

## FERRURE AERONAUTIQUE

### 1. OBJECTIFS DE L'ETUDE

Sensibiliser à une démarche de dimensionnement et de conception d'une pièce structurale aéronautique en passant successivement par des étapes de pré-dimensionnement utilisant des calculs manuels et de dimensionnement définitif en élaborant un modèle éléments finis. Cette dernière étape permettra une optimisation des formes pour réaliser le difficile compromis entre le *gain de masse*, de *condition de résistance* et *condition de rigidité*.

### 2. MISE EN SITUATION

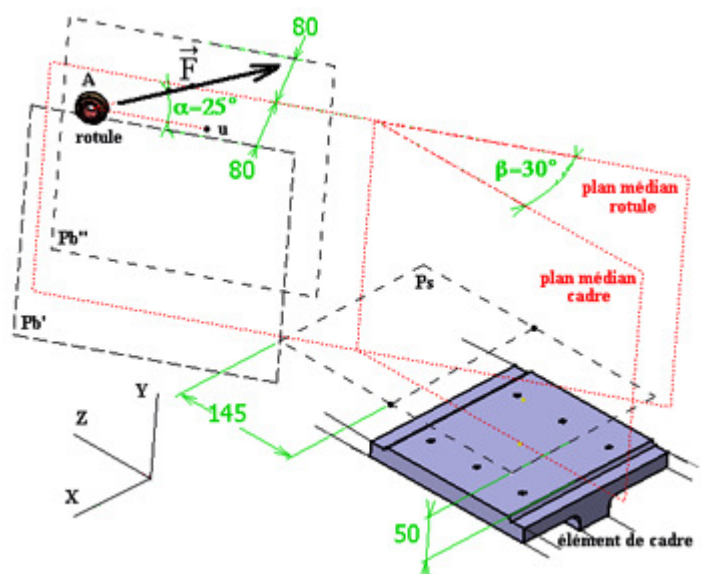
Il s'agit de dimensionner et concevoir une pièce aéronautique désignée par le terme ferrure. Cette ferrure doit reprendre un effort engendré par un vérin de manœuvre de trappe (chape femelle rotulée du vérin au point A) et le transmettre à un cadre.

### 3. CAHIER DES CHARGES DE DIMENSIONNEMENT ET DE CONCEPTION

Cette ferrure aéronautique sera usinée dans la masse à partir d'un brut de titane.

Les espaces disponibles, autour des zones de reprise d'effort, pour insérer cette ferrure sont limités et très contraignants. En effet le concepteur doit :

- utiliser l'implantation existante des trous des boulons ajustés usinés sur un bossage du cadre ;
- tenir compte de la position angulaire particulière ( $\beta = 30^\circ$ ) du plan médian de la rotule par rapport au plan médian du cadre (parallèle au plan YZ) ;
- concevoir une partie de la ferrure dans un espace limité par deux plans parallèles (respectivement  $P_r'$  et  $P_r''$ ) et distants du plan médian de la rotule de 80 mm.
- contraindre la conception autour de la liaison boulonnée dans un espace limité par le bossage d'appui du cadre et le plan  $P_c$  distant de 50 mm tout en laissant le libre accès aux 6 boulons en continuité du bossage du cadre sur une zone de 145 mm



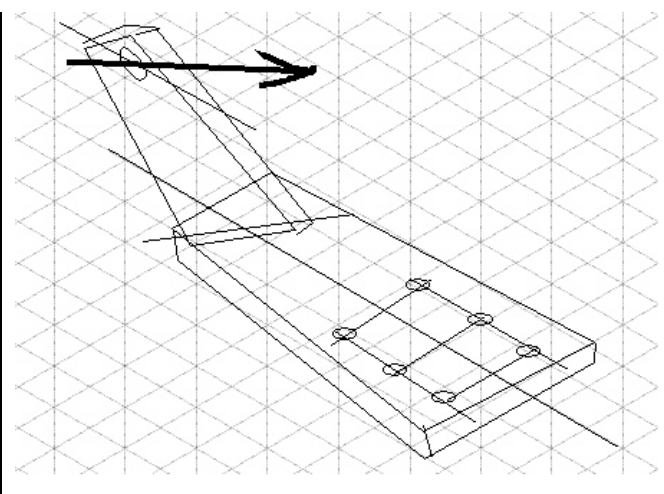
- tenir compte de la configuration retenue de chargement appliqué sur la rotule : effort  $\vec{F}$  estimé à 1000 N dont le support est contenu dans le plan médian de la rotule et orienté par rapport à l'axe  $A_u$  (parallèle au plan XZ) d'un angle  $\alpha = 25^\circ$ .

