

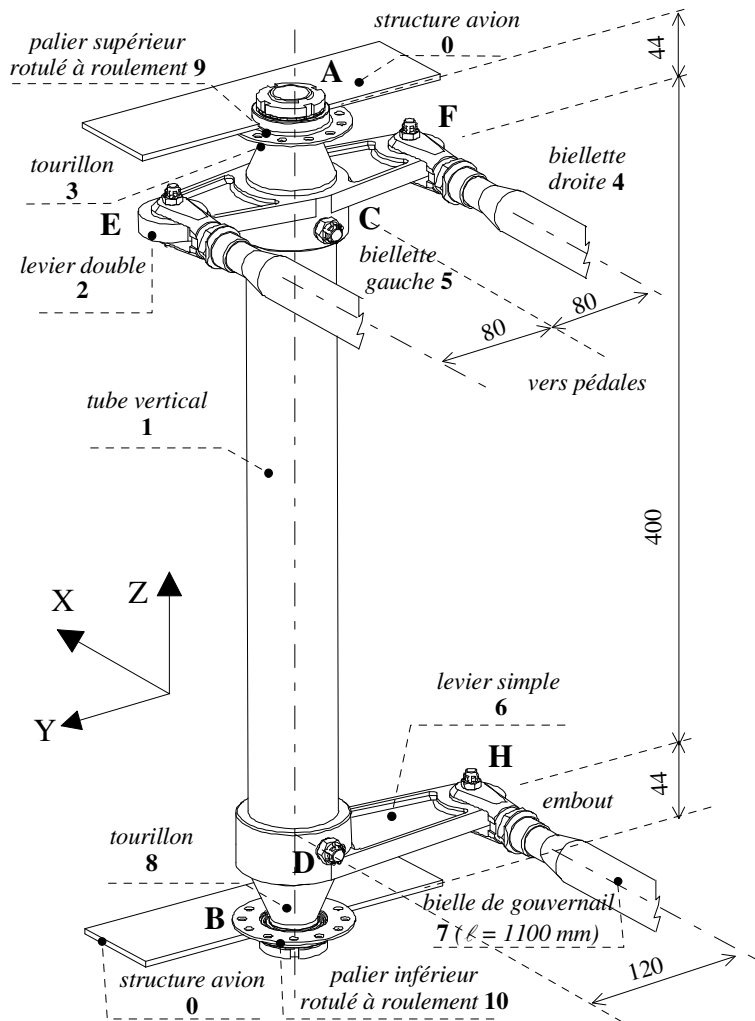
ELEMENT DE COMMANDE DE DIRECTION

1 OBJECTIF DE L'ETUDE

Rechercher les modèles de calcul pour des dispositions constructives aéronautiques simples, identifier les sollicitations afin de vérifier les conditions de rigidité, de résistance des pièces et de non détérioration des contacts dans les liaisons.

2 MISE EN SITUATION

L'ensemble représenté est un élément de commande du gouvernail de direction (partie mobile de l'empennage vertical) qui est manœuvré par le pilote en agissant sur deux pédales (actionnées séparément) et sur une timonerie intermédiaire non représentées. Ce dispositif comporte un tube vertical (1) et deux tourillons (3 et 8) en liaison pivot par rapport à la structure de l'avion (A et B : deux paliers rotulés à roulement 9 et 10). Un levier double (2) et un levier simple (6) sont en liaison encastrement C et D sur ce tube. Le levier double est attaqué en E et F à ses deux extrémités (chapes mâles rotulées) par deux biellettes (4 et 5 avec chapes femelles rotulées) situées dans un plan perpendiculaire au tube et parallèles entre-elles. Le levier simple (chape mâle rotulée) attaque en H la bielle de direction (7) permettant d'actionner directement le gouvernail. La bielle de gouvernail est constituée par une chape rotulée femelle montée dans un embout creux réglable en liaison encastrement sur un tube par des rivets.



3 DONNEES

- matériaux

Pièces	Nuances normalisées	Module d'élasticité E (MPa)	Coef. de Poisson ν	Masse volumique ρ (kg/m ³)	Résistance à la rupture à la traction R_r (MPa)	Limite élastique à la traction R_e (MPa)
Axes, goupilles coniques et boulons	36 Ni Cr Mo 16 acier faiblement allié	205000	0.3	7800	1000	800
Autres pièces	EN AW-2017 alliage d'aluminium	70000	0.3	2800	470	295

- pression de matage admissible (à partir du R_e du matériau le plus ductile de l'assemblage) :

axes ajustés sans serrage sur flanc et sans mouvement sous charge : $p_{adm} = 0.88 R_e$

axes ajustés et goupilles coniques avec serrage faible $p_{adm} = 1.15 R_e$

- force de poussée sur le levier double (2) développée par la biellette gauche (5) seule : $+6750\vec{X}$ (N)

4 JUSTIFICATION DU DIMENSIONNEMENT

4.1 Etude statique préliminaire

- ♦ Proposer en perspective isométrique le modèle isostatique de calcul et ses conditions aux limites.
- ♦ Déterminer toutes les actions mécaniques inconnues.

4.2 Sollicitations dans le levier simple 6

- ♦ Proposer en perspective isométrique le modèle de calcul et ses conditions aux limites.
- ♦ Déterminer les éléments de réduction du tenseur de cohésion au centre géométrique d'une section droite du levier simple pour un point courant de sa la ligne moyenne. En déduire la nature des sollicitations et calculer les contraintes maximales engendrées (aux cotes 35 et 99) et les déplacements maximaux

♦ On donne deux configurations cinématiques extrêmes du levier 6 attelé à sa bielle 7 : I (angle de 60°) et II (angle de 120°). Indiquer celle qui correspond aux actions exercées par le pilote respectivement sur la bielle 4 et ensuite 5. Calculer et représenter l'effort de la bielle 7 sur levier 6 pour chaque configuration. Quelle que soit la configuration, on suppose que la force de poussée est toujours de 6750 N (support parallèle à l'axe X). Pour la section droite à la cote 35, de la configuration II calculer les contraintes normales maximales engendrées.

4.3 Sollicitations dans le tube vertical 1

- ♦ Déterminer les éléments de réduction du tenseur de cohésion au centre géométrique d'une section droite du tube vertical pour un point courant de sa la ligne moyenne.
- ♦ En déduire la nature des sollicitations et calculer les contraintes maximales engendrées et les déplacements maximaux

4.4 Sollicitations dans la liaison encastrement levier simple 6-tube vertical 1

- ♦ Déterminer la sollicitation de la goupille conique 11 et calculer les contraintes maximales engendrées.
- ♦ Quel mode de détérioration doit-on éviter entre les surfaces en contact de cette liaison encastrement ? Indiquer la zone à risque. Déterminer la valeur du paramètre nécessaire pour que cette détérioration ne soit pas atteinte.

4.5 Sollicitations dans l'articulation à chape levier simple 6-bielle 7 et modes de détérioration

- ♦ Indiquer les modes de détérioration possibles d'une joue de chape et les zones à risque.
- ♦ Déterminer les paramètres nécessaires pour vérifier que ces détériorations ne soient pas atteintes.

4.6 Sollicitations dans le tube de la bielle de gouvernail 7

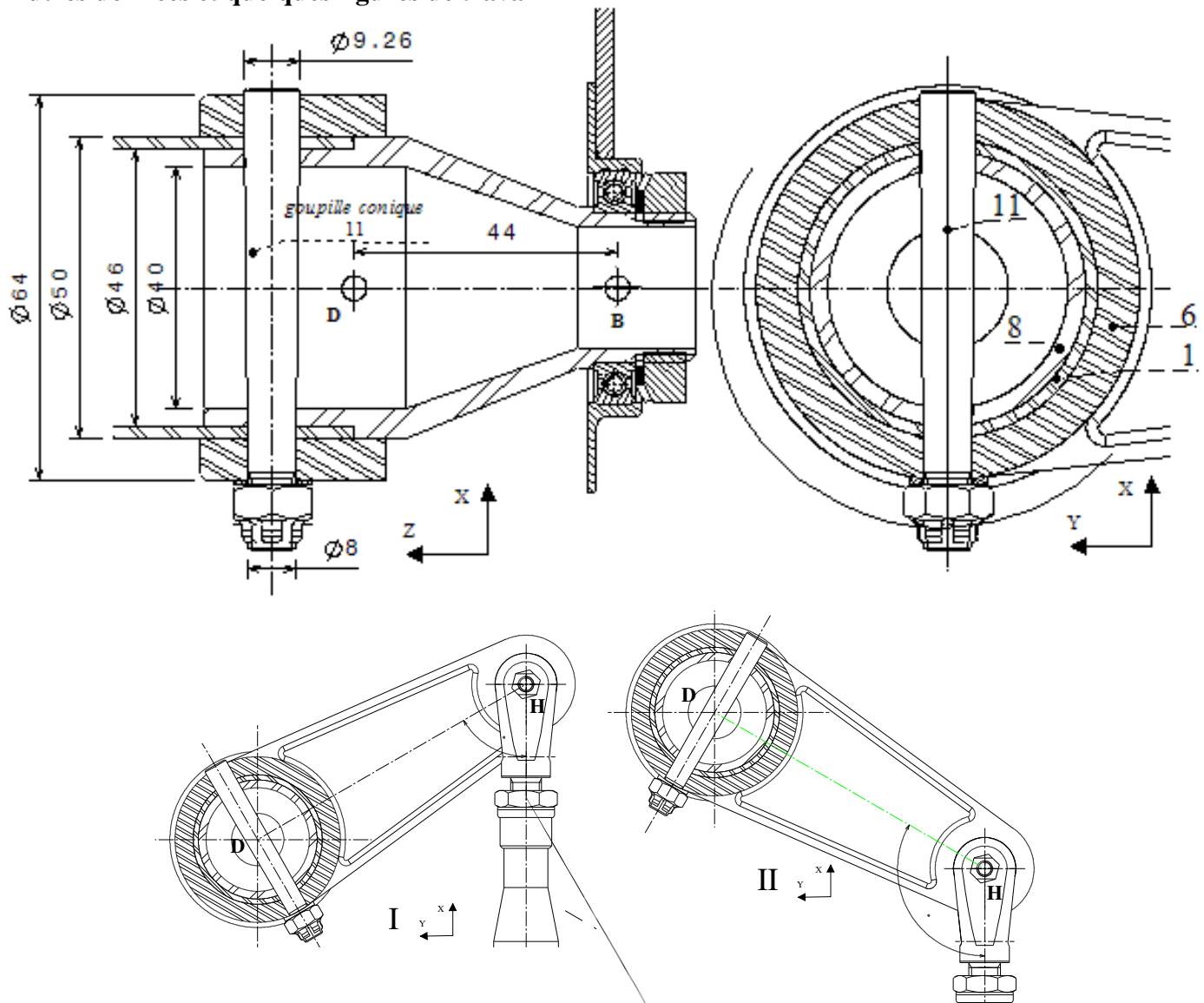
- ♦ Déterminer la sollicitation qui risque d'engendrer la ruine de la bielle de longueur 1100 mm ainsi que l'épaisseur du tube $\varnothing 25$ de la bielle (choix : épaisseur 1 ou 1.6 ou 2 mm).

