zB1}$

pour $x = l$: $\theta_{zB}(l) = \theta_{zB2} = 0$

Soit $\theta_{zB1} = -\frac{1}{EI} \left(Y_{B2} \frac{\ell^2}{2} + N_{B2} \ell \right)$

- Conditions aux limites pour les flèches:

pour $x = 0$: $v_B(0) = v_{B1} = 0$

pour $x = l$: $v_B(l) = v_{B2} = 0$

soit: $Y_{B2} \frac{2\ell}{3} = -N_{B2}$

en fonction des déplacements: $Y_{B2} = -\frac{6EI}{\ell^2} \theta_{zB1}$ et $N_{B2} = \frac{2EI}{\ell} \theta_{zB1}$

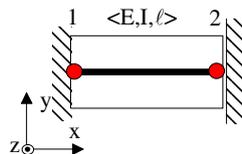
l'équilibre de la poutre entraîne:

$$Y_{B1} + Y_{B2} = 0$$

$$N_{B1} + N_{B2} + Y_{B2} \ell = 0$$

soit: $Y_{B1} = \frac{6EI}{\ell^2} \theta_{zB1}$ et $N_{B1} = \frac{4EI}{\ell} \theta_{zB1}$

○ Cas C:



- Conditions aux limites pour les rotations de sections

pour $x = 0$: $\theta_{zC}(0) = \theta_{zC1} = 0$

pour $x = l$: $\theta_{zC}(l) = \theta_{zC2} = 0$

$0 = \frac{1}{EI} \left(Y_{C2} \frac{\ell^2}{2} + N_{C2} \ell \right)$ soit $Y_{C2} \frac{\ell}{2} = -N_{C2}$

- Conditions aux limites pour les flèches:

pour $x = 0$: $v_C(0) = v_{C1} = 0$

pour $x = l$: $v_C(l) = v_{C2} = \frac{1}{EI} \left(Y_{C2} \frac{\ell^3}{3} + N_{C2} \frac{\ell^2}{2} \right)$

en fonction des déplacements: $Y_{C2} = \frac{12EI}{\ell^3} v_{C2}$ et $N_{C2} = -\frac{6EI}{\ell^2} v_{C2}$

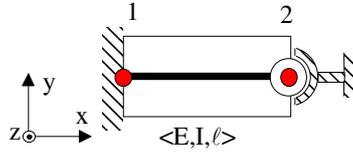
l'équilibre de la poutre entraînée:

$$Y_{C1} + Y_{C2} = 0$$

$$N_{C1} + N_{C2} + Y_{C2} \ell = 0$$

soit: $Y_{C1} = -\frac{12EI}{\ell^3} v_{C2}$ et $N_{C1} = -\frac{6EI}{\ell^2} v_{C2}$

○ Cas D:



• Conditions aux limites pour les rotations de sections

pour $x = 0$: $\theta_{zD}(0) = \theta_{zD1} = 0$

$$\text{pour } x = \ell: \theta_{zD}(\ell) = \theta_{zD2} = \frac{1}{EI} \left(Y_{D2} \frac{\ell^2}{2} + N_{D2} \ell \right)$$

• Conditions aux limites pour les flèches:

pour $x = 0$: $v_D(0) = v_{D1} = 0$

pour $x = \ell$: $v_D(\ell) = v_{D2} = 0$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(Y_{D2} \frac{\ell^3}{3} + N_{D2} \frac{\ell^2}{2} \right) \text{ soit: } Y_{D2} \frac{2\ell}{3} = -N_{D2}$$

en fonction des déplacements: $Y_{D2} = -\frac{6EI}{\ell^2} \theta_{zD2}$ et $N_{D2} = \frac{4EI}{\ell} \theta_{zD2}$

l'équilibre de la poutre entraînée:

$$Y_{D1} + Y_{D2} = 0$$

$$N_{D1} + N_{D2} + Y_{D2} \ell = 0$$

soit: $Y_{D1} = \frac{6EI}{\ell^2} \theta_{zD2}$ et $N_{D1} = \frac{2EI}{\ell} \theta_{zD2}$

Application du principe de superposition:

$$\begin{cases} Y_1 = Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} + Y_{D1} \\ N_1 = N_{A1} + N_{B1} + N_{C1} + N_{D1} \\ Y_2 = Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + Y_{D2} \\ N_2 = N_{A2} + N_{B2} + N_{C2} + N_{D2} \end{cases}$$

en remplaçant par les valeurs précédemment calculées, les actions mécaniques nodales en fonction des déplacements s'écrivent donc:

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{EI}{\ell^3} (12v_1 + 6\ell\theta_{z1} - 12v_2 + 6\ell\theta_{z2}) \\ N_1 = \frac{EI}{\ell^3} (6\ell v_1 + 4\ell^2\theta_{z1} - 6\ell v_2 + 2\ell^2\theta_{z2}) \\ Y_2 = \frac{EI}{\ell^3} (-12v_1 - 6\ell\theta_{z1} + 12v_2 - 6\ell\theta_{z2}) \\ N_2 = \frac{EI}{\ell^3} (6\ell v_1 - 2\ell^2\theta_{z1} - 6\ell v_2 + 4\ell^2\theta_{z2}) \end{cases}$$

sous la forme de l'écriture matricielle $\{F\} = [k] \bullet \{d\}$:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

qui permet d'écrire la matrice de raideur de l'élément de poutre en flexion simple:

$$[k] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$