### 4. PRE-DIMENSIONNEMENT & PRE-CONCEPTION DE LA FERRURE

#### 4.1 Tracé de l'esquisse de la ferrure

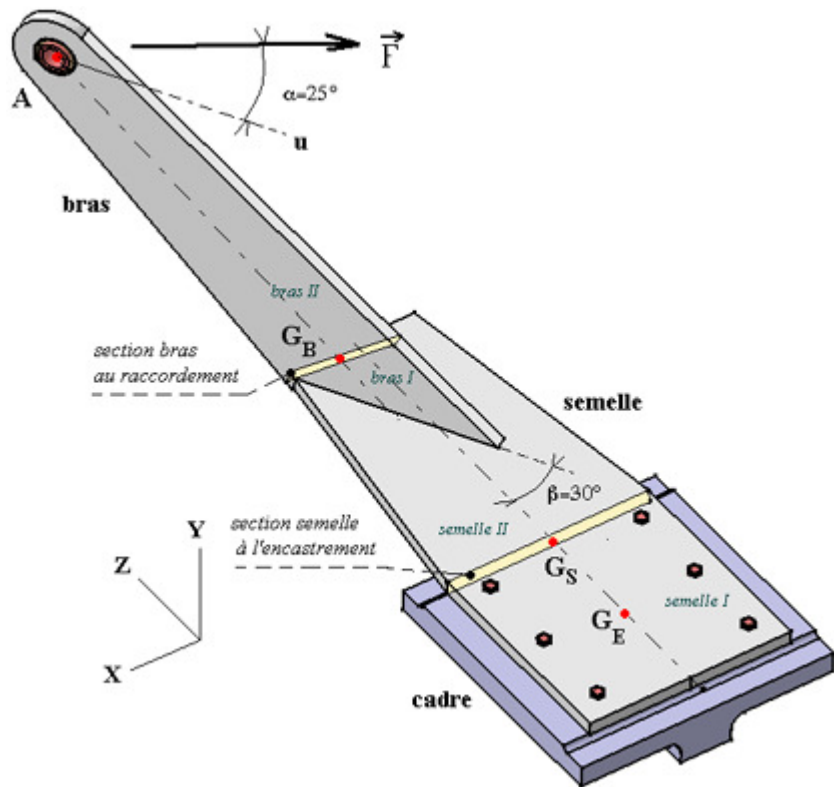
Le concepteur, compte tenu de son expérience dans la conception de ce type de pièce, des espaces disponibles, de la direction générale des efforts et des sollicitations pouvant être engendrées, décide en avant projet de commencer son pré-dimensionnement à partir d'une esquisse de forme de ferrure composée de deux parties de même épaisseur 10 mm (épaisseur minimale de base retenue pour insérer la rotule):

- une semelle réalisant la liaison encastrement avec l'élément de cadre par l'intermédiaire de surfaces planes, la mise en position et le maintien en position sont assurés par 6 boulons ajustés
- un bras s'insérant dans l'espace réservé de part et d'autre du plan médian de la rotule et raccordé sur la semelle, assure la transmission des efforts du logement (alésage de centre A) de la rotule à cette semelle.



A ce stade de la définition de la pièce, ces deux parties sont issues de formes dites d'égalé résistance en flexion. Pour le *bras*, sa section évolutive est orientée pour un axe local où le moment quadratique est maximum permettant ainsi de résister à une sollicitation de flexion majoritaire. Par contre pour la *semelle*, l'implantation des boulons et les contraintes d'accès ne permettent pas une orientation de la section évolutive suivant un axe local pour lequel le moment quadratique est maximum, ceci est partiellement compensé par une dimension transversale importante de cette section.

Cette réflexion sur l'agencement des formes donne lieu à une première modélisation géométrique solide avec des formes et dimensions compatibles avec le cahier des charges.



Par la suite on se propose de réaliser une série de calculs élémentaires permettant de mieux appréhender le comportement élastique de cette ferrure ainsi pré-définie et de vérifier que les sections les plus sollicitées sont suffisamment dimensionnées dans le cadre d'une hypothèse grossière de comportement de *poutre*.

