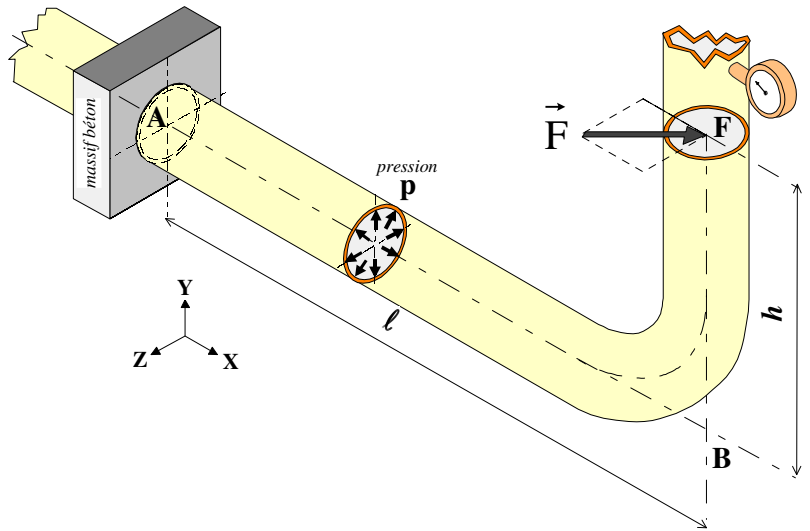


CONDUITE HYDRAULIQUE SOUS PRESSION

1. OBJECTIF

Utiliser les relations de comportement issues de la **théorie des poutres** afin de calculer les contraintes engendrées par les sollicitations simples et y associer celles de l'**état plan de contraintes** afin de vérifier le dimensionnement d'une de conduite sous pression située dans une installation hydraulique.

Ce tronçon de conduite coudée de section annulaire est soumis à une surpression interne d'intensité $\|p\|$, notée p par la suite. Il est encastré en A dans un massif en béton. Au point F, il est sollicité par une force \vec{F} générée par une structure non représentée. Au dessus du point F la conduite est considérée libre de toute liaison.



Données :

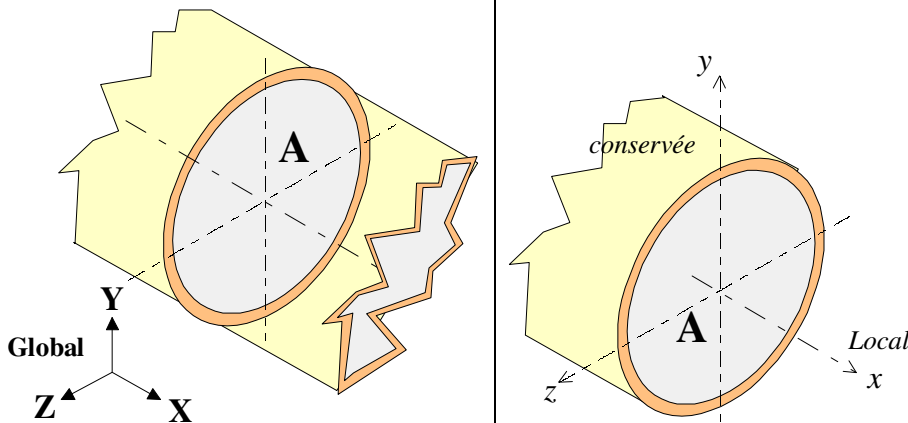
- diamètre extérieur de la conduite : $D = 100 \text{ mm}$
- diamètre intérieure de la conduite : $d = 94 \text{ mm}$
- dimensions : $\ell = 2000 \text{ mm}$ et $h = 1000 \text{ mm}$

- pression interne : $p = 2 \text{ MPa}$
- force : $\vec{F} = X_F \vec{X} + Z_F \vec{Z} = +1000\vec{X} - 1000\vec{Z} \text{ (N)}$
- matériau : acier inoxydable (Z8CNDT17-12) : $Re = 215 \text{ MPa}$

2. TRAVAIL DEMANDE

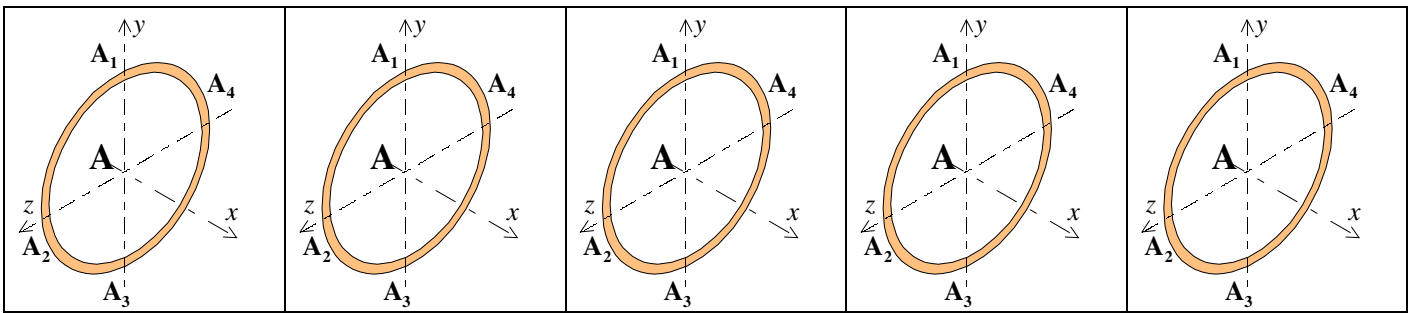
Afin de dimensionner cet élément de conduite (voir §**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** Annexes), on souhaite connaître l'état de contraintes dans la zone la plus sollicitée, l'encastrement A. Pour cela on propose les étapes suivantes de difficultés graduelles :

- ◆ élaborer le modèle calcul « poutre » en le dessinant sur la figure représentant la conduite
- ◆ dans la section A, étudier les sollicitations engendrées par la seule force \vec{F} en adoptant le canevas de travail :
 - torseur des efforts extérieurs appliqués en F réduits au point A et en donner une représentation graphique
 - torseur des forces de cohésion au centre géométrique A de la section annulaire de la conduite et en donner une représentation graphique

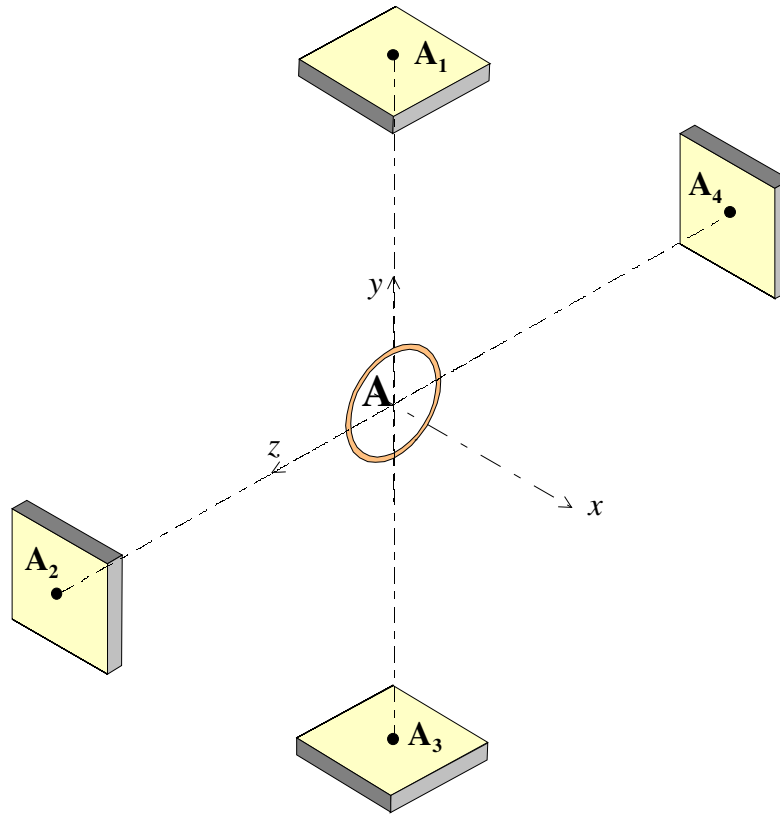


- pour chaque sollicitation, calculer les contraintes engendrées et donner une représentation graphique de leur distribution dans la section annulaire