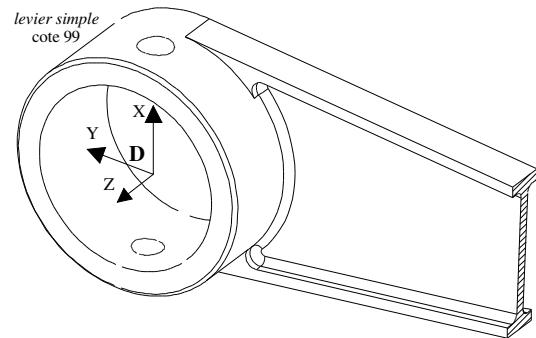
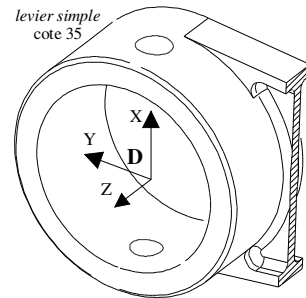
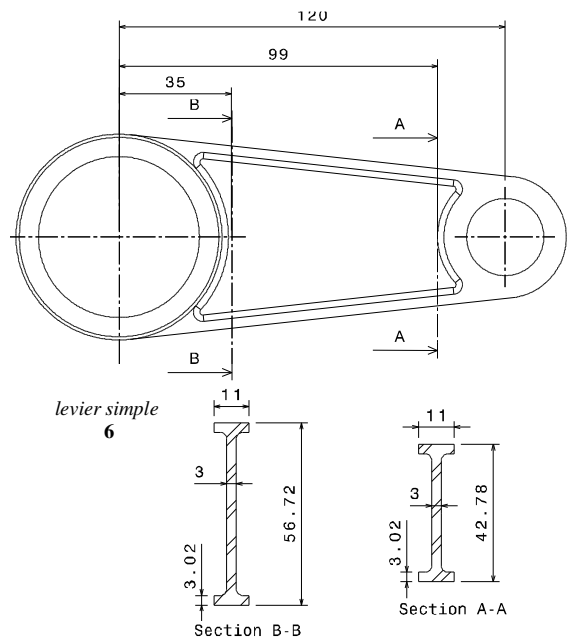
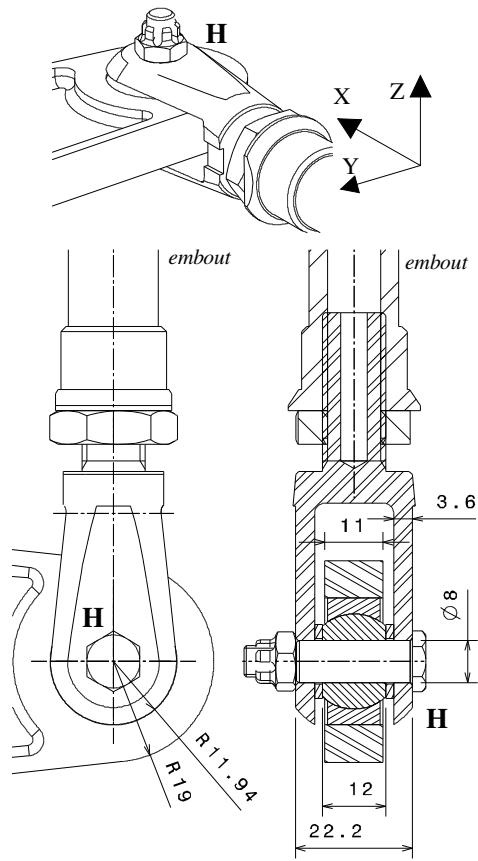
4.7 Liaison encastrement embout creux et le tube de bielle de gouvernail 7

L'embout creux réglable et le tube de bielle sont en liaison encastrement réalisée par deux rivets creux disposés radialement.

- ♦ Déterminer les dimensions des rivets (choix : \varnothing ext 4 et ep. $e=0.75$; \varnothing ext 5 et ep. $e=0.75$; \varnothing ext 6 et ep. $e=1$).

Autres données et quelques figures de travail





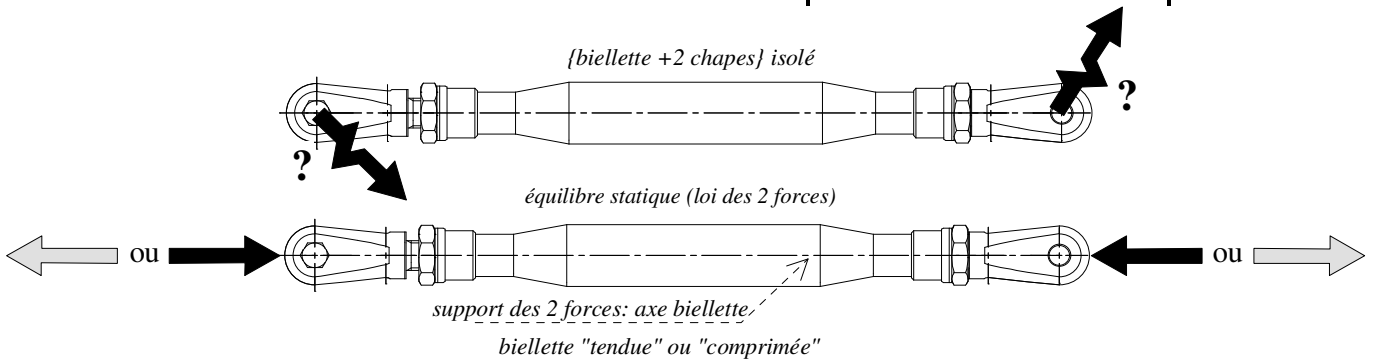
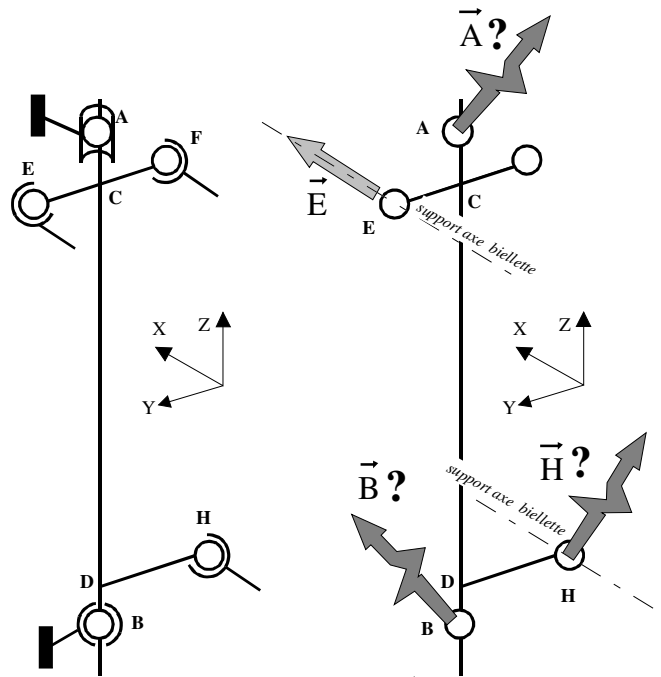
ELEMENTS DE CORRECTION

41- Etude statique du dispositif

→ Le dispositif est en liaison pivot par rapport au bâti, cette liaison est réalisée technologiquement par deux paliers, cet ensemble sera modélisé par des poutres (lignes moyennes) associé à deux liaisons usuelles, par exemple en B liaison rotule et en A liaison linéaire annulaire (le dispositif est alors isostatique). Les liaisons entre les biellettes et les leviers sont naturellement modélisées par des rotules E, F et H.

→ ensemble {1,2,3,8,6,11} isolé

Remarque : en préliminaire à l'étude de l'équilibre statique de cet ensemble, il est judicieux d'étudier les équilibres partiels des deux biellettes 5 et 7 afin de diminuer le nombre d'inconnues scalaires dans l'étude de l'équilibre de cet ensemble isolé. En effet ces équilibres font apparaître qu'elles sont soumises à deux forces (biellettes avec rotules aux deux extrémités). L'application de la « loi des 2 forces » entraîne que les supports de ces forces sont portés par les axes des biellettes parallèles à l'axe X. Ces biellettes sont donc sollicitées en traction ou en compression.



→ bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé

en E liaison rotule : $\{F_E\}_{E,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = +6750\vec{X} \\ \vec{M}_E = \vec{0} \end{array} \right\}_{E,R}$; en B liaison rotule : $\{F_B\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = X_B\vec{X} + Y_B\vec{Y} + Z_B\vec{Z} \\ \vec{M}_B = \vec{0} \end{array} \right\}_{B,R}$

en A liaison linéaire annulaire :

$\{F_A\}_{A,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = X_A\vec{X} + Y_A\vec{Y} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{array} \right\}_{A,R}$; en H liaison rotule : $\{F_H\}_{H,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = X_H\vec{X} \\ \vec{M}_H = \vec{0} \end{array} \right\}_{H,R}$

⇒ 6 inconnues algébriques

→ application du principe fondamental de la statique

$$\sum (\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{H} + \vec{E} = \vec{0}$$

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) / \vec{B} = \vec{BA} \wedge \vec{A} + \vec{BE} \wedge \vec{E} + \vec{BH} \wedge \vec{H} = \vec{0}$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & 0 & +488 \\ X_A & Y_A & 0 \end{bmatrix} = -488Y_A \vec{X} + 488X_A \vec{Y} ;$$

$$\vec{BE} \wedge \vec{E} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & +80 & +444 \\ +6750 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +299700\vec{Y} - 540000\vec{Z}$$

$$\vec{BH} \wedge \vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & -120 & +44 \\ X_H & 0 & 0 \end{bmatrix} = +44X_H \vec{Y} + 120X_H \vec{Z}$$

équations de projection dans XYZ

forces

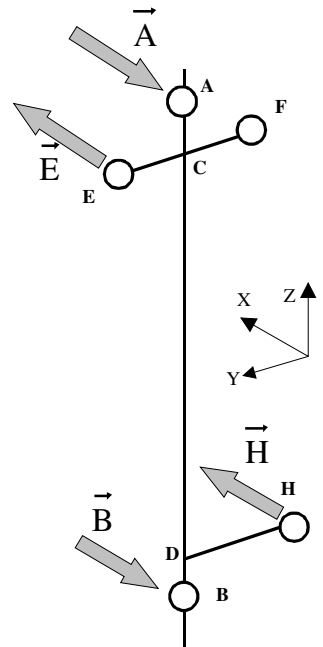
$$\begin{aligned} / X : +6750 + X_H + X_B + X_A &= 0 \\ / Y : Y_A + Y_B &= 0 \\ / Z : Z_B &= 0 \end{aligned}$$

moments

$$\begin{aligned} / X : -488Y_A &= 0 \\ / Y : 488X_A + 44X_H + 299700 &= 0 \\ / Z : -540000 + 120X_H &= 0 \end{aligned}$$

résultats :