#### 4.2 Données

notations à utiliser :

- pour les éléments de réduction du torseur des actions mécaniques transmissibles d'un solide *i* sur un solide *j*, réduits à un point *C* et exprimés dans le repère *R*

$$\{F_{ij}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_C = X_C \vec{X} + Y_C \vec{Y} + Z_C \vec{Z} \\ \vec{\mathcal{M}}_C = L_C \vec{X} + M_C \vec{Y} + N_C \vec{Z} \end{array} \right\}_{C,R}$$
- pour les vecteurs  $\vec{G}_S \vec{A} = x_S \vec{X} + y_S \vec{Y} + z_S \vec{Z}$ ,  $\vec{G}_B \vec{A} = x_B \vec{X} + y_B \vec{Y} + z_B \vec{Z}$  et  $\vec{G}_E \vec{A} = x_E \vec{X} + y_E \vec{Y} + z_E \vec{Z}$  et

valeurs numériques :

- dimensions :

dimensions des projections	sur l'axe $\vec{X}$	sur l'axe $\vec{Y}$	sur l'axe $\vec{Z}$
segment $AG_B$	103	175	179
segment $AG_S$	137	215	370
segment $AG_E$	137	220	450

section de la semelle à étudier : 10×160 et section du bras à étudier : 10×96

- caractéristiques des matériaux :

	Nuances normalisées	Module d'élasticité <i>E</i> (MPa)	Coef. de Poisson <i>v</i>	Résistance à la rupture à la traction <i>R<sub>r</sub></i> (MPa)	Limite élastique à la traction <i>R<sub>e</sub></i> (MPa)
ferrure	alliage de titane T-A 6 V	105000	0.3	1250	1110
boulons M5 section du noyau : 12.5mm <sup>2</sup>	Acier cadmié 30NCD16	210000	0.3	1000	800

(dans tous les cas on pourra prendre  $R_{rg} = 0.5R_r$ ).

#### 4.3 Remarque

Rédiger dans les espaces réservés. Les développements des calculs annexes se feront sur feuille à part si nécessaire.

#### 4.4 Etude statique préliminaire

##### 4.4.1 Système isolé

- ferrure + 6 éléments de boulons situés dans la semelle de la ferrure

##### 4.4.2 Compléter le bilan des actions mécaniques appliquées sur le système isolé et écriture de leur modèle

Action de la rotule sur la ferrure en A (donnée) :

$$\{F_{\text{rotule/ferrure}}\}_A = \left. \begin{cases} \vec{R}_A = \vec{F} = X_A \vec{X} + Y_A \vec{Y} + Z_A \vec{Z} \\ \vec{M}_A = L_A \vec{X} + M_A \vec{Y} + N_A \vec{Z} \end{cases} \right\}_{A,R} =$$

Action du cadre sur la ferrure et actions des éléments de boulons situés dans le cadre sur les éléments de boulons situés dans la ferrure en  $G_E$  (liaison réalisée : encastrement) :

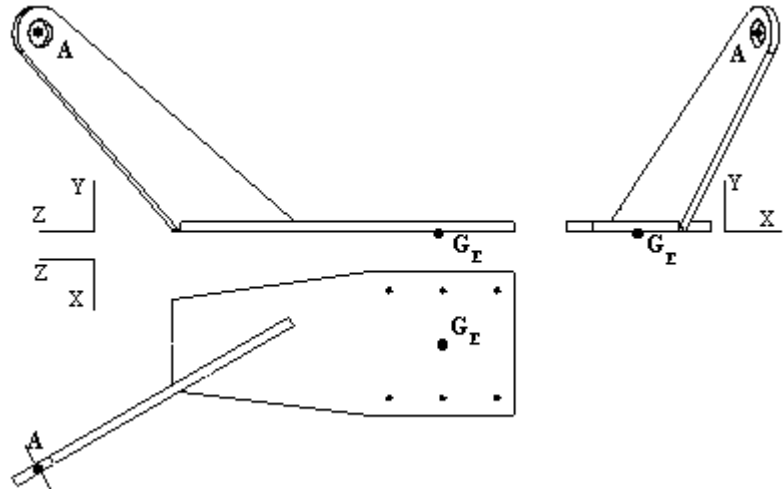
$$: \{F_{\text{cadre / ferrure}}\}_{G_E} = \left. \begin{cases} \vec{R}_{G_E} = X_E \vec{X} + Y_E \vec{Y} + Z_E \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_E} = L_E \vec{X} + M_E \vec{Y} + N_E \vec{Z} \end{cases} \right\}_{G_E,R} =$$

##### 4.4.3 Application du principe fondamental de la statique

Résultats et unités

$X_E$	
$Y_E$	
$Z_E$	
$L_E$	
$M_E$	
$N_E$	

- tracer sur les 3 vues en représentation géométrale de la ferrure, les représentations graphiques vectorielles de toutes les actions mécaniques appliquées sur la ferrure. Vérifier la cohérence de ce tracé assurant l'équilibre général de la ferrure.