sollicitation :	sollicitation :	sollicitation :	sollicitation :	sollicitation :
contraintes engendrées:	contraintes engendrées:	contraintes engendrées:	contraintes engendrées:	contraintes engendrées:

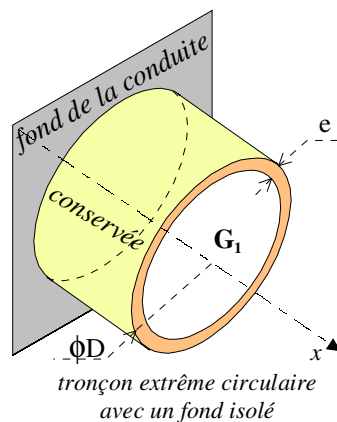


- autour des quatre points périphériques de la section, on a isolé un petit élément de la conduite (épaisseur « e » avec deux dimensions infinitésimales), donner une représentation graphique de l'état des contraintes engendrées par la superposition des ces sollicitations



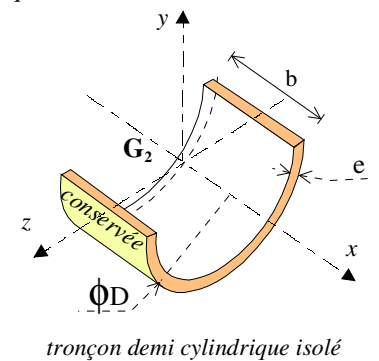
◆ étudier le comportement élastique du tronçon de conduite AB soumis à la pression intérieure, en adoptant le canevas de travail :

- sollicitation longitudinale de la conduite due à la pression
- système isolé :
- bilan des actions mécaniques



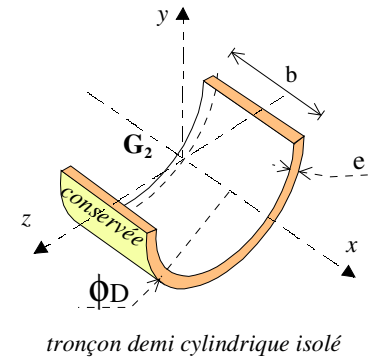
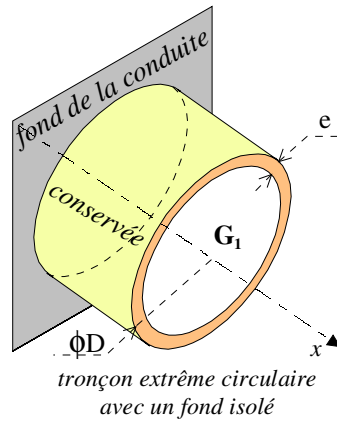
- principe fondamental de la statique :
- expression du torseur de cohésion en G_1 de la partie supprimée sur la partie conservée :
- calculer la contrainte normale longitudinale

- sollicitation circonférentielle de la conduite due à la pression
- système isolé :
- bilan des actions mécaniques



- principe fondamental de la statique :
- expression du torseur de cohésion en G_2 de la partie supprimée sur la partie conservée :
- calculer la contrainte normale circonférentielle

(pour simplifier l'étude considérer la conduite obturée par un fond plat)



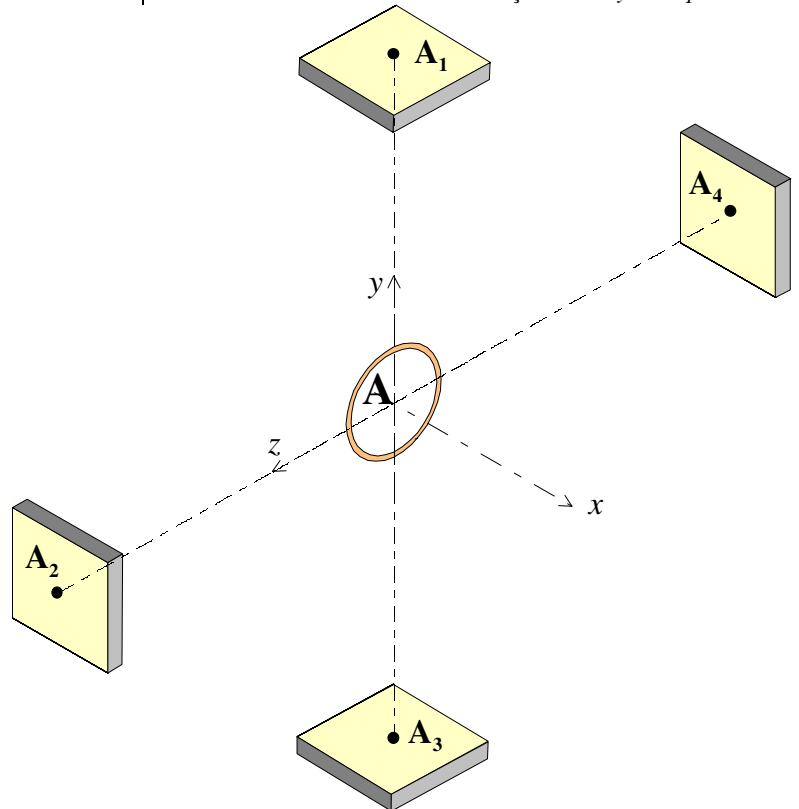
Compte tenu de la morphologie de la conduite

« enveloppe mince » $\frac{d}{D-d} \gg 1$ (>20) :

- comparer ces deux contraintes avec la pression intérieure :

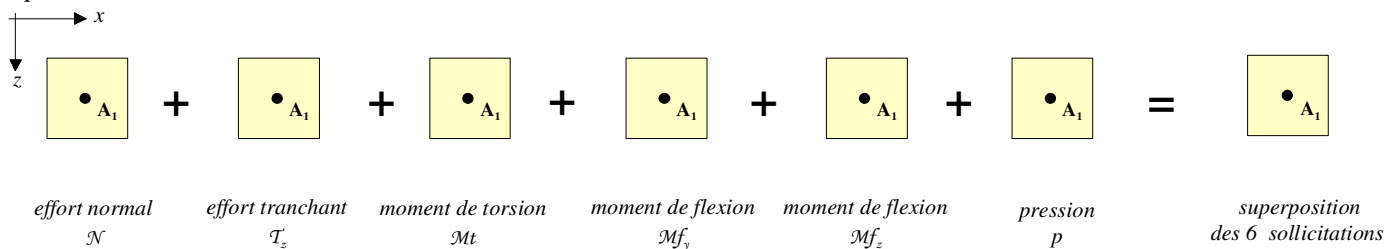
- conclure sur la nature de l'état des contraintes autour d'un point A_i (voir §3 Annexes)