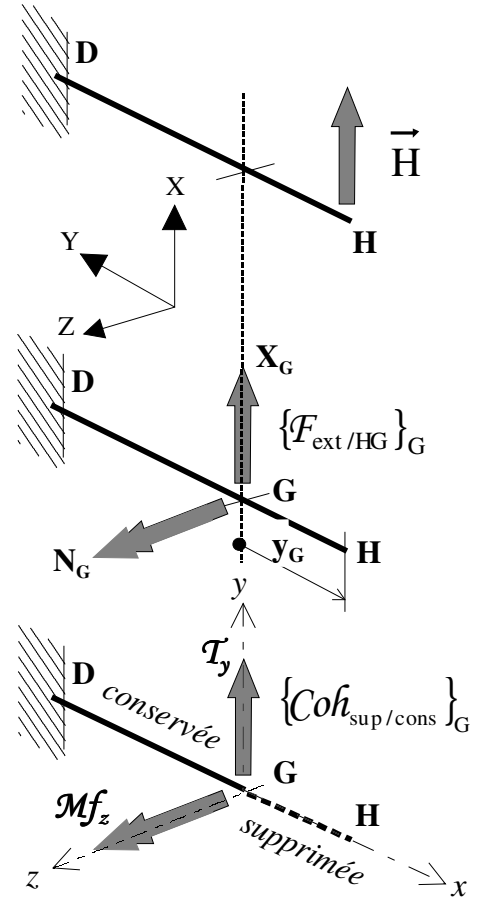
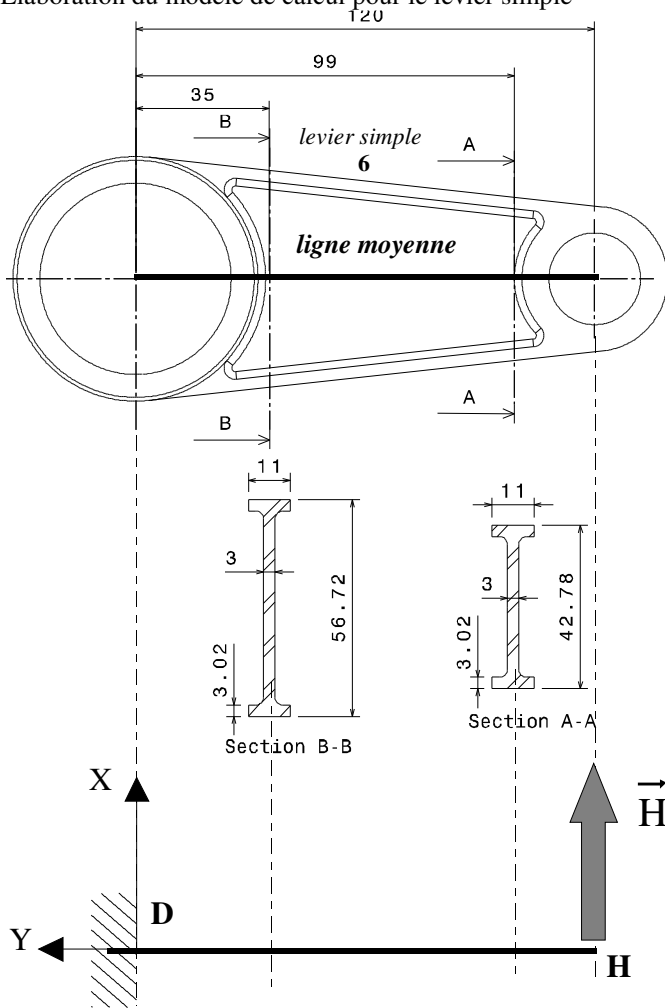
$$\vec{H} \Rightarrow \begin{cases} X_H = 4500 \\ Y_H = 0 \\ Z_H = 0 \end{cases} \quad \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -6547,1 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 0 \end{cases} \quad \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -4702,9 \\ Y_B = 0 \\ Z_B = 0 \end{cases}$$



42-Sollicitations dans le levier simple 6

→ Modélisation

Elaboration du modèle de calcul pour le levier simple



● Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon HG exprimé au point G (on pose $\overrightarrow{GH} = y_G \vec{Y}$ avec $y_G < 0$)

$$\{F_{\text{ext}/HG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = \vec{H} \\ \vec{M}_G = \overrightarrow{GH} \wedge \vec{H} \end{array} \right\}_{G,R}$$

$$\overrightarrow{GH} \wedge \vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & y_G & 0 \\ +4500 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -4500 \times y_G \vec{Z} ;$$

$$\Rightarrow \{F_{\text{ext}/HG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = +4500 \vec{X} \\ \vec{M}_G = -(4500 \times y_G) \vec{Z} \end{array} \right\}_{G,R}$$

◆ torseurs de cohésion :

Eléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section droite entre D et H avec :

- partie supprimée HG ; partie conservée GD (compte tenu du choix de l'expression du torseur précédent)

- axe local \vec{x} : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée

- changement de base : Local (r) au Global (R) :

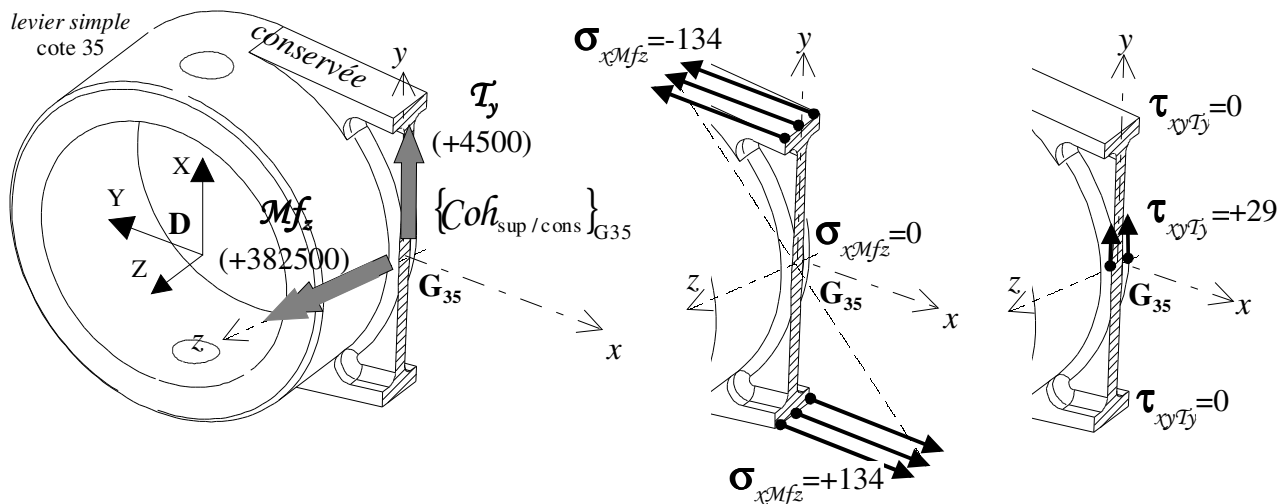
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{array} \right\}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array} \right\}_r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{X} = \vec{y} \\ \vec{Y} = -\vec{x} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{Coh_{\text{sup/cons}}\}_G = \{F_{\text{ext}/HG}\}_G$$

Pour la suite, il convient d'exprimer \overrightarrow{GH} ("bras de levier") en repère local pour obtenir l'évolution du moment de flexion (diagramme) le long de la ligne moyenne de la poutre, soit $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DG} = (120 - x_G) \vec{x} \Rightarrow Mf_z = +4500 \times (120 - x_G)$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = 0 & M_t = 0 \\ T_y = +4500 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = +4500 \times (120 - x_G) \end{array} \right\}_{G,r}$$

◆ Contraintes engendrées par les éléments de réduction du torseur de cohésion dans deux sections droites
- section à la cote 35 :



pour l'abscisse $x_G = +35$:

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{G_{35}} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = 0 & M_t = 0 \\ T_y = +4500 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = +382500 \end{array} \right\}_{G_{35},r}$$

◆ moment de flexion $M_t \Rightarrow$ sollicitation de flexion avec contraintes normales

$$\sigma_{x \max} = -\frac{Mf_z}{I_{zz}} \times \pm y_{\max} = -\frac{+382500}{80491} \times \pm 28,36 = \mp 134,77 \text{ MPa}$$

◆ effort tranchant $T_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles

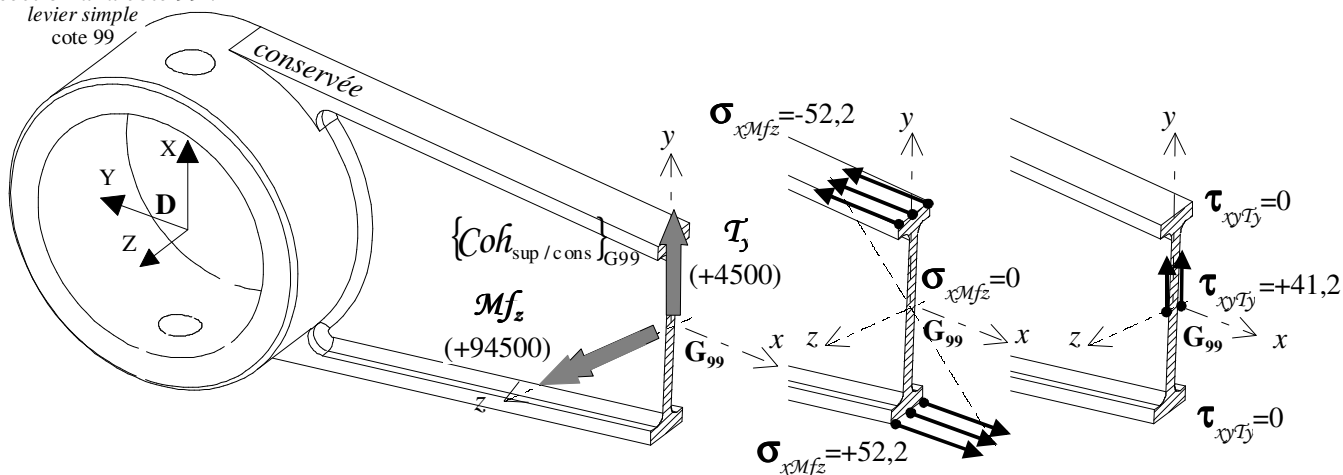
Dans la théorie des poutres, pour une sollicitation de flexion avec effort tranchant dans une section droite en I, on

montre: $\tau_{xy \max} = \frac{T_y}{S_r}$ avec la section réduite

$$S_r = S_{\text{âme}} \Rightarrow \tau_{xy \max} = \frac{T_y}{S_{\text{âme}}} = \frac{+4500}{152,04} = +29 \text{ MPa}$$

(en mécanique la prise en compte des effets de l'effort tranchant dans les poutres est souvent négligée)

- section à la cote 99 :



pour l'abscisse $x_G = +99$:

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{G_{99}} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = 0 & M_t = 0 \\ T_y = +4500 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = +94500 \end{array} \right\}_{G_{99},r}$$

◆ moment de flexion $Mf_z \Rightarrow$ sollicitation de flexion avec contraintes normales

$$\sigma_{x \max} = -\frac{Mf_z}{I_{zz}} \times \pm y_{\max} = -\frac{+94500}{38706,7} \times \pm 21,39 = \mp 52,2 \text{ MPa}$$

(moment quadratique du rectangle enveloppe du I auquel on soustrait les deux moments quadratiques des petits rectangle de part et d'autre de l'âme)

◆ effort tranchant $T_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles

Pour une sollicitation de flexion avec effort tranchant dans section droite en I on montre en théorie des

poutres: $\tau_{xy \max} = \frac{T_y}{S_r}$, avec la section réduite

$$S_r = S_{\text{âme}} \Rightarrow \tau_{xy \max} = \frac{T_y}{S_{\text{âme}}} = \frac{+4500}{109,14} = +41,2 \text{ MPa}$$

(en mécanique la prise en compte des effets de l'effort tranchant dans les poutres est souvent négligée)

→ condition de résistance : critère de la contrainte équivalente selon Von Mises : il s'écrit pour les valeurs des contraintes maximales relevées dans les deux sections: $\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\sigma^2 + 3(\sigma_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \leq Re$

L'application de ce critère ne présente pas d'intérêt compte tenu que dans une même section droite, les points de la section où σ_x est maximale on a τ_{xy} est nulle et vice versa. Sans tenir compte de la réglementation ou d'un coefficient de sécurité, il suffit donc de vérifier simplement que $\sigma_{x \text{ max}} \leq Re$ ainsi que $\tau_{xy \text{ max}} \leq Re g$

→ condition de rigidité pour la section droite à la cote 99

Déplacements engendrés :

- moment de flexion $\mathcal{M}f_z \Rightarrow$ relation de comportement au moment de flexion $\mathcal{M}f_z = E \times I_z \frac{d\theta_z}{dx} \cong E \times I_z \frac{d^2v}{dx^2}$

Soit à appliquer à la poutre-levier simple la relation $\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{d\mathcal{M}f_z}{E \times I_{zz}} \cong \frac{d^2v}{dx^2}$ avec $I_{zz} = C^{\text{te}} = 38706,7 \text{ mm}^4$ le long de la poutre , on prend cette valeur qui est la plus pénalisante pour le déplacement recherché à la cote 99

Par l'écriture de deux primitives successives de cette relation $\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{+4500 \times (120 - x_G)}{70000 \times 38706,7}$, on peut alors calculer l'angle de rotation de section θ_z autour de l'axe z et ensuite la flèche v suivant l'axe y.