#### 4.5 Vérification du dimensionnement de la section droite de la semelle à l'encastrement au droit du cadre

##### 4.5.1 Torseur de l'action $\vec{F}$ au point $G_S$

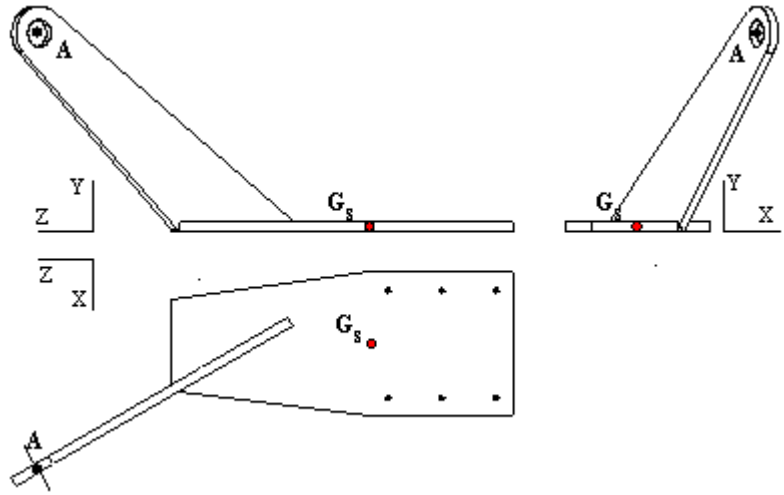
Calculer les éléments de réduction du **torseur de l'action**  $\vec{F}$  au point  $G_S$  centre géométrique de la section droite de la semelle (plan parallèle à XY) à l'encastrement au droit du cadre, les exprimer littéralement et dans le repère structural (XYZ).

$$\{F_{\text{rotule / ferrure}}\}_{G_S} = \left. \begin{cases} \vec{R}_{G_S} = X_S \vec{X} + Y_S \vec{Y} + Z_S \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_S} = L_S \vec{X} + M_S \vec{Y} + N_S \vec{Z} \end{cases} \right\}_{G_S,R}$$

- faire l'application numérique (unités)

$X_S$	
$Y_S$	
$Z_S$	
$L_S$	
$M_S$	
$N_S$	

- tracer leurs représentations graphiques vectorielles sur les 3 vues en représentation géométrale de la ferrure.



#### 4.5.2 Torseur de cohésion de la semelle II sur la semelle I au point $G_S$

Convertir les composantes du torseur précédent en éléments de réduction du **torseur de cohésion** de la semelle II sur la semelle I réduits au centre géométrique  $G_S$  de la section à l'encastrement, les exprimer dans le repère local  $G_Sxyz$  attaché à cette section (faire apparaître le changement de base).

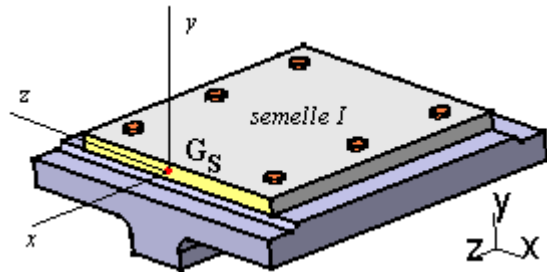
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{G_S} = [P] \bullet \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L$$

$$\{Coh_{\text{semelleII/semelleI}}\}_{G_S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\text{semelleII/semelleI}} = N \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z} \\ \mathcal{M}_{G_S(\text{semelleII/semelleI})} = M_x \vec{x} + Mf_y \vec{y} + Mf_z \vec{z} \end{array} \right\}_{G_S,r}$$

- faire l'application numérique (unités)

$N$	
$T_y$	
$T_z$	
$M_x$	
$Mf_y$	
$Mf_z$	

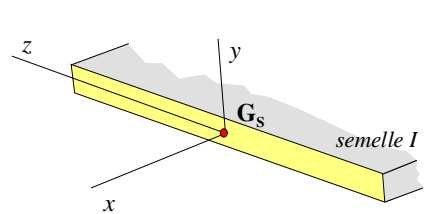
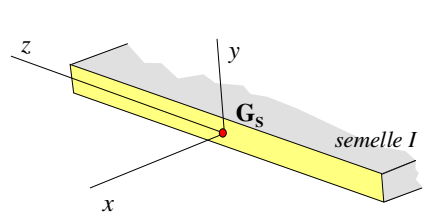
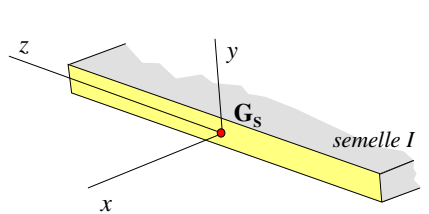
- tracer au point  $G_S$  leurs représentations graphiques vectorielles sur la vue en perspective de la semelle I, en y précisant leurs désignations exactes