- autour des quatre points périphériques de la section, on a isolé un petit élément de la conduite (épaisseur « e » avec deux dimensions infinitésimales), donner une représentation graphique de l'état des contraintes engendré par la pression intérieure

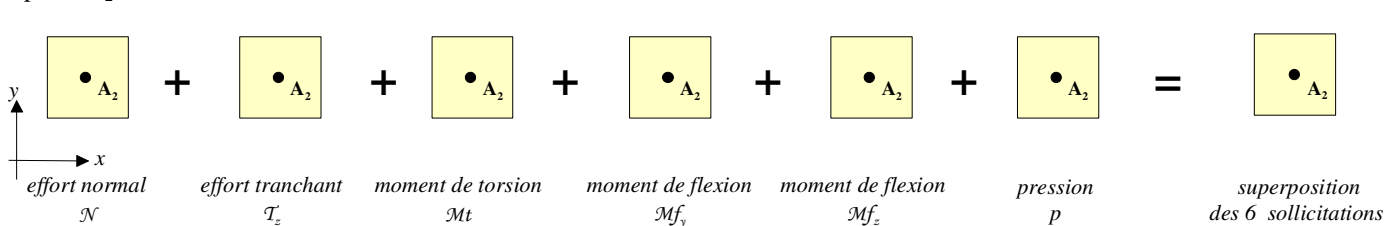


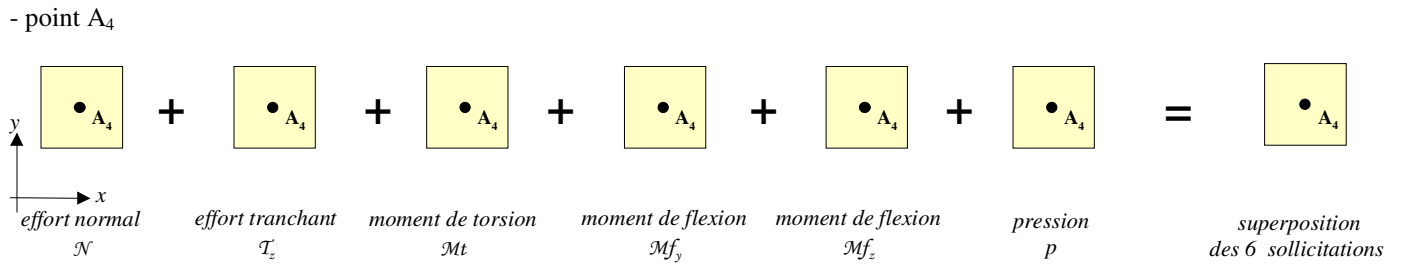
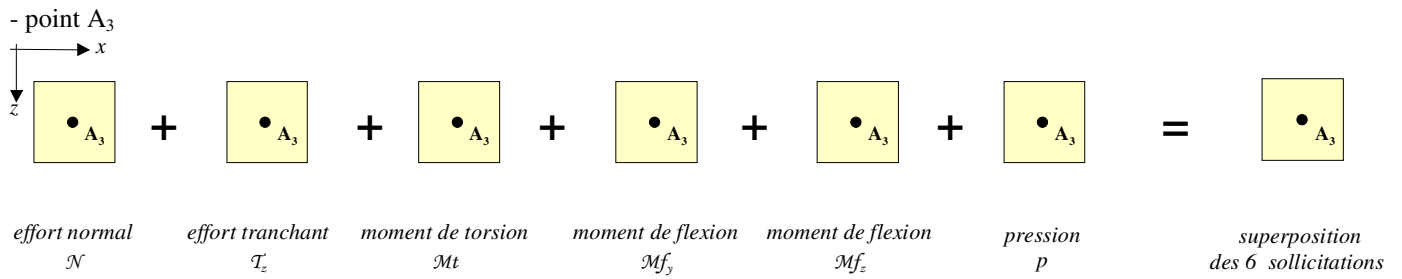
◆ superposer les effets de toutes ces sollicitations et en donner une représentation graphique en indiquant les valeurs algébriques des contraintes

- point A_1



- point A_2





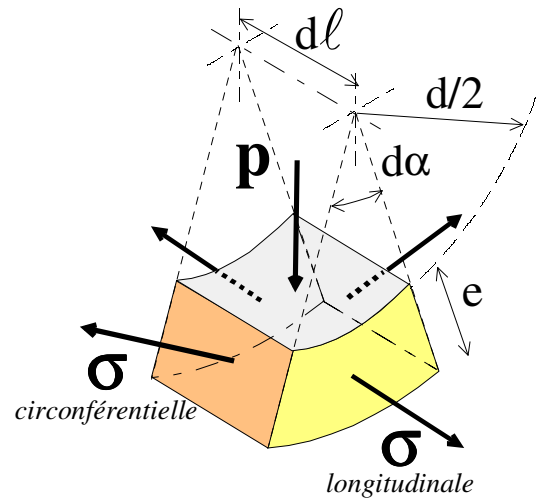
◆ construire les 4 cercles de Mohr résultant et déterminer les contraintes principales et la contrainte tangentielle maximale,

◆ vérification de la condition de résistance

3. ANNEXES

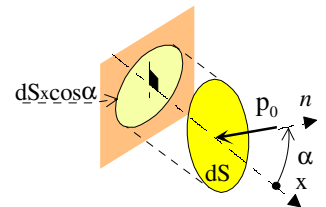
- **enveloppe mince sous pression** : enceinte dont l'épaisseur est très petite par rapport au diamètre intérieur, c'est-à-dire que $\frac{d}{D-d} \gg 1$ (>20). La modélisation du comportement se fait à partir de l'équilibre d'un petit élément de conduite isolé (secteur angulaire d'épaisseur « e » avec deux dimensions infinitésimales) et sollicité par des forces de cohésion et de pression intérieure p. On considère les contraintes **constantes** dans l'épaisseur de la conduite

Pour simplifier l'étude, on propose de modéliser le comportement à partir d'un petit élément parallélépipédique de dimension (dx×dy×e) dans un plan parallèle à xy ou (dx×dz×e) dans un plan parallèle à xz. Mais ce modèle de calcul est incompatible avec l'état d'équilibre précédent. L'exercice propose de formuler des hypothèses pour y remédier.