◆ 1° primitive :

- pente de la ligne élastique (ou angle de rotation de section autour de l'axe z) : $\frac{dv}{dx} \cong \theta_z = \frac{+4500 \times (120 \times x_G - x_G^2 / 2)}{70000 \times 38706,7} + C_1$;

- à l'encastrement D, $x_G = 0$, l'angle de rotation est nul donc $C_1 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} \cong \theta_z = \frac{+4500 \times (120 \times x_G - x_G^2 / 2)}{70000 \times 38706,7}$

- angle de rotation de section autour de l'axe z pour l'abscisse $x_G = 99$:

$$\theta_{z99} = \frac{+4500 \times (120 \times 99 - 99^2 / 2)}{70000 \times 38706,7} = +0,0115 \text{ rad} = +0,66^\circ$$

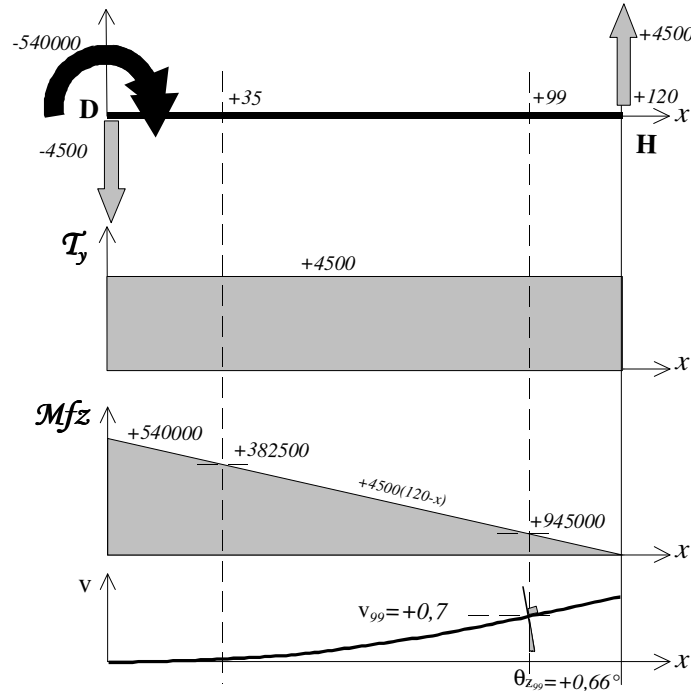
◆ 2° primitive :

- équation de la ligne élastique : $v(x) = \frac{+4500 \times (120 \times x_G^2 / 2 - x_G^3 / 6)}{70000 \times 38706,7} + C_2$

- à l'encastrement D, $x_G = 0$, la flèche est nulle donc $C_2 = 0 \Rightarrow v(x) = \frac{+4500 \times (120 \times x_G^2 / 2 - x_G^3 / 6)}{70000 \times 38706,7}$

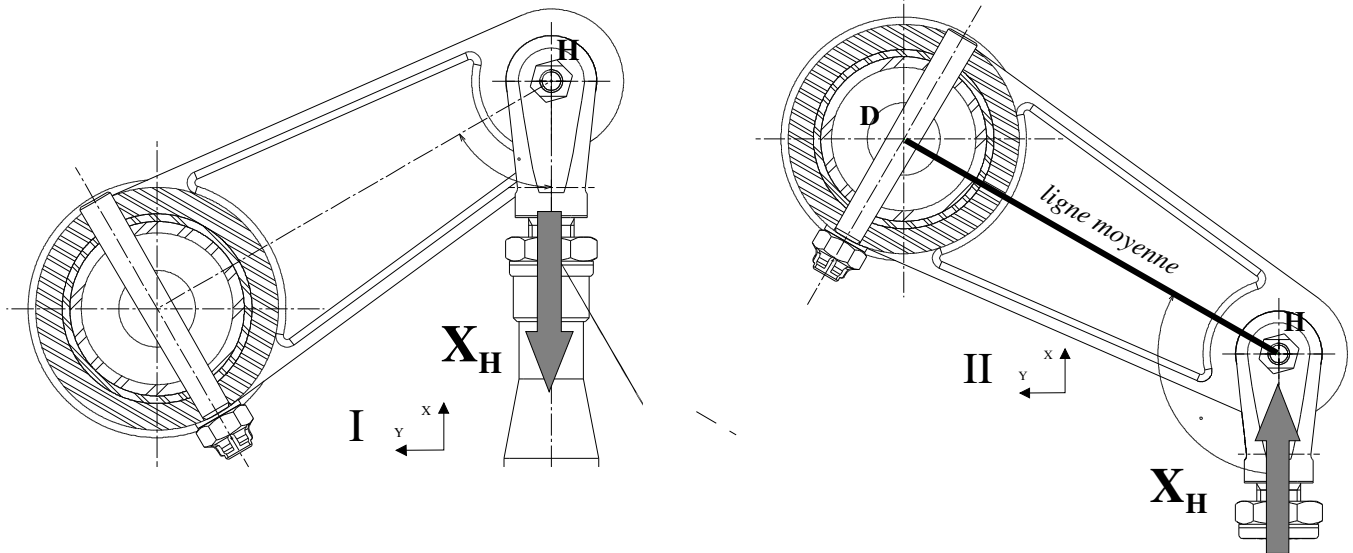
- flèche v suivant l'axe y pour l'abscisse $x_G = 99$, $v_{99} = \frac{+4500 \times (120 \times 99^2 / 2 - 99^3 / 6)}{70000 \times 38706,7} = +0,7$

→ Synthèse : diagrammes des évolutions et des effets des éléments de réduction du torseur de cohésion dans le levier simple



On peut vérifier l'expression de l'effort tranchant en fonction de la dérivée du moment de flexion : $T_y = -\frac{d\mathcal{M}f_z}{dx} = -(-4500)$

→ Etude du comportement du levier 6 pour les deux configurations cinématiques extrêmes
 - biellette 5 sollicitée



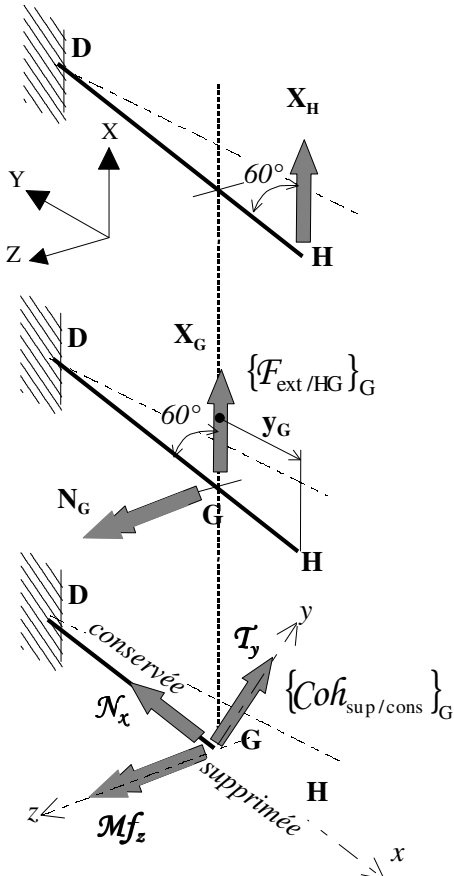
Le calcul X_H est issu de l'équilibre axial des moments /Z de l'ensemble isolé:

- configuration I : $+6750 \times 80 \times \cos 30^\circ - \|\vec{H}\| \times 120 \times \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow X_H = -4500$

- configuration II : $-6750 \times 80 \times \cos 30^\circ + \|\vec{H}\| \times 120 \times \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow X_H = +4500$

→ Modélisation

modèle poutre pour calculer les contraintes à la cote 35 de la configuration II



● Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon HG exprimé au point G (on pose $\vec{GH} = x_G \vec{X} + y_G \vec{Y}$ avec $x_G < 0$ et $y_G < 0$)

$$\{F_{ext/HG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = \vec{H} \\ \vec{M}_G = \vec{GH} \wedge \vec{H} \end{array} \right\}_{G,R}$$

$$\vec{GH} \wedge \vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ x_G & y_G & 0 \\ +4500 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -4500 \times y_G \vec{Z} ;$$

$$\Rightarrow \{F_{ext/HG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = +4500 \vec{X} \\ \vec{M}_G = -(4500 \times y_G) \vec{Z} \end{array} \right\}_{G,R}$$

◆ Torseurs de cohésion :

Eléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section droite entre D et H avec :

- partie supprimée HG ; partie conservée GD (compte tenu du choix de l'expression du torseur précédent)

- axe local \vec{x} : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée

- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -\cos 60^\circ & +\sin 60^\circ & 0 \\ -\sin 60^\circ & -\cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} -\cos 60^\circ \vec{x} + \sin 60^\circ \vec{y} \\ -\sin 60^\circ \vec{x} - \cos 60^\circ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \{F_{ext/HG}\}_G$$

pour l'abscisse $x_G = +35$:

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{G35} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = -2250 & M_t = 0 \\ T_y = +3897,1 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = +331254,7 \end{array} \right\}_{G35,r}$$

◆ effort normal $N_x \Rightarrow$ sollicitation de compression avec contraintes normales

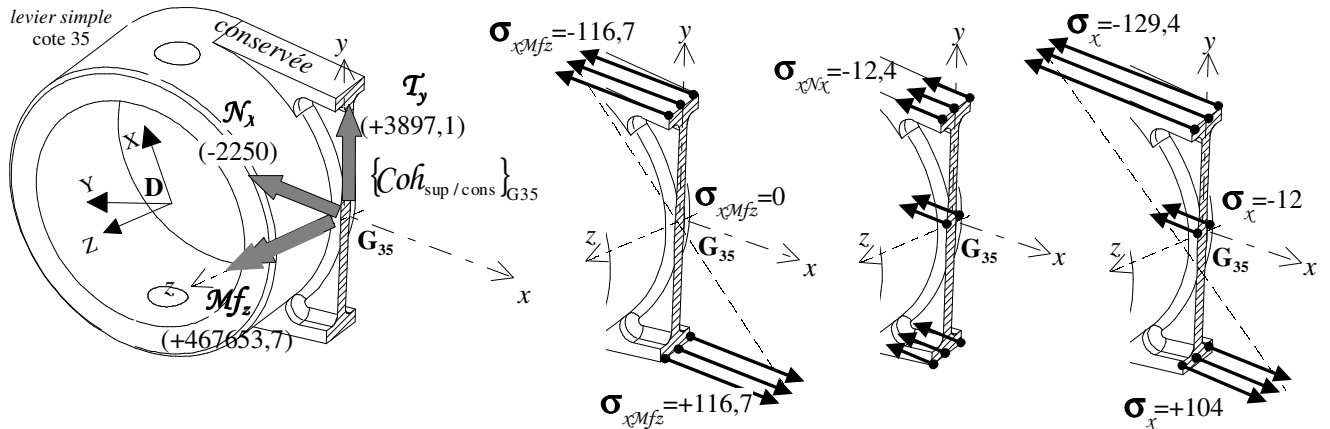
$$\sigma_{x \max} = \frac{N_x}{S} = \frac{-2250}{176,2} = -12,7 \text{ MPa}$$