#### 4.5.3 Contraintes engendrées

Pour chaque sollicitation précédente : indiquer la contrainte engendrée, calculer la valeur maximale de cette contrainte en indiquant sa localisation dans la section, dessiner l'allure du champ des contraintes

<i>sollicitation</i>	<i>sollicitation</i>	<i>sollicitation</i>

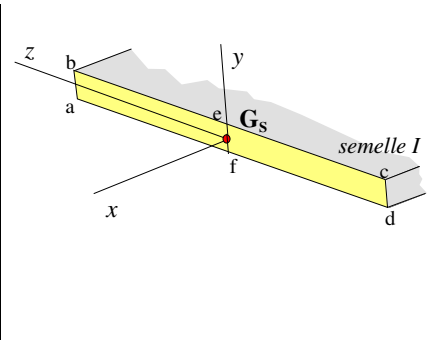
		
<i>sollicitation</i>	<i>sollicitation</i>	<i>sollicitation</i>

#### 4.5.4 Condition de résistance

Calculer la **contrainte normale** maximale, indiquer sa nature, préciser le point de la section où se trouve cette valeur maximale et tracer le vecteur représentatif de cette contrainte :

Calculer la **contrainte normale équivalente** maximale selon le critère de Von Mises, préciser le point de la section où se trouve cette valeur maximale :

Exprimer la condition de résistance ces valeurs des contraintes et conclure :



#### 4.6 Vérification du dimensionnement de la section du bras à la jonction avec la semelle

##### 4.6.1 Torseur de l'action $\vec{F}$ au point $G_B$

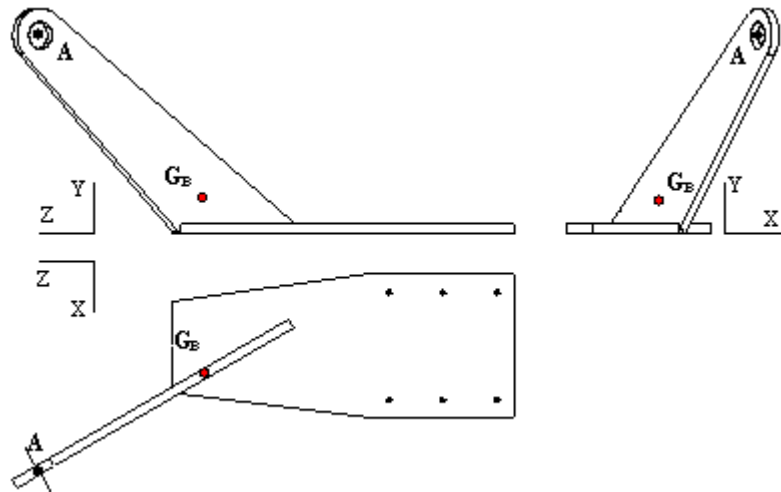
Calculer les éléments de réduction du **torseur de l'action**  $\vec{F}$  au point  $G_B$  centre géométrique de la section de la semelle à l'encastrement, les exprimer littéralement et dans le repère structural (XYZ).

$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{rotule / ferrure}} \right\}_{G_B} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{G_B} = X_B \vec{X} + Y_B \vec{Y} + Z_B \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_B} = L_B \vec{X} + M_B \vec{Y} + N_B \vec{Z} \end{array} \right\}_{G_B, R}$$

- faire l'application numérique (unités)

$X_B$	
$Y_B$	
$Z_B$	
$L_B$	
$M_B$	
$N_B$	

- tracer leurs représentations graphiques vectorielles sur les 3 vues en représentation géométrale de la ferrure.



#### 4.6.2 Torseur de cohésion du bras II sur le bras I au point G<sub>B</sub>

Convertir les composantes du torseur précédent en éléments de réduction du **torseur de cohésion** du bras II sur le bras I réduits au centre géométrique G<sub>B</sub> la section à l'encastrement, les exprimer dans le repère local G<sub>B</sub>yz attaché à cette section (sur feuille à part faire apparaître les 2 changements de base successifs de Global à L intermédiaire et de L intermédiaire à Local).