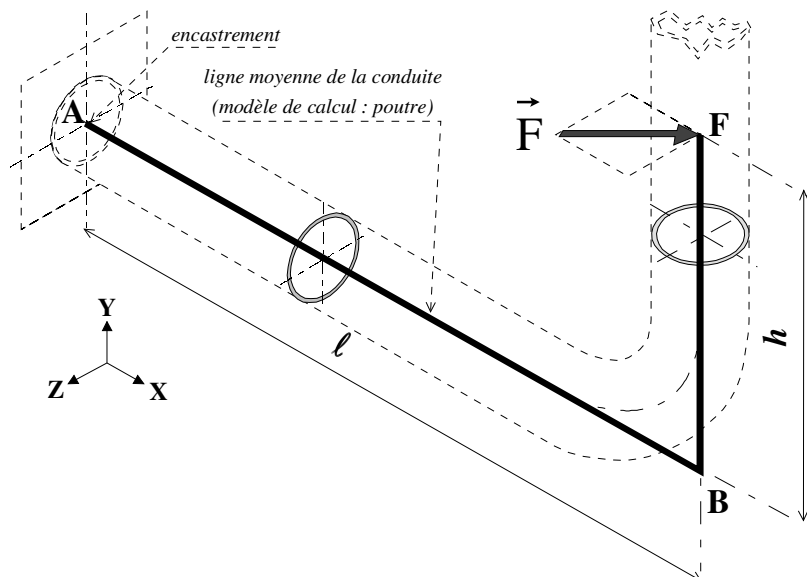
- **définition de la pression** : on rappelle que le "vecteur pression" exercé par un liquide sur une paroi de normale sortante \vec{n} a pour expression $\vec{p} = -p_0 \vec{n}$.

- **surface projetée** : sur une facette d'aire dS dont la normale \vec{n} fait un angle α avec \vec{x} , l'effort élémentaire de pression vaut $\vec{df} = -p_0 \times dS \times \vec{n}$. En projection sur la direction \vec{x} , on obtient: $\vec{df} \times \vec{x} = -p_0 \times dS \times \vec{n} \cdot \vec{x} = -p_0 \times dS \times \cos \alpha$. La facette d'aire $dS \times \cos \alpha$ est la projection de dS sur un plan perpendiculaire à \vec{x} : c'est la surface projetée. L'ensemble des facettes dS constituant le fond du réservoir a pour surface projetée: $\int_{fond} dS \times \cos \alpha = \pi \times r^2$.



ELEMENTS DE CORRECTION

◆ modèle de calcul : deux poutres perpendiculaires (lignes moyennes des poutres confondues avec les axes de révolution de la conduite)

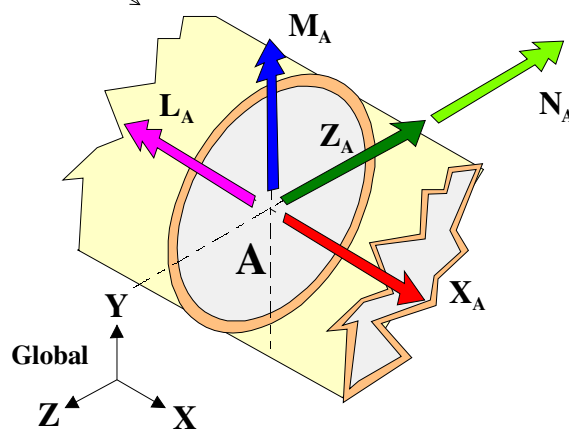


◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon FA exprimé au point A

$$\{F_{\text{ext}/FA}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \vec{F} \\ \vec{M}_A = \vec{AF} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_{A,R}$$

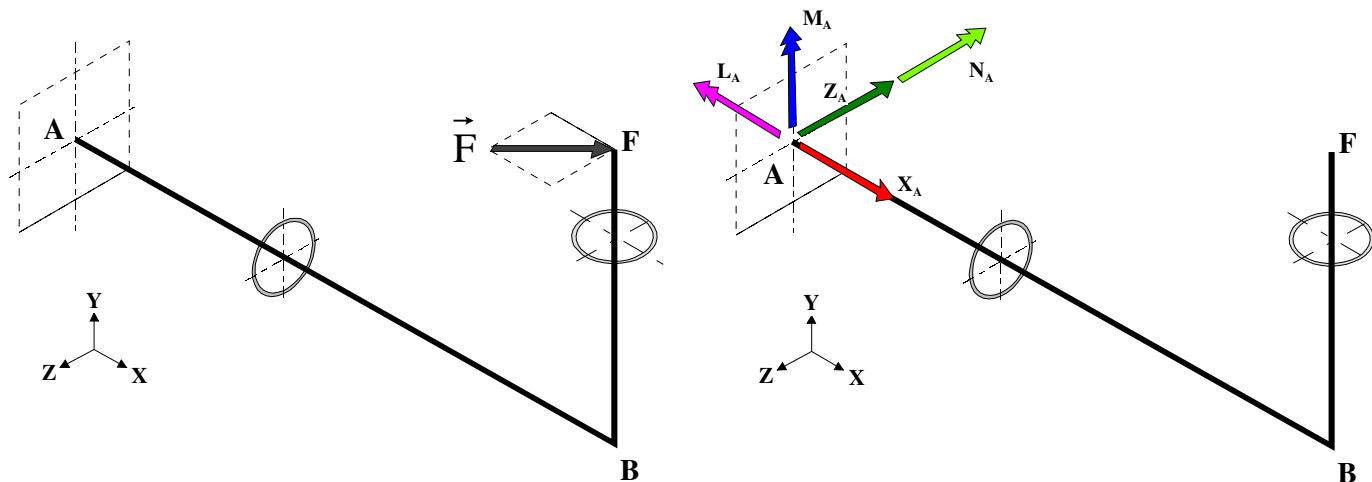
$$\vec{AF} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +2000 & +1000 & 0 \\ +1000 & 0 & -1000 \end{bmatrix} = -1000000\vec{X} + 2000000\vec{Y} - 1000000\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{F_{\text{ext}/FA}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = +1000\vec{X} - 1000\vec{Z} \\ \vec{M}_A = -1000000\vec{X} + 2000000\vec{Y} - 1000000\vec{Z} \end{array} \right\}_{A,R}$$



Rappel : $\{F_{\text{ext}/FA}\}_F = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{M}_F = \vec{0} \end{array} \right\}_{F,R}$ et $\{F_{\text{ext}/FA}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \vec{F} \\ \vec{M}_A = \vec{AF} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_{A,R}$ produisent les mêmes effets (contraintes et déformations) dans

la section A



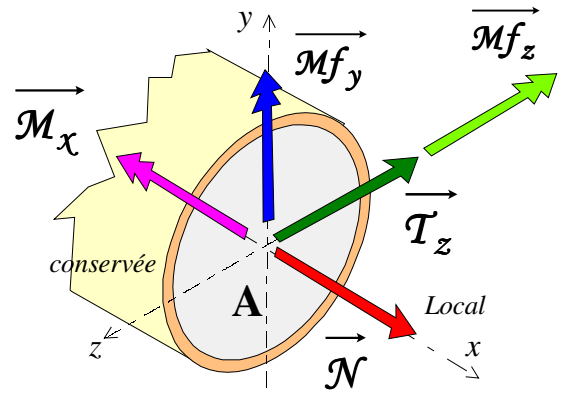
◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée FA ; partie conservée A+encastrement
- axe local \vec{x} : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = \vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix} \text{ (ici repères identiques)}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_A = \{F_{ext/FA}\}_A$$