◆ moment de flexion $Mf_z \Rightarrow$ sollicitation de flexion avec contraintes normales

$$\sigma_{x \max} = -\frac{Mf_z}{I_{zz}} \times \pm y_{\max} = -\frac{+331254,7}{80491} \times \pm 28,36 = \mp 116,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x \max \text{ compression}} = \sigma_{xN_x} + \sigma_{xMf_z} = -116,7 - 12,7 = -129,4 \text{ MPa (somme algébrique)}$$

$$\sigma_{x \max \text{ traction}} = \sigma_{xN_x} + \sigma_{xMf_z} = +116,7 - 12,7 = +104 \text{ MPa}$$



43-Sollicitations dans le tube vertical entre C et D

➔ Modélisation

On reprend le modèle de calcul élaboré pour l'étude statique

- Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon AG exprimé au point G (on pose $\vec{GA} = z_G \vec{Z}$ avec $z_G > 0$)

$$\{F_{\text{ext}/AG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = \vec{A} + \vec{E} \\ \vec{M}_G = \vec{GA} \wedge \vec{A} + \vec{GE} \wedge \vec{E} \end{array} \right\}_{G,R}$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & 0 & z_G \\ -6547,1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -6547,1 \times z_G \vec{Y}$$

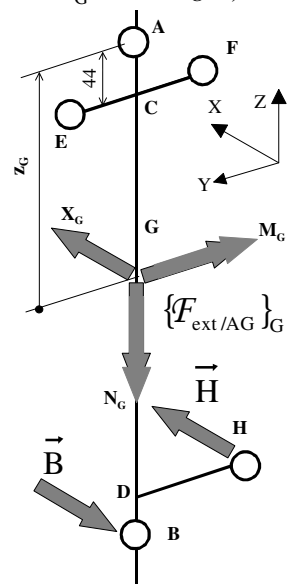
$$\vec{GE} \wedge \vec{E} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & +80 & z_G - 44 \\ +6750 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +(6750 \times z_G - 297000) \vec{Y} - 540000 \vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{F_{\text{ext}/AG}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = +202,9 \vec{X} \\ \vec{M}_G = +(202,9 \times z_G - 297000) \vec{Y} - 540000 \vec{Z} \end{array} \right\}_{G,R}$$

On peut remarquer que la composante M_G sur \vec{Y} du moment est maxi pour $z_G = +44$ (point C :

$$\vec{GE} \wedge \vec{E} = -540000 \vec{Z}) \text{ soit } M_G = -288072,4$$

$$\text{soit } \{F_{\text{ext}/AG}\}_{G=C} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = +202,9 \vec{X} \\ \vec{M}_G = -288072 \vec{Y} - 540000 \vec{Z} \end{array} \right\}_{G=C,R}$$



◆ torseur de cohésion :

- éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section droite entre C et D

- partie supprimée AG ; partie conservée GD (compte tenu du choix de l'expression du torseur précédent)

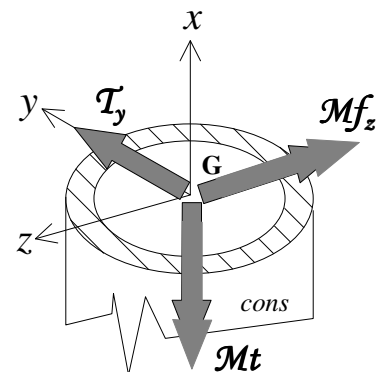
- axe local \vec{x} : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée

- changement de base : Local (r) au Global (R) :

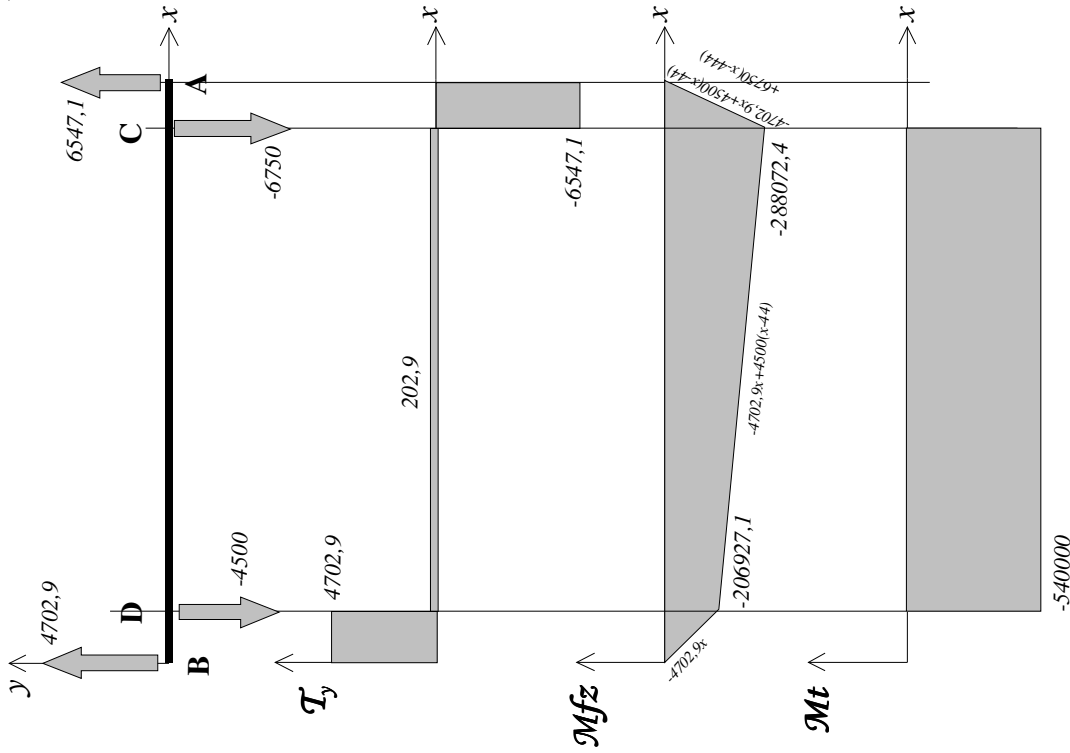
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{array} \right\}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array} \right\}_r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{X} = \vec{y} \\ \vec{Y} = \vec{z} \\ \vec{Z} = \vec{x} \end{array} \right\}, \{Coh_{\text{sup/cons}}\}_G = \{F_{\text{ext}/AG}\}_G$$

$$\{Coh_{\text{sup/cons}}\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = 0 & M_t = -540000 \\ T_y = +202,9 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = -288072,4 \end{array} \right\}_{G,r}$$

afin que le moment de flexion soit maxi, on a pris G en C



➔ Diagrammes des évolutions des éléments de réduction du torseur de cohésion dans le tube (efforts extérieurs dans un plan parallèle à XZ)



On peut vérifier les expressions des équations de l'effort tranchant le long de la ligne moyenne des 3 tronçons pour des sections droites d'abscisse x

$$BD \Rightarrow \tau_y = -\frac{dM_{fz}}{dx} = -(-4702,9) ; DC \Rightarrow \tau_y = -\frac{dM_{fz}}{dx} = -(202,9) ; CA \Rightarrow \tau_y = -\frac{dM_{fz}}{dx} = -(6547,1)$$

➔ Caractéristiques géométriques de la section circulaire du tube

- aire : $S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi(50^2 - 46^2)}{4} = 301,6 \text{ mm}^2$

- moment quadratique $I_{zz} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi(50^4 - 46^4)}{64} = 87009 \text{ mm}^4$

- moment quadratique polaire $I_0 = 2I_{zz} = 174019 \text{ mm}^4$

➔ Condition de résistance, section droite en C

Contraintes engendrées dans la section droite par les éléments de réduction du torseur de cohésion

◆ effort tranchant $\tau_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles

Pour une sollicitation de flexion avec effort tranchant dans une section circulaire tubulaire, on montre en théorie des poutres:

$$\tau_{xy \max} = \frac{\tau_y}{S_r} \text{ avec la section réduite } S_r = \frac{S}{2}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy \max} = 2 \times \frac{\tau_y}{S} = 2 \times \frac{+202,9}{301,6} = +1,3 \text{ MPa}$$

(valeur de contrainte tangentielle très faible dans ce tronçon du tube, en mécanique la prise en compte des effets de l'effort tranchant dans les poutres est souvent négligée)

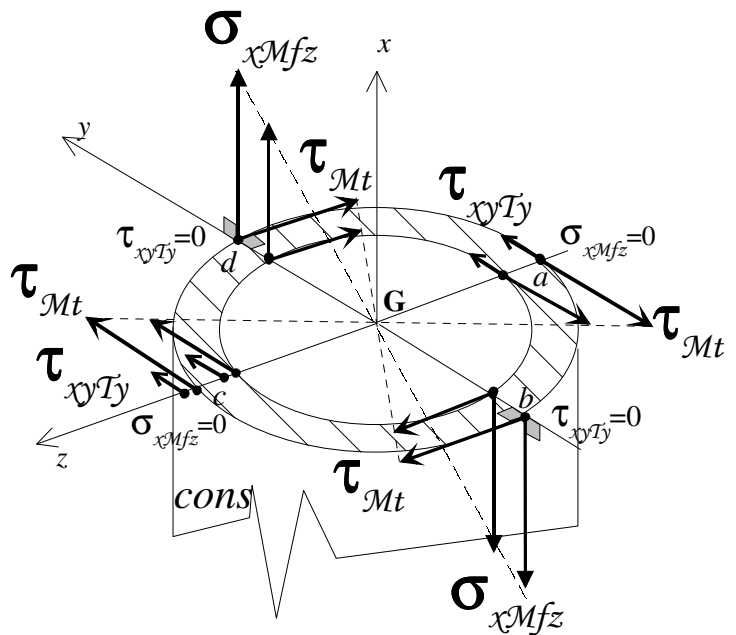
◆ moment de torsion $M_t \Rightarrow$ sollicitation de torsion avec contraintes tangentielles

$$\|\tau\| = \frac{\|M_t\|}{I_0} \times r_{\max} = \frac{540000}{174019} \times 25 = 77 \text{ MPa} \text{ (ici il s'agit de}$$

la norme du vecteur τ , avec une distribution circonférentielle uniforme dans la section droite du tube)

◆ moment de flexion $M_{fz} \Rightarrow$ sollicitation de flexion avec contraintes normales

$$\sigma_{x \max} = -\frac{M_{fz}}{I_{zz}} \times \pm y_{\max} = -\frac{-288072,4}{87009} \times \pm 25 = \pm 82,7 \text{ MPa}$$



Les niveaux de contraintes étant très faibles, la condition de résistance par rapport à la limite élastique est donc largement vérifiée

Toutefois cette condition issue du critère de la contrainte équivalente selon Von Mises, s'écrit :

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\sigma^2 + 3(\sigma_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \leq Re \text{ le point de la section le plus sollicité selon ce critère est le point a ou b}$$

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{82,7^2 + 3 \times 77^2} \leq Re \text{ du matériau du tube}$$

Si l'on ne considère que la sollicitation de cisaillement, le niveau maxi en contraintes tangentielles se situe au point c

$$\tau_{xy \text{ max}} = \tau_{xy T_y} + \tau_{xy M_t} = +1,3 + 77 = +78,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{3 \times 78,3^2} \leq Re \text{ ou dans ce cas particulier } \tau_{xy \text{ max}} = 78,3 \leq Re_g \text{ du matériau du tube}$$

→ Condition de rigidité, section droite en C de la ligne moyenne

Déplacements engendrés

- moment de torsion $M_t \Rightarrow$ à partir de la relation de comportement au moment de torsion $M_t = G \times J \frac{d\theta_x}{dx}$ (soit ici taux de

$$\text{rotation avec } \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{dM_t}{G \times I_O} \text{), avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26923 \text{ MPa.}$$

Le moment de torsion étant constant, on peut calculer directement l'angle de rotation entre les deux sections extrêmes:

$$\theta_{x \text{ CD}} = \frac{M_t}{G \times I_O} \times \ell_{\text{CD}} = \frac{-540000 \times 400}{26923 \times 174019} = -0,046 \text{ rad} \Rightarrow \theta_{x \text{ CD}} = -2,5^\circ$$

On remarque que pour cette structure, c'est la condition de rigidité qui est prépondérante par rapport à la condition de résistance (niveau des contraintes peu élevé, un tube d'épaisseur 1mm suffirait largement). En effet une grande souplesse en torsion du tube serait préjudiciable au pilotage des gouvernes.