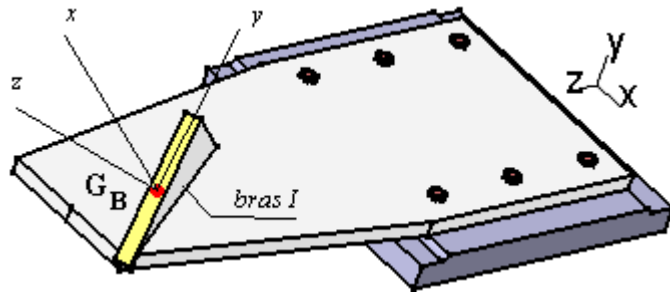
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{Li} = [P_1] \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_G \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L = [P_2] \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{Li} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{T}_y \\ \mathcal{T}_z \end{Bmatrix}_L = [P]_2 \cdot [P]_1 \cdot \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix}_G \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}f_y \\ \mathcal{M}f_z \end{Bmatrix}_L = [P]_2 \cdot [P]_1 \cdot \begin{Bmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{Bmatrix}_G$$

$$\{Coh_{brasII/brasI}\}_{G_B} = \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{brasII/brasI}} = \mathcal{N} \vec{x} + \mathcal{T}_y \vec{y} + \mathcal{T}_z \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_B(brasII/brasI)}} = \mathcal{M}_x \vec{x} + \mathcal{M}f_y \vec{y} + \mathcal{M}f_z \vec{z} \end{array} \right\}_{G_B, r}$$

- faire l'application numérique

$\mathcal{N}$	
$\mathcal{T}_y$	
$\mathcal{T}_z$	
$\mathcal{M}_x$	
$\mathcal{M}f_y$	
$\mathcal{M}f_z$	

- tracer au point G<sub>B</sub> leurs représentations graphiques vectorielles sur la vue en perspective de la semelle I, en y précisant leurs désignations exactes



Commenter les valeurs particulières obtenues :

#### 4.6.3 Contraintes engendrées

Pour chaque sollicitation précédente : calculer les valeurs maximales de ces contraintes en indiquant leur localisation dans la section, dessiner l'allure du champ des contraintes.

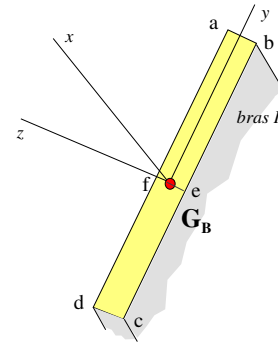
sollicitation	sollicitation	sollicitation
sollicitation	sollicitation	sollicitation

#### 4.6.4 Condition de résistance

Calculer la **contrainte normale** maximale, indiquer sa nature, préciser le point de la section où se trouve cette valeur maximale et tracer le vecteur représentatif de cette contrainte :

Calculer la **contrainte normale équivalente** maximale selon le critère de Von Mises, préciser le point de la section où se trouve cette valeur maximale.

Exprimer la condition de résistance pour ces valeurs des contraintes et conclure



#### 4.7 Vérification du dimensionnement de l'assemblage boulonné

(cf. § **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** extraits de l'ouvrage "Dimensionnement des structures" D. GAY et J. GAMBELIN éditions Hermès)

Ou prendre connaissance de la méthodologie dans le fichier ressources « res-assemblages-boulonnes »

##### 4.7.1 Rappel des hypothèses pour le calcul élémentaire des boulons :

##### 4.7.2 Torseur de l'action $\vec{F}$ au point $G_E$

Calculer les éléments de réduction du **torseur de l'action**  $\vec{F}$  au point  $G_E$  situé à l'interface du contact de la semelle et du cadre, les exprimer littéralement et dans le repère structural (XYZ)