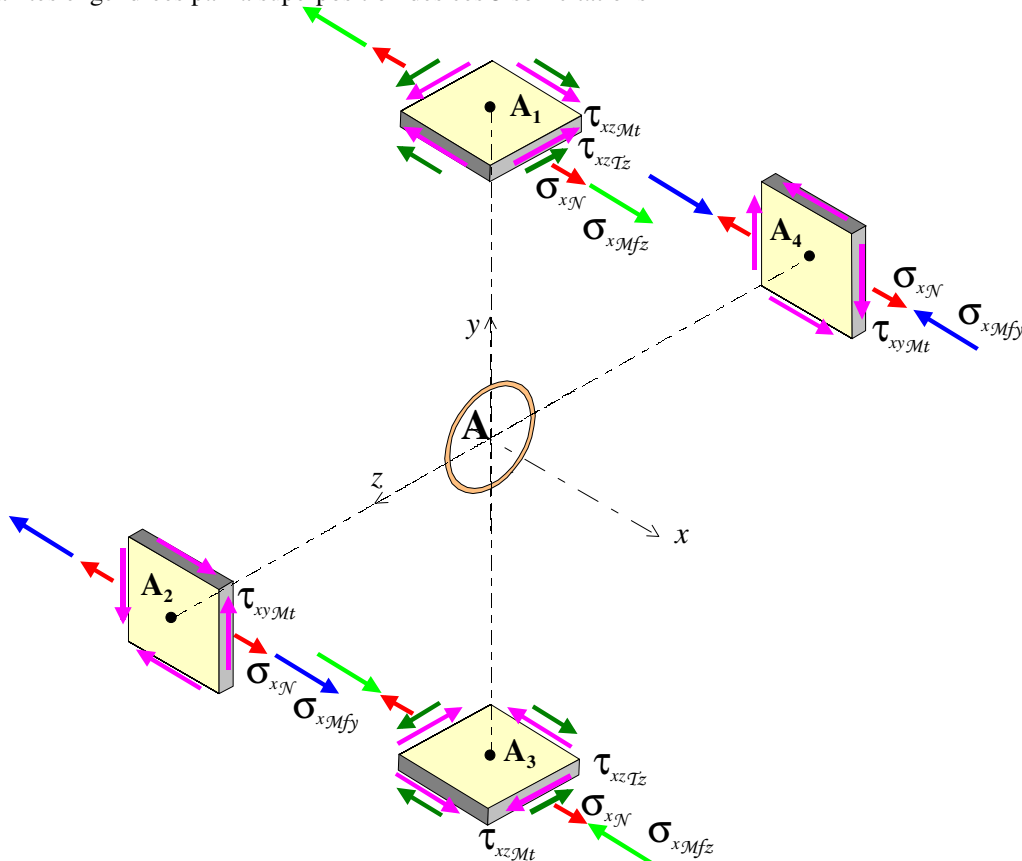
$$\{Coh_{sup/cons}\}_A = \begin{Bmatrix} N_x = +1000 & M_t = -1000000 \\ T_y = 0 & Mf_y = +2000000 \\ T_z = -1000 & Mf_z = -1000000 \end{Bmatrix}_A$$



◆ Contraintes engendrées dans la section en A

sollicitation : traction / x contraintes engendrées:	sollicitation : cisaillement / z contraintes engendrées :	sollicitation : torsion/x contraintes engendrées:	sollicitation : flexion/y contraintes engendrées:	sollicitation : flexion/z contraintes engendrées:
$\sigma_x = \frac{N}{S}$ $\sigma_x = \frac{+1000}{\frac{\pi}{4}(100^2 - 94^2)}$ = +1,1MPa	$\tau_{xz \max} = 2 \frac{T_z}{S}$ $\tau_{xz \max} = -\frac{2 \times +1000}{\frac{\pi}{4}(100^2 - 94^2)}$ = -2,2MPa	$\tau_{r \max} = \frac{Mt \times d / 2}{I_O}$ $\tau_r = \frac{1000000 \times 50}{\frac{\pi}{32}(100^4 - 94^4)}$ = 23,22MPa	$\sigma_{x \max} = + \frac{Mf_y \times z_{\max}}{I_y}$ $\sigma_x = + \frac{+2000000 \times \pm 50}{\frac{\pi}{64}(100^4 - 94^4)}$ = $\pm 92,90$ MPa	$\sigma_{x \max} = - \frac{Mf_z \times y_{\max}}{I_z}$ $\sigma_x = - \frac{-1000000 \times \pm 50}{\frac{\pi}{64}(100^4 - 94^4)}$ = $\pm 46,45$ MPa

- états des contraintes engendrées par la superposition des ces 5 sollicitations



◆ étude du comportement élastique du tronçon de conduite AB soumis à la pression intérieure :

➔ sollicitation **longitudinale** de la conduite due à la pression

- système isolé : tronçon extrême

- bilan des actions mécaniques :

● efforts de pression agissant sur le fond intérieur de la

conduite. La surface « projetée » du fond vaut : $\frac{\pi}{4} \times d^2$. La

résultante de ces forces de pression s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{pres/tronçon cons}} \right\}_{G1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{xp} = -p \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \vec{x} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\text{pres}/G1} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G1}$$

● forces de cohésion normales et parallèles à \vec{x} (actions de la partie supprimée sur la partie conservée), agissant sur la section annulaire de normale parallèle à \vec{x} : $\left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G1}$

- équilibre de ce tronçon (PFS) :

$$\left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G1} + \left\{ \mathcal{F}_{\text{pres/tronçon cons}} \right\}_{G1} = \left\{ 0 \right\}_{G1}$$

$$\text{donc } \left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G1} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}_x = +p \times \frac{\pi}{4} \times d^2 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = 0 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = 0 \end{array} \right\}_{G1}$$

➔ sollicitation **circconférentielle** de la conduite due à la pression

- système isolé : tronçon demi cylindrique

- bilan des actions mécaniques

● efforts de pression agissant sur la paroi interne du

réservoir. La surface "projetée" de la paroi interne suivant \vec{y}

s'écrit $d \times b$, la résultante de ces forces de pression s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{pres/tronçon cons}} \right\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{yp} = -p \times d \times b \times \vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\text{pres}/G2} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G2}$$

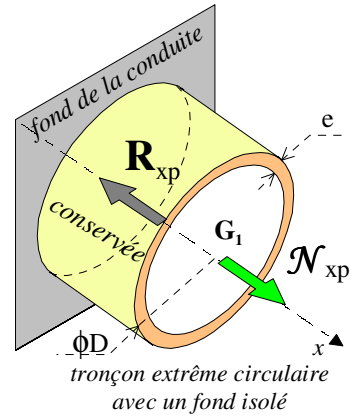
● forces de cohésion longitudinales suivant \vec{x} déjà identifiées dans l'étude précédente ne sont pas considérées

● forces de cohésion normales et parallèles \vec{y} (actions de la partie supprimée sur la partie conservée) agissant sur les deux sections rectangulaires : $\left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G2}$

- équilibre de ce tronçon (PFS) :

$$\left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G2} + \left\{ \mathcal{F}_{\text{pres/tronçon cons}} \right\}_{G2} = \left\{ 0 \right\}_{G2}$$