- moment de flexion $M_f \Rightarrow$ relation de comportement au moment de flexion $M_f = E \times I_z \frac{d\theta_z}{dx} \cong E \times I_z \frac{d^2v}{dx^2}$

Soit à appliquer la relation $\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{dM_f}{E \times I_{zz}} \cong \frac{d^2v}{dx^2}$ à chaque tronçon.

Par l'écriture de deux primitives successives de cette relation pour chaque tronçon, on peut alors calculer l'angle de rotation de section θ_z autour de l'axe z et ensuite la flèche v suivant l'axe y.

Les calculs manuels étant longs, on utilisera des formulaires ou on appliquera le principe de superposition des effets (voire un outil numérique simple tel que RDM6).

Les rotations de section autour de l'axe z permettent de vérifier si ces valeurs sont compatibles avec les angles de rotulage des roulements rotulés à billes données par le constructeur.

44- Sollicitations dans la liaison encastrement levier simple-tube vertical

En conception aéronautique, les jonctions entre tubes minces sont très souvent réalisées par des goupilles coniques, ce qui permet une mise en position angulaire précise des tubes et un gain de masse.

Sur les figures suivantes, on peut observer les zones où une détérioration par cisaillement (voire une rupture éventuelle) se produirait. On se propose donc de vérifier le dimensionnement de la plus petite section de cette goupille 11 ($\phi 8$).

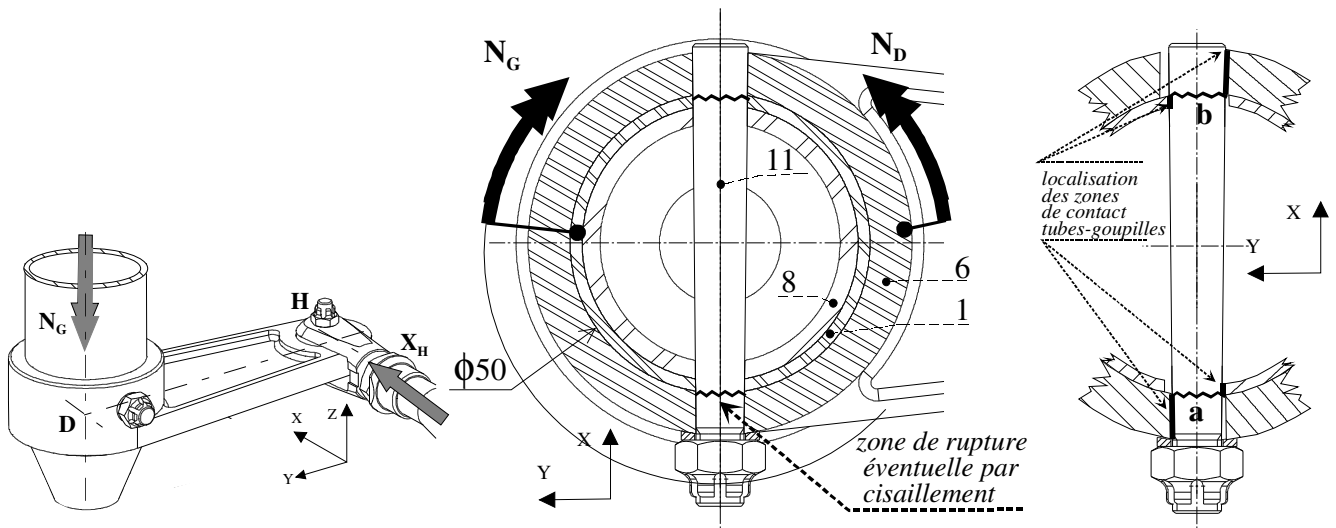
◆ ensemble {tube 1+ levier 6+ goupille 11} isolé (le tourillon 8 ne participant pas à la transmission des efforts dans cet encastrement)

Compte tenu des dispositions constructives de cette liaison encastrement, seuls des moments axiaux sont transmissibles

- équation d'équilibre des moments / Z : $N_G + N_D = 0$

le moment $N_G \vec{Z} = +540000 \vec{Z}$ est donc équilibré par le moment de la force \vec{H} par rapport au point D ($N_D \vec{Z} = -4500 \times 120 \vec{Z}$)

On a représenté de façon amplifiée les zones de contact probable afin de modéliser simplement la transmission des actions mécaniques du tube 1 à la goupille conique 11 et de la goupille 1 conique levier 6.



◆ levier 6 isolé :

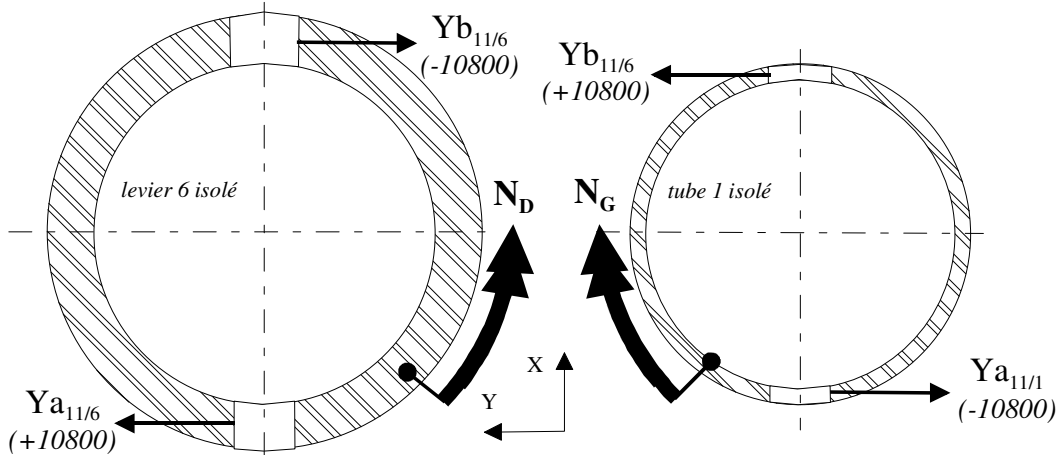
- équation d'équilibre des moments / Z : $+540000 - \|Y_{a_{11/6}} \vec{Y}\| \times 50 = 0$ ou $+540000 - \|Y_{b_{11/6}} \vec{Y}\| \times 50 = 0$

$\Rightarrow Y_{a_{11/6}} = +10800$ et $Y_{b_{11/6}} = -10800$

◆ tube 1 isolé :

- équation d'équilibre des moments / Z : $-540000 + \|Y_{a_{11/1}} \vec{Y}\| \times 50 = 0$ ou $-540000 + \|Y_{b_{11/1}} \vec{Y}\| \times 50 = 0$

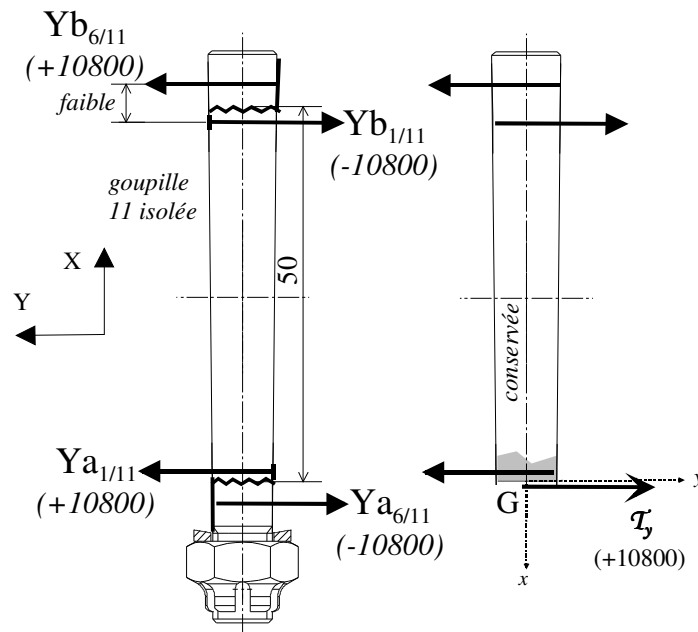
$\Rightarrow Y_{a_{11/1}} = -10800$ et $Y_{b_{11/1}} = +10800$,



Cette modélisation des forces de contact se ramène à deux couples de forces de part et d'autre des zones éventuelles de rupture sur la goupille.

On en déduit donc l'état d'équilibre de la goupille 11 isolée (cf. figure suivante) avec :

- les deux forces s'appliquant sur les deux parties extrêmes de la goupille $Y_{a_{1/11}}$ et $Y_{b_{1/11}}$
- les deux forces s'appliquant sur la partie centrale de la goupille $Y_{a_{6/11}}$ et $Y_{b_{6/11}}$



Pour obtenir une sollicitation de cisaillement seule, dans le modèle de calcul la distance entre les supports des forces situées de part et d'autre de la zone de rupture doit être faible (suppression des effets de flexion).

◆ torseur de cohésion au centre géométrique de la section droite circulaire de la goupille (cf. figure précédente)

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{Ga} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = +10800 & \mathcal{M}_f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}_f_z = 0 \end{array} \right\}_{Ga,r}$$

◆ effort tranchant $\mathcal{T}_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles.