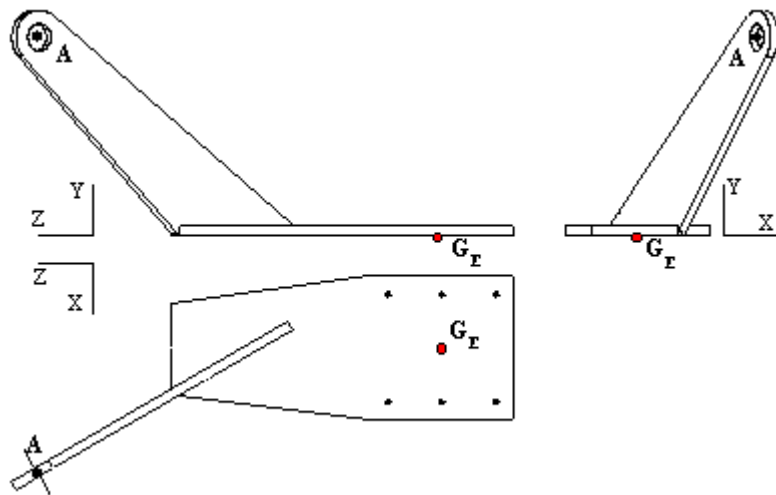
$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{rotule / ferrure}} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{G_E}^* = X^*_E \vec{X} + Y^*_E \vec{Y} + Z^*_E \vec{Z} \\ \mathcal{M}_{G_E}^* = L^*_E \vec{X} + M^*_E \vec{Y} + N^*_E \vec{Z} \end{array} \right\}_{G_E, R}$$

remarque : indice \* pour différencier de l'écriture du torseur 4.4.2

- faire l'application numérique (unités)

$X^*_E$	
$Y^*_E$	
$Z^*_E$	
$L^*_E$	
$M^*_E$	
$N^*_E$	

- tracer leurs représentations graphiques vectorielles sur les 3 vues en représentation géométrale de la ferrure.



Indiquer une autre démarche pour arriver à ces résultats :

##### 4.7.3 Torseur de cohésion de la semelle de la ferrure sur du cadre au point $G_E$

Convertir les composantes du torseur précédent en éléments de réduction du torseur de cohésion de la semelle de la ferrure sur du cadre réduits au barycentre  $G_E$  des six sections de boulons sollicités ( $G_E$  situé dans le plan  $G_Exy$  de la section équivalente), les exprimer dans le repère local  $G_Exyz$  attaché à ces sections (faire apparaître le changement de base).

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_G = [P] \bullet \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L$$

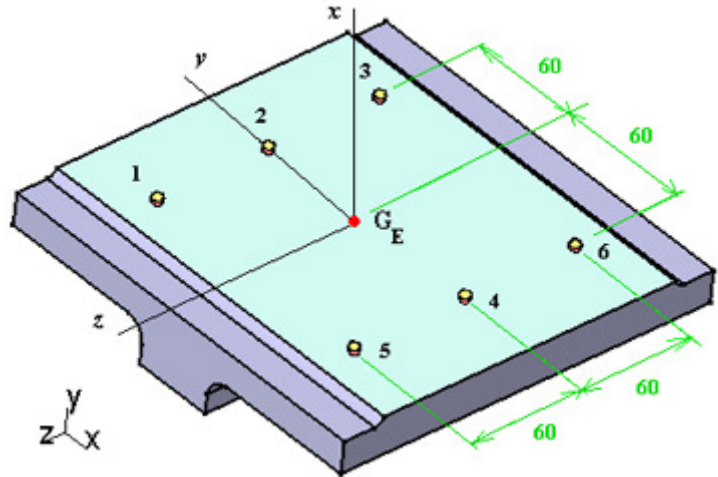
$$\{Cof_{\text{semelle/cadre}}\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{semelle/cadre}}} = \mathcal{N} \vec{x} + \mathcal{T}_y \vec{y} + \mathcal{T}_z \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_E(\text{semelle/cadre})}} = \mathcal{M}_x \vec{x} + \mathcal{M}_y \vec{y} + \mathcal{M}_z \vec{z} \end{array} \right\}_{G_E, r}$$



- faire l'application numérique (unités)

- tracer au point  $G_E$  leurs représentations graphiques vectorielles sur la vue en perspective des 6 sections des boulons, en y précisant leurs désignations exactes

$\mathcal{N}$	
$\mathcal{T}_y$	
$\mathcal{T}_z$	
$\mathcal{M}_x$	
$\mathcal{M}_{f_y}$	
$\mathcal{M}_{f_z}$	



**4.7.4 Efforts induits par les éléments de réduction du torseur de cohésion précédent**

Pour chaque section désigner et tracer au point  $G_i$  les représentations graphiques vectorielles des sollicitations locales induites ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) par les éléments de réduction du torseur de cohésion précédent au point  $G_E$ .

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$

**4.7.5 Contraintes résultantes et expression les conditions de résistance pour les boulons le plus sollicités**

## 5. DIMENSIONNEMENT & CONCEPTION DEFINITIFS DE LA FERRURE

Suite au pré-dimensionnement précédent qui permet de bien identifier le comportement élastique de la ferrure, on se propose d'élaborer plusieurs modèles éléments finis.