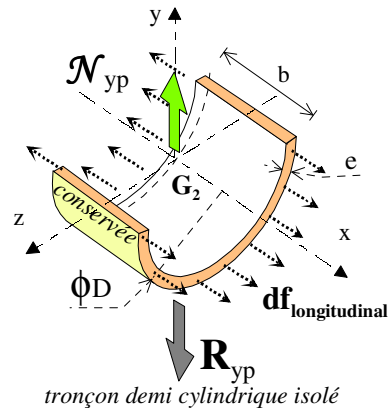
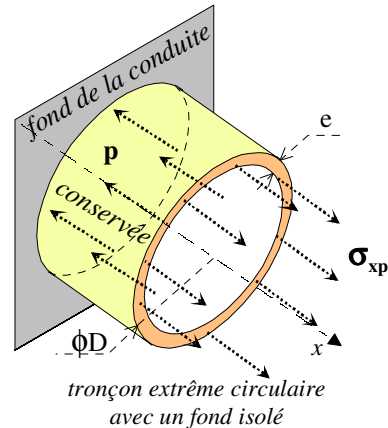
$$\text{donc } \left\{ \text{Coh}_{\text{sup/cons}} \right\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}_x = +p \times d \times b & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = 0 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = 0 \end{array} \right\}_{G2}$$



- calcul de la contrainte normale longitudinale

$$\sigma_{xp} = \frac{\mathcal{N}_{xp}}{S_{\text{annul}}} = + \frac{p \times d^2}{(D^2 - d^2)} = + \frac{2 \times 94^2}{(100^2 - 94^2)} = +15,18 \text{MPa}$$

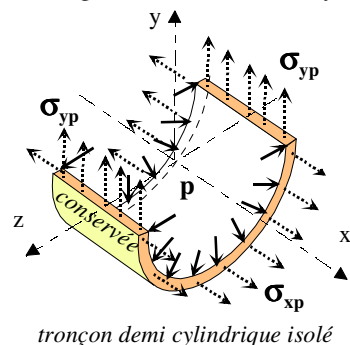
(avec une distribution uniforme du fait de l'axisymétrie)



- calcul de la contrainte normale circconférentielle

$$\sigma_{yp} = \frac{\mathcal{N}_{yp}}{S_{\text{rectan}}} = + \frac{p \times d \times b}{(D-d) \times b} = + \frac{p \times d}{(D-d)} = + \frac{2 \times 94}{100 - 94} = +31 \text{MPa}$$

(avec une distribution uniforme et identique pour chaque section rectangulaire du fait de l'axisymétrie).



◆ relation entre ces deux contraintes :

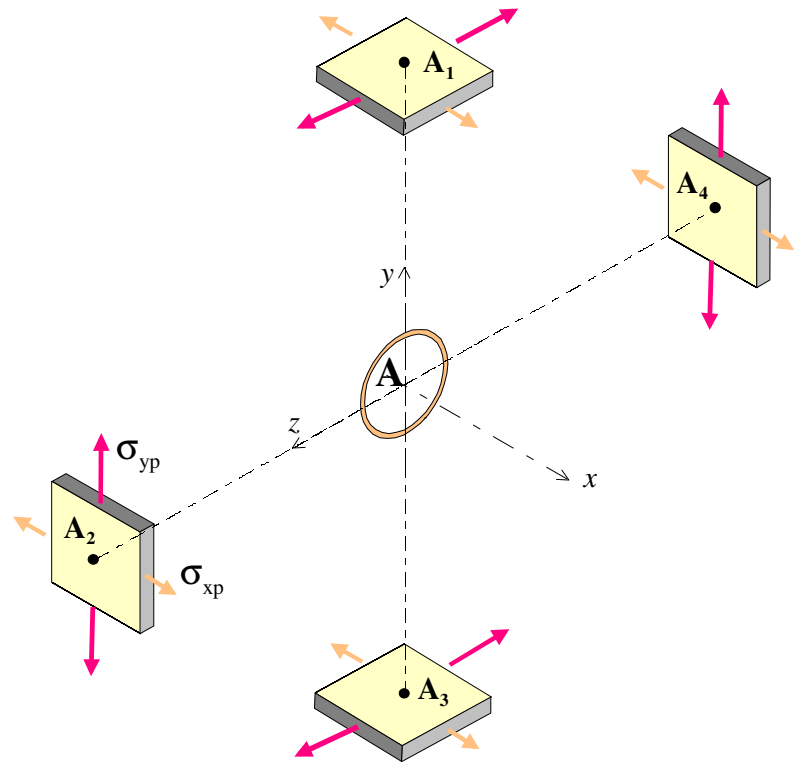
$$\sigma_{yp} = p \frac{d}{D-d} = \frac{D+d}{d} \sigma_{xp} \approx 2\sigma_{xp}$$

- on observe aussi pour le petit élément A₂, par exemple, qu'il est soumis à une pression p suivant la direction \vec{z} perpendiculaire au plan (xy), correspondant à une contrainte normale. Il ne s'agit donc pas ici en toute rigueur d'un état plan de contraintes

- compte tenu de la morphologie structurale de la conduite « enveloppe mince » $\frac{d}{D-d} \gg 1$, la comparaison des contraintes normales avec la pression indique que σ_{xp} et $\sigma_{yp} \gg p$. L'effet transversal de la pression p peut être donc **négligé** (*) devant σ_{xp} et σ_{yp} et on se retrouve le cadre de l'état plan de contraintes.

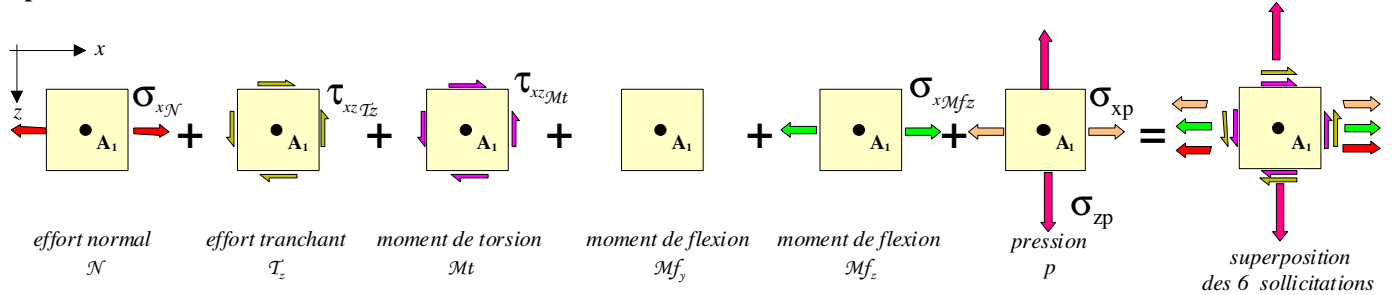
(*) : dans le cas contraire l'équilibre du parallélépipède serait impossible

- représentation graphique des états des contraintes engendrés par la pression



◆ superposition des effets de toutes ces sollicitations et distribution des contraintes autour des points Ai d'un petit élément de conduite