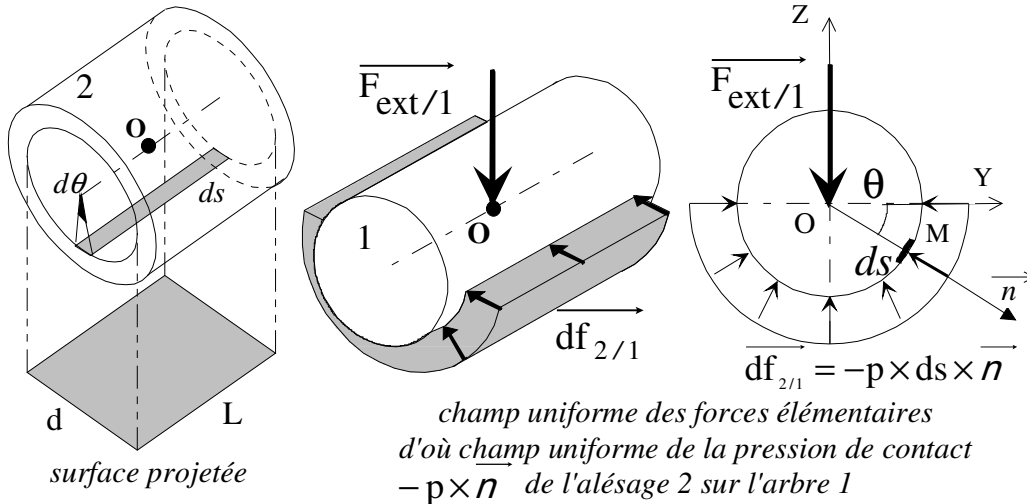
Dans ce cas, la distribution des contraintes est complexe et on se limite à un calcul simple de la contrainte tangentielle

$$\text{moyenne : } \tau_{moy} = \frac{\mathcal{T}_y}{S} = \frac{10800}{\frac{\pi \times 8^2}{4}} = 215 \text{ MPa}$$

◆ condition de résistance $\tau_{moy} = 215 \text{ MPa} \leq Re_g$ du matériau de l'axe, condition vérifiée

→ évaluation du risque de matage au contact goupille tube mince 1

Compléments : mise en évidence de la pression de contact entre un alésage (ou une bague ou un coussinet) et un arbre



■ arbre 1 isolé

■ torseur des actions mécaniques ext./1:

$$\{F_{ext/1}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_O = \vec{F}_{ext/1} = F_{radiale} \vec{Z} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

■ torseur des actions mécaniques de contact de 2/1

$$\{F_{2/1}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{df}_{2/1} \\ \Sigma \vec{OM} \wedge \vec{df}_{2/1} = \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

⇒ expression de la force élémentaire de contact : $\vec{df}_{2/1} = - \underset{\substack{\text{pression} \\ \text{de contact}}}{p} \times ds \times \vec{n}$

(ou \vec{n} est la normale sortante à la matière de ds appartenant au solide isolé, ici 1)

⇒ expression de la surface élémentaire : $ds = L \times \frac{d}{2} \times d\theta$

■ équilibre de l'arbre 1 (principe fondamental de la statique): $\{F_{ext/1}\}_O + \{F_{2/1}\}_O \equiv \{0\}$

■ l'équation de projection des forces / \vec{Z} :

(en préalable projection sur \vec{Z} de la force élémentaire de contact : $\vec{df}_{2/1} \cdot \vec{Z} = (-p \times ds \times \vec{n}) \cdot \vec{Z} = -(p \times \sin \theta \times ds)$)

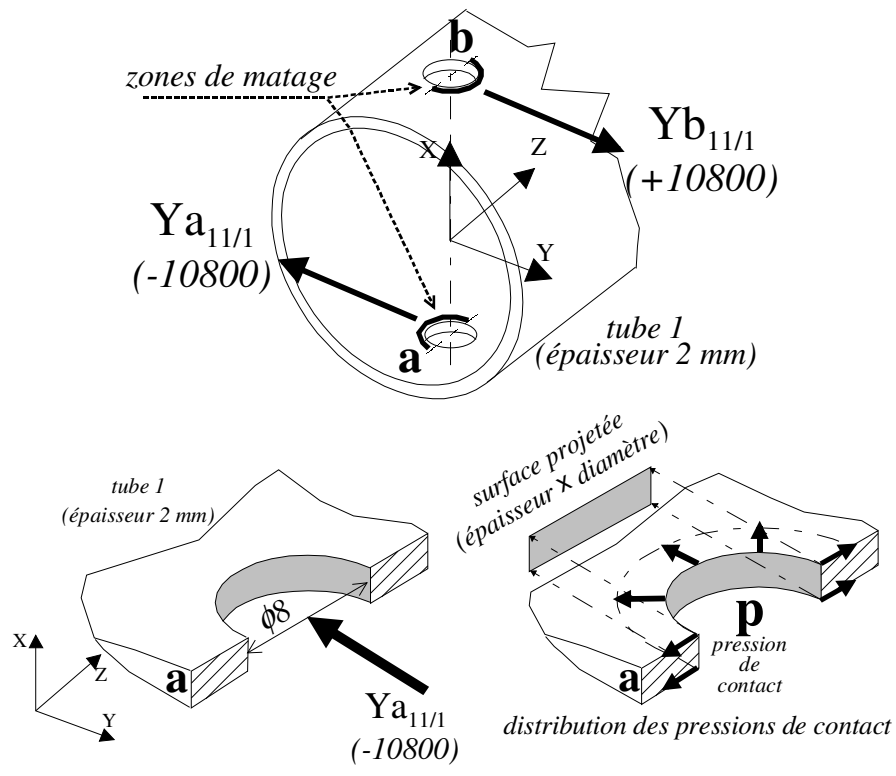
$$- \|\vec{F}_{radiale}\| + p \times L \times \frac{d}{2} \times \int_0^\pi \sin \theta \times d\theta = 0$$

	(N)	
	norme force radiale	
p	=	F_{radiale}
norme pression de contact (MPa ou N/mm ²)		longueur portée × diamètre arbre (mm) (mm)
		surface projetée
	<	p_{adm}
		pression admissible au contact alésage-arbre donnée constructeur (MPa ou N/mm ²)

On peut noter qu'il s'agit d'un emmanchement serré. On prend l'hypothèse simplificatrice d'un assemblage à jeu nul avec une répartition uniforme de la pression de contact sur une demi surface cylindrique : $p = \frac{F_{radiale}}{S_{projetée}} \leq p_{admissible}$

La surface de contact est conique, pour le calcul de la surface projetée on prend alors les caractéristiques d'une surface cylindrique de révolution.

La figure suivante montre la localisation des forces radiales appliquées dans les deux alésages du tube.

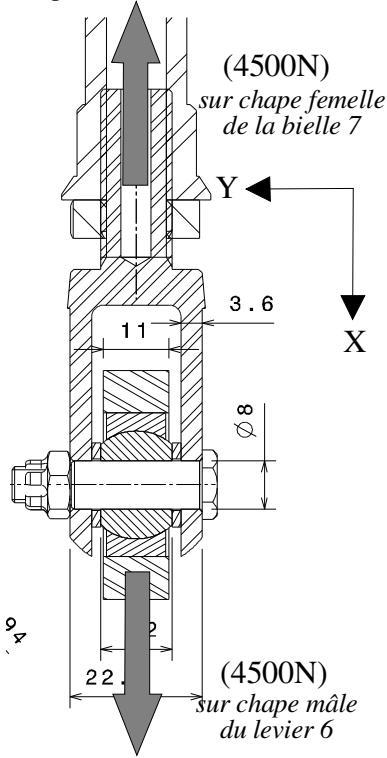


$$p = \frac{10800}{2 \times 8} = 675 \text{ MPa} \leq p_{\text{admissible}} ; \text{ valeur usuelle } p_{\text{adm}} = 1.15 R_e (R_e = 295 \text{ MPa})$$

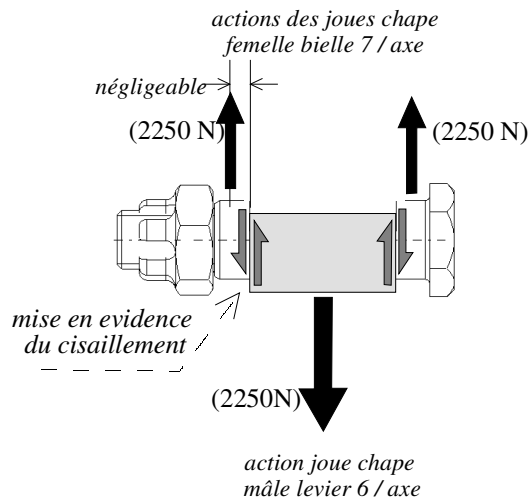
C'est une valeur élevée de pression de contact, il y a matage (déformation permanente) dans l'alésage $\phi 8$ du tube 1 au contact de la goupille 11. Pour éviter ce mode de détérioration il conviendrait de mettre deux goupilles coniques décalées axialement et disposées orthogonalement (solution aéronautique très utilisées garantissant la sécurité, le fail safe ou redondance des solutions)

45- Sollicitations dans l'articulation à chape levier simple 6-bielle 7 et modes de détérioration

- efforts transmissibles dans les composants de l'articulation H



- modèle de calcul simplifié d'efforts transmissibles pour mettre en évidence l'effet de cisaillement sur l'axe (suppression des effets de flexion)

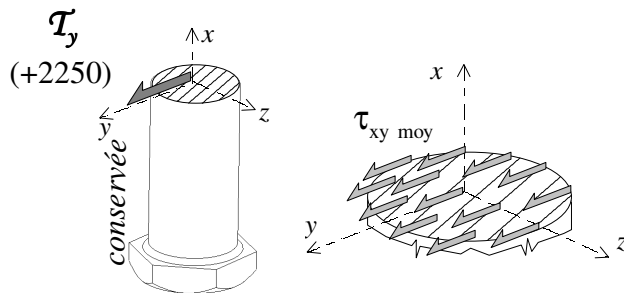


◆ torseur de cohésion au centre géométrique de la section droite de l'axe

$$\{ Coh_{sup/cons} \}_G = \begin{Bmatrix} N_x = 0 & M_t = 0 \\ T_y = +2250 & M_f_y = 0 \\ T_z = 0 & M_f_z = 0 \end{Bmatrix}_{G,r}$$

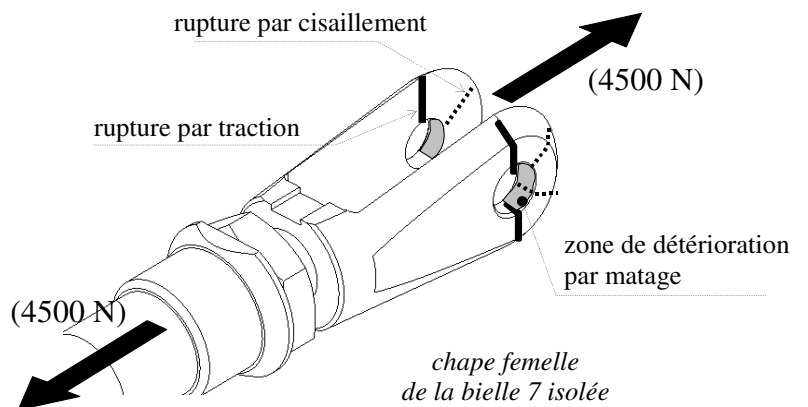
◆ effort tranchant $T_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles

$\tau_{xy moy} = \frac{T_y}{S}$ (la répartition des contraintes dans la section étant complexe on prendra la contrainte tangentielle moyenne)



$$\tau_{xy moy} = \frac{2250}{\frac{\pi 8^2}{4}} = 44,7 \text{ MPa} < Re_g \text{ du matériau de l'axe, condition de résistance vérifiée}$$

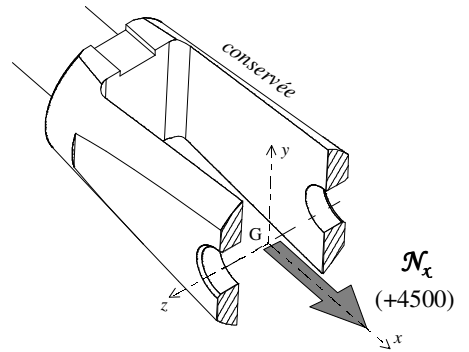
➔ Modes de travail des joues de la chape
A partir des efforts transmis dans une bielle, on peut recenser **trois** modes de détérioration des joues de la chape suivant l'intensité des efforts transmis, les dimensions des joues et le matériau



→ Détérioration par une sollicitation de traction des joues

◆ torseur de cohésion au centre géométrique de la section diamétrale de la chape

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}_x = +4500 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = 0 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = 0 \end{array} \right\}_{G,r}$$