- point A1



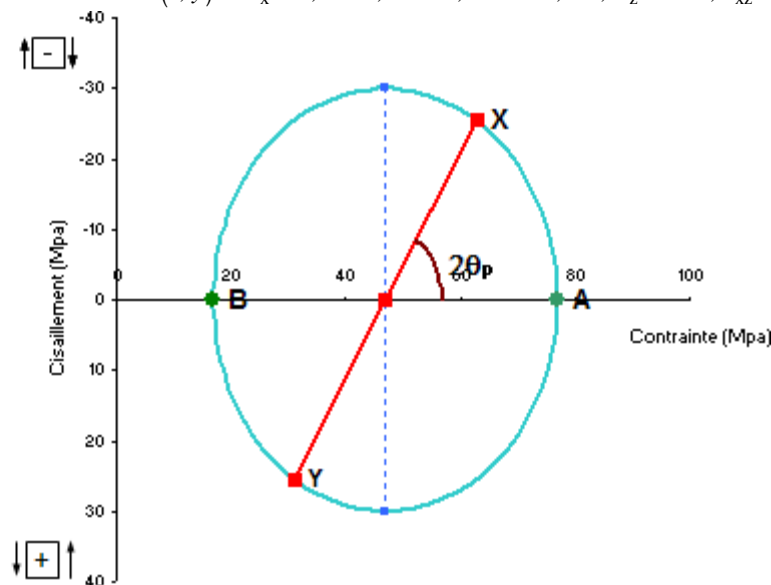
- au point A₁, état des contraintes dans (\vec{x}, \vec{y}) : $\sigma_x = 1,1 + 46,45 + 15,18 = +62,79$; $\sigma_z = +31$; $\tau_{xz} = -23,22 - 2,2 = -25,42$

Données

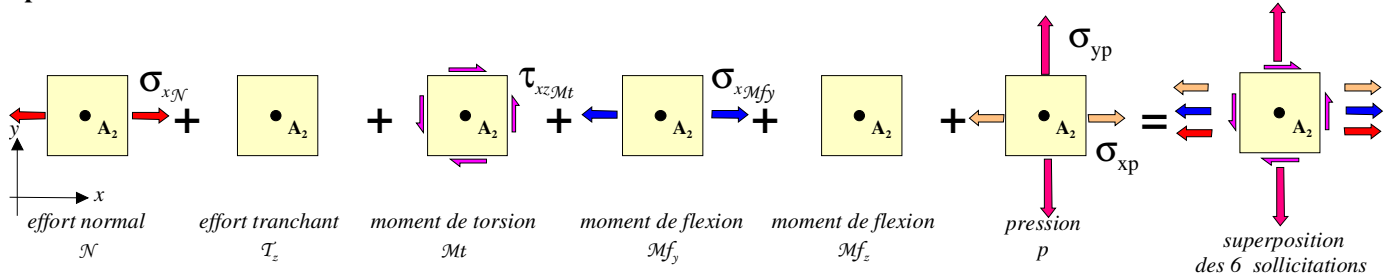
σ_x	62,79	Mpa
σ_y	31	Mpa
τ_{xy}	-25,42	Mpa

Résultats

σ_{max}	76,9	Mpa
σ_{min}	16,9	Mpa
τ_{max}	30,0	Mpa
θ_p	-29,0	Degré



- point A2



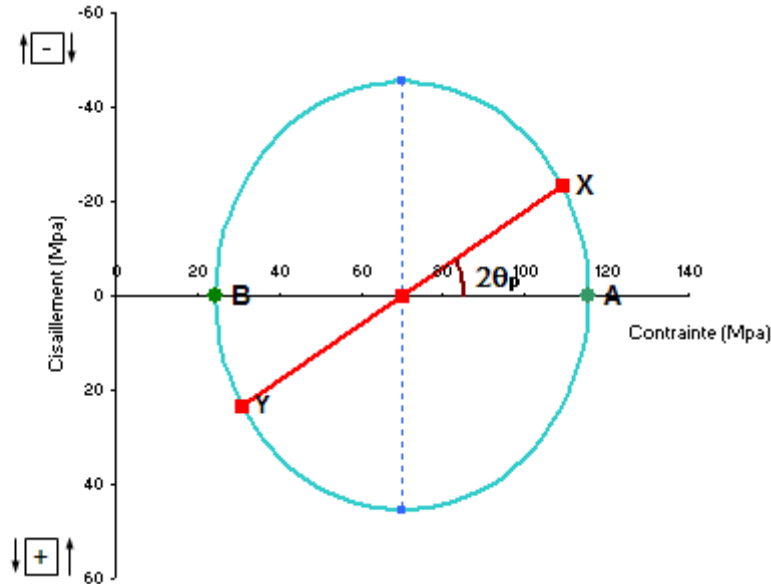
- au point A2, état des contraintes dans (\vec{x}, \vec{y}) : $\sigma_x = 1,1 + 92,90 + 15,18 = +109,18$; $\sigma_y = +31$; $\tau_{xy} = +23,22$

Données

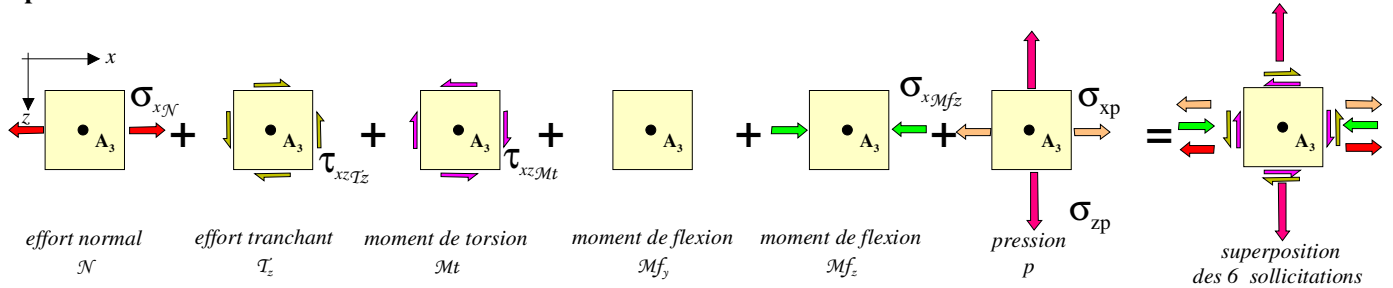
σ_x	109,18	Mpa
σ_y	31	Mpa
τ_{xy}	-23,22	Mpa

Résultats

σ_{max}	115,6	Mpa
σ_{min}	24,6	Mpa
τ_{max}	45,5	Mpa
θ_p	-15,4	Degré



- point A3



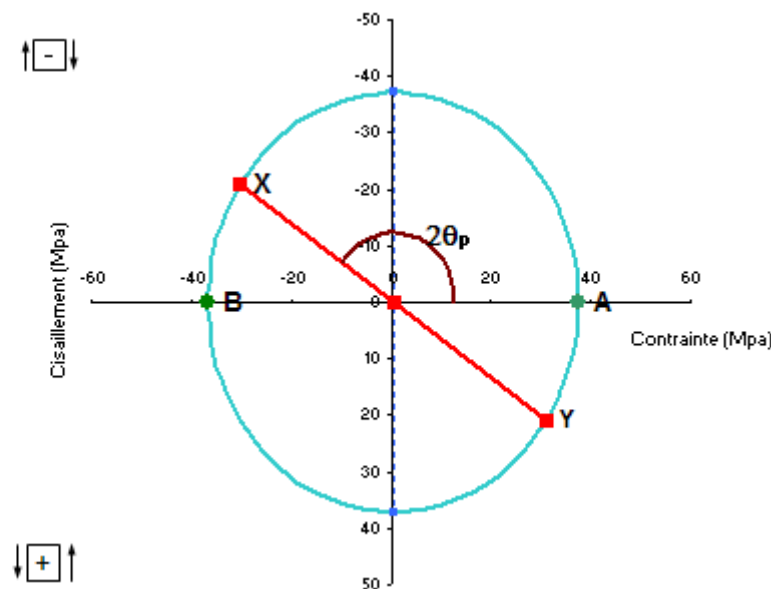
- au point A3, état des contraintes dans (\vec{x}, \vec{y}) : $\sigma_x = 1,1 - 46,45 + 15,18 = -30,11$; $\sigma_z = +31$; $\tau_{xz} = +23,22 - 2,2 = +21,02$