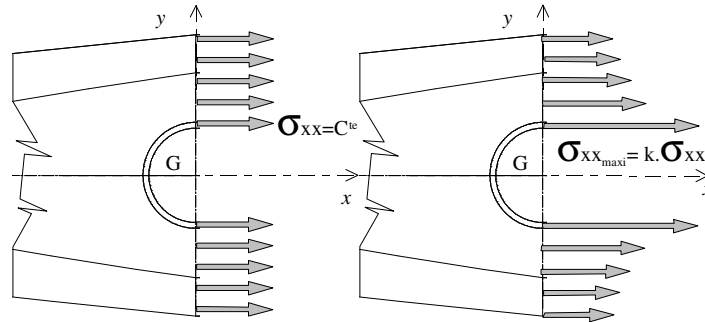


◆ effort normal $\mathcal{N}_x \Rightarrow$ sollicitation de traction avec contraintes normales (distribution uniforme)

$$\sigma_{x \max} = \frac{\mathcal{N}_x}{S} = \frac{+4500}{4 \times (11,94 - 4) \times 3,6} = +39,4 \text{ MPa}$$

- prise en compte du phénomène de concentrations des contraintes normales : $\sigma_{xx \max i} = k \times \sigma_{xx}$

avec k coefficient de concentration des contraintes (fonction des dimensions des joues et déterminé par des essais sur plaque trouée et trou habité par un axe, Cf. abaque du Cetim), pour cette chape : $\sigma_{xx \max i} = 2 \times 39,4 = 78,8 \text{ MPa} \leq Re$ du matériau de la chape, condition de résistance vérifiée



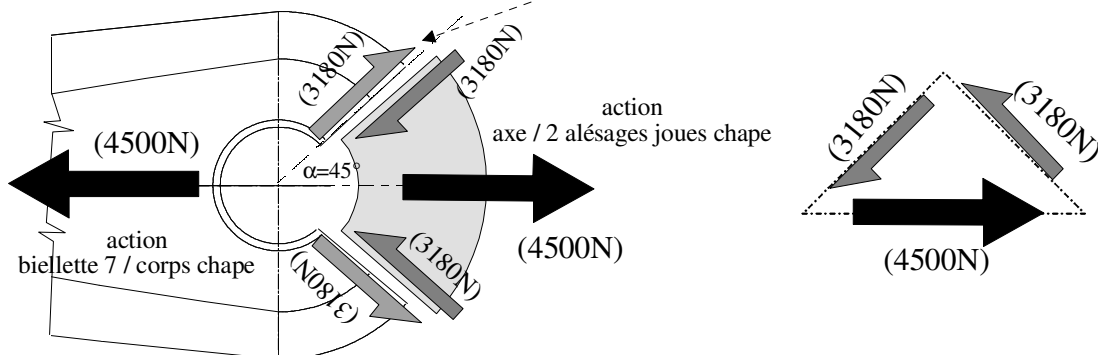
→ Détérioration par une sollicitation de cisaillement (poinçonnement) des joues

- les essais sur des articulations à chape montrent une rupture par poinçonnement de l'extrémité de la joue similaire à la figure ci-dessous (l'angle de 45° est un ordre de grandeur simplifiant les calculs pour les chapes dites centrées);

chape isolée

mise en évidence du cisaillement

équilibre du secteur poinçonné isolé



◆ torseur de cohésion au centre géométrique de la section poinçonnée inférieure de la chape

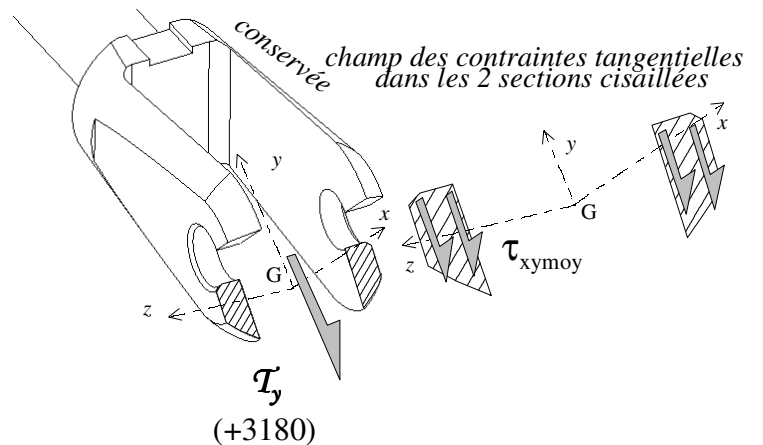
$$\tau_y = 4500 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = +3180$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = 3180 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z \Rightarrow \text{négligé} \end{array} \right\}_{G,r}$$

◆ effort tranchant $\mathcal{T}_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles dans les deux sections cisailées de la chape

$$\tau_{xymoy} = \frac{\mathcal{T}_y}{S} \text{ (la répartition des contraintes dans la section}$$

étant complexe on prendra la contrainte tangentielle moyenne)



$$\tau_{xy\text{moy}} = \frac{3180}{2 \times (11,94 - 4) \times 3,6} = 55,6 \text{MPa} \leq \text{Re g du}$$

matériau de la chape, condition de résistance vérifiée

➔ Détérioration par matage des alésages des joues des chapes femelles au contact des axes

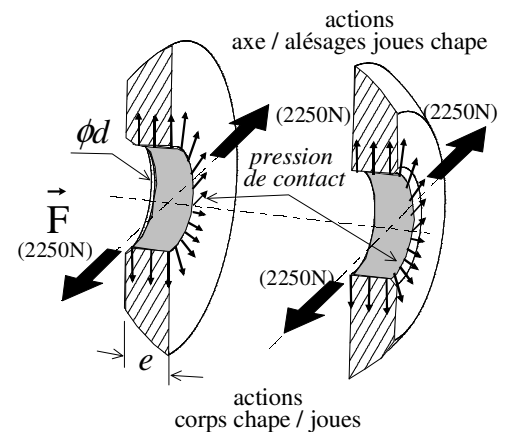
Ce risque de déformation permanente dans l'alésage pouvant altérer le fonctionnement de la liaison pivot est caractérisé par une pression de contact limite admissible p_{adm} (déterminée par des essais).

Pour cette liaison et les matériaux en contact : $p_{admissible\text{matage}} = 0,88 \times R_r$

On considère l'articulation avec un jeu nul (contact de l'axe dans les deux demi-alésages des joues : 180°) et un modèle de répartition radiale uniforme des pressions de contact générée par les actions de l'axe dans les alésages des joues, soit pour **une** joue :

$$p = \frac{F}{S_{projetée}} = \frac{F}{d \times e} = \frac{2250}{3,6 \times 8} = 78 \text{MPa}$$

extrémités de joues de chape isolées

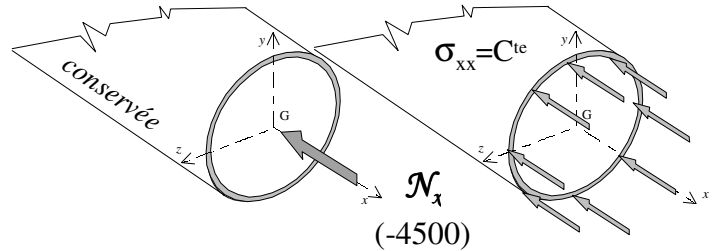


46- Sollicitations dans le tube de la bielle de gouvernail 7

Le tube de la bielle 7 est une structure mince et très élancée, il est sollicité en compression donc se raccourcit (loi de Hooke).

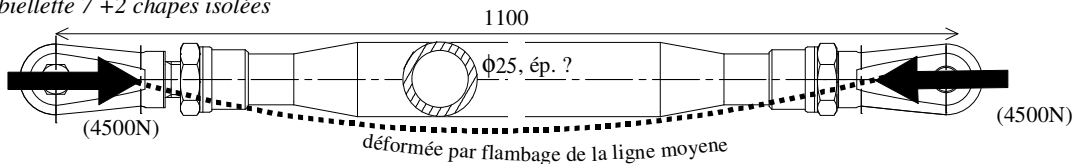
◆ torsion de cohésion au centre géométrique de la section droite du tube

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \begin{cases} N_x = -4500 & M_t = 0 \\ T_y = 0 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = 0 \end{cases}_{G,r}$$



On constate que pour une certaine valeur de la charge, appelée *charge critique*, la bielle fléchit brusquement entraînant sa ruine. L'équilibre en compression est remplacé brusquement par un phénomène de flexion-compression, c'est le flambage.

bielle 7 + 2 chapes isolées



Pour des extrémités articulées (ici deux rotules) de la bielle, on montre que la charge critique de flambage à ne pas dépasser pour éviter la ruine par flambage s'écrit (tube de $\phi 25$ avec une épaisseur de 1,6):

$$F_C = \frac{\pi^2 \times E \times I_{\min i}}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 70000 \times \pi(25,4^4 - 21,8^4)}{1100^2 \times 64} = 4618,1\text{N} \Rightarrow F_C > 4500\text{N}$$

Cette force critique est très proche de l'effort normal de compression (4500N). Il est donc préférable de choisir un tube de bielle ayant une épaisseur 2mm.

47- Liaison encastrement embout creux et le tube de bielle de gouvernail 7

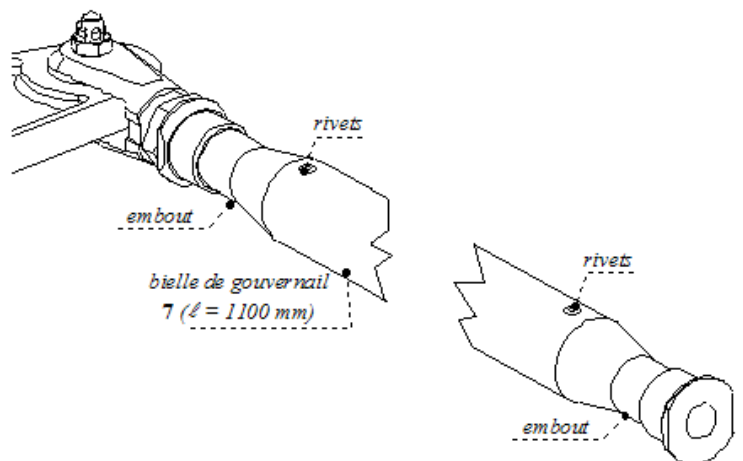
Il s'agit de déterminer la section des deux rivets diamétralement opposés et réalisant la liaison encastrement tube de bielle-embout

Le risque de détérioration de la liaison rivetée est engendré par les deux forces axiales de 4500 N portées par l'axe X

◆ torsion de cohésion au centre géométrique de la section droite d'un rivet (cf. figure suivante)

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \begin{cases} N_x = 0 & M_t = 0 \\ T_y = +2250 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = 0 \end{cases}_{G,r}$$

◆ effort tranchant $T_y \Rightarrow$ sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles.



Dans ce cas, la distribution des contraintes est complexe et on se limite à un calcul simple de la contrainte tangentielle moyenne pour vérifier la condition de résistance :

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{T_y}{S_{\text{rivet}}} \leq \text{Re}_g \text{ du matériau du rivet ; } \text{Reg} \approx 0,6 \times \text{Re}, \text{ donc } \text{Reg} = 177 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{2250}{S_{\text{rivet}}} \leq 177 \Rightarrow S_{\text{rivet}} = 12,7 \text{ mm}^2$$

Section des rivets disponibles

φ 4 - épaisseur 0,75 : $S_{\text{rivet}} : 7,6 \text{ mm}^2$

φ 5 - épaisseur 0,75 : $S_{\text{rivet}} : 10,01 \text{ mm}^2$

φ 6 - épaisseur 1 : : $S_{\text{rivet}} : 15 \text{ mm}^2$ (*rivet choisi*)