Données

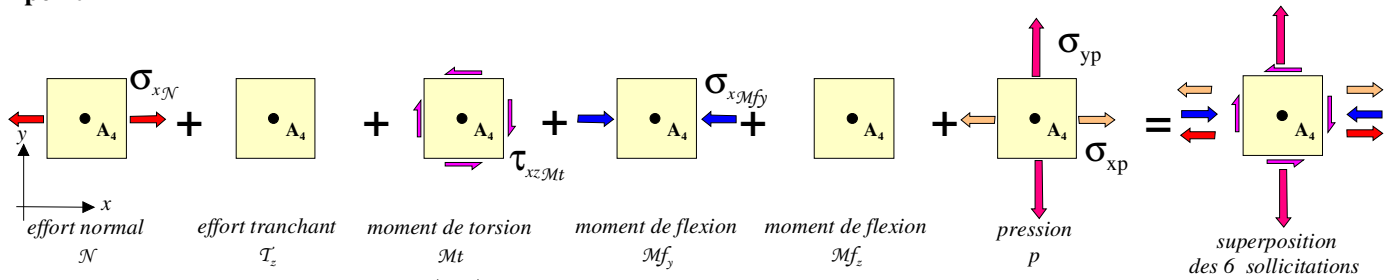
σ_x	-30,11	Mpa
σ_y	31	Mpa
τ_{xy}	-21,02	Mpa

Résultats

σ_{max}	37,5	Mpa
σ_{min}	-36,6	Mpa
τ_{max}	37,1	Mpa
θ_p	-72,7	Degré



- point A4



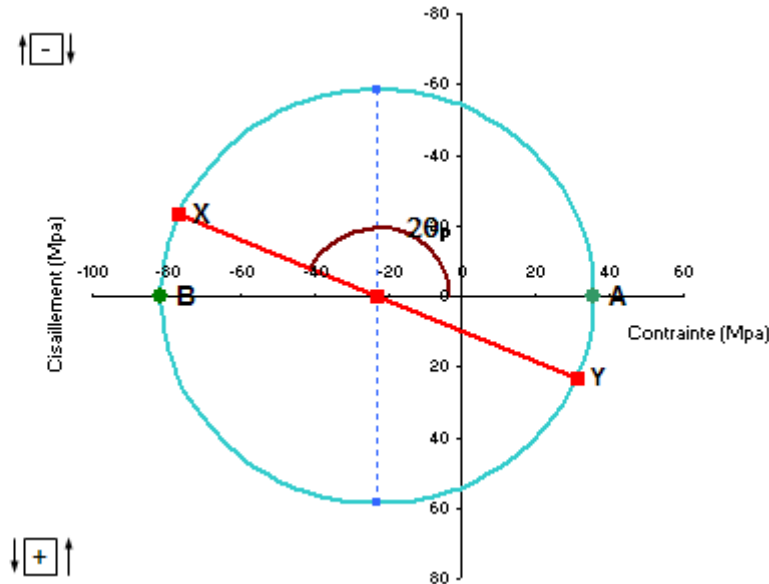
- au point A4, état des contraintes dans (\vec{x}, \vec{y}) : $\sigma_x = 1,16 - 92,90 + 15,18 = -76,56$; $\sigma_y = +31$; $\tau_{xy} = -23,22$

Données

σ_x	-76,56	Mpa
σ_y	31	Mpa
τ_{xy}	-23,22	Mpa

Résultats

σ_{\max}	35,8	Mpa
σ_{\min}	-81,4	Mpa
τ_{\max}	58,6	Mpa
θ_p	-78,3	Degré



→ **Condition de résistance (matériaux ductiles) :**

Les enceintes sous pression doivent satisfaire aux exigences de plusieurs réglementations (Codap par exemple qui permet de déterminer l'épaisseur de la canalisation, les piquages, les renforcements d'ouverture, les brides de fixation). Dans le cadre de cet exercice on se limitera à l'utilisation du « **critère de Von Mises** » (*) comme condition de résistance à appliquer quelles que soient les orientations de facettes autour du point M et qui permettrait de justifier l'épaisseur de la virole suivant certaines conditions d'utilisation non formulées dans cette application.

$$A1 \Rightarrow \sigma_{\text{éq V Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \times \sigma_2} = \sqrt{76,9^2 + 16,9^2 - 76,9 \times 16,9} = 70 \text{MPa}$$

$$A2 \Rightarrow \sigma_{\text{éq V Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \times \sigma_2} = \sqrt{115,6^2 + 24,6^2 - (115,6 \times 24,6)} = 105,5 \text{MPa}$$

$$A3 \Rightarrow \sigma_{\text{éq V Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \times \sigma_2} = \sqrt{37,5^2 + 36,6^2 - (35,5 \times -36,6)} = 64 \text{MPa}$$

$$A4 \Rightarrow \sigma_{\text{éq V Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \times \sigma_2} = \sqrt{35,8^2 + 81,04^2 - (35,8 \times -81,04)} = 106,2 \text{MPa}$$

Quel que soit le point A $\sigma_{\text{éq V Mises}} < R_e = 215 \text{MPa}$ condition de résistance largement vérifiée

(*) : ou critère de l'énergie de distorsion maximale : on montre que le début de l'écoulement plastique se produit lorsque l'énergie de distorsion atteint une valeur critique

En utilisant le critère classique de la « **contrainte normale maximale** » qui consiste à prendre la contrainte principale maximale et à la comparer à la limite élastique du matériau utilisé on montre qu'ici $\sigma_1 = +115,6 \text{MPa}$ est inférieur à R_e donc l'écoulement plastique ne se produira pas.

Remarque : les deux critères ne prédisent pas nécessairement tous les deux l'écoulement ou le non écoulement, tout dépend des valeurs des contraintes principales utilisées.

Un autre critère est parfois utilisé « **critère de Tresca** » (ou critère du cisaillement maximal : on montre que l'écoulement plastique se produit lorsque la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$ atteint une valeur critique. Dans le cas d'un

chargement plan hydrostatique $\sigma_1 = \sigma_2$ le critère de Tresca ne prédit aucun écoulement puisqu'il n'existe pas de cisaillement dans cet état de contrainte- le cercle de Mohr est un point- le matériau se rompra sans déformation permanente !)

→ **Intérêt de rechercher les directions principales et les directions de cisaillement maxi :**

Suivant ces directions, on peut imaginer des dispositions constructives intégrant des liaisons structurales (soudures, boulons, rivets) et qui assurent l'assemblage de tôles constituant la canalisation. Il faut trouver les niveaux de contraintes qui agissent suivant ces directions pour dimensionner ces composants.

De plus les axes du repère global de la structure ne sont pas nécessairement les directions où se situent les contraintes maxi et mini.

La construction de Mohr s'avère être un outil rapide de résolution graphique pour la détermination de l'état des contraintes sur des facettes orthogonales autour d'un point, tout en vérifiant la cohérence mécanique du champ des contraintes (équilibre de l'élément sous l'action des **forces de cohésion élémentaires**)