### 5.1 Modèle de calcul par éléments finis poutre (RDM6)

Modéliser en éléments finis poutres de la partie bras  $AG_B G_S$  : on prendra soin à la bonne orientation des sections et à leur variation. Retrouver les résultats en contraintes des calculs analytiques précédents dans les sections de centres géométriques  $G_B$  et  $G_S$ .

### 5.2 Modèles de calcul par éléments finis solides (Catia V5 R17)

#### 5.2.1 Modéliser en éléments finis solides de la ferrure initiale

##### 5.2.1.1 Conditions aux limites aux liaisons : face sous la semelle encastrée avec le bâti

Retrouver les résultats en contraintes des calculs analytiques précédents dans les sections de centres géométriques  $G_B$  et  $G_S$ .

##### 5.2.1.2 Conditions aux limites aux liaisons : face sous la semelle simplement appuyée et 6 impacts des boulons rotulés

On impose ici le non décollement de la semelle mais son libre glissement hors ancrages rigides sur le bâti au droit des boulons.

##### 5.2.1.3 Conditions aux limites aux liaisons : face sous la semelle en contact avec le bâti et 6 impacts des boulons rotulés

On utilise des éléments contact entre semelle et bâti ce qui permettra d'apprécier les zones où il y a décollement et celles où il y a transmission d'efforts entre semelle et bâti hors ancrages rigides sur le bâti au droit des boulons.

##### 5.2.1.4 Etude comparative

Pour ces trois modèles comparer les niveaux des contraintes et des déplacements ainsi que les allures des déformations de la semelle.

#### 5.2.2 Optimiser les formes de la ferrure initiale

Tenir compte des critères de condition de résistance, de condition de rigidité maximale et de gain de masse. Toute liberté de formes est laissée au concepteur à condition qu'elles respectent le cahier des charges de conception (cf. § 3) et les critères précédents. Toutefois la ferrure étant usinée dans la masse, il est impératif que son usinage en commande numérique soit possible. Les usinages locaux permettant d'atténuer les concentrations de contraintes seront réalisés sur le modèle définitif, sauf si le calcul montre rapidement la nécessité de les intégrer dès les premiers modèles de calcul.

### 5.3 Note de calcul

Rédiger sur des feuilles à part une note de calcul reprenant la démarche proposée ci-dessous. N'extraire que les seules captures d'écran (avec repère et fond blanc) nécessaires à l'interprétation sans ambiguïté des résultats par un concepteur.

#### **Conditions aux limites**

Indiquer et justifier les conditions aux limites de liaisons (ddl bloqués) et de chargements nécessaires sur une reproduction du modèle

#### **Analyse des résultats**

- *en déplacements* : identifier les composantes des déplacements les plus significatives

- *en contraintes* : identifier les contraintes normales significatives et les contraintes normales équivalentes selon Von Mises sur une reproduction du modèle

#### **Conclusions**

Après avoir créé des repères locaux sur le modèle géométrique (Part Design), comparer avec les niveaux de contraintes obtenus dans les dimensionnements manuels (sections B et S en particulier)

Commentaires et tableau de synthèse faisant apparaître le gain de masse, l'amélioration en rigidité et en résistance entre les modèles.

Mise en plan du modèle définitif avec coupes ou sections si nécessaires et cotes principales

ELEMENTS DE CORRECTION

$$442- \{F_{\text{rotule/ferrure}}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_A = \vec{F} = X_A \vec{X} + Y_A \vec{Y} + Z_A \vec{Z} \\ \vec{M}_A = L_A \vec{X} + M_A \vec{Y} + N_A \vec{Z} \end{array} \right\}_{A,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_A = \vec{F} = -453,15\vec{X} + 422,61\vec{Y} - 784,88\vec{Z} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{array} \right\}_{A,R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = -(\cos 25^\circ \times \sin 30^\circ \times 1000) = -453,15 \\ Y_A = \sin 25^\circ \times 1000 = 422,61 \\ Z_A = -(\cos 25^\circ \times \cos 30^\circ \times 1000) = -784,88 \end{array} \right\}$$

$$\{F_{\text{cadre / ferrure}}\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{G_E} = X_E \vec{X} + Y_E \vec{Y} + Z_E \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_E} = L_E \vec{X} + M_E \vec{Y} + N_E \vec{Z} \end{array} \right\}_{G_E,R}$$

443-PFS

$$\sum (\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{F} + \vec{R}_{G_E} = \vec{0}$$

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) / G_E = \vec{G}_E A \wedge \vec{F} + \vec{M}_{G_E} = \vec{0}$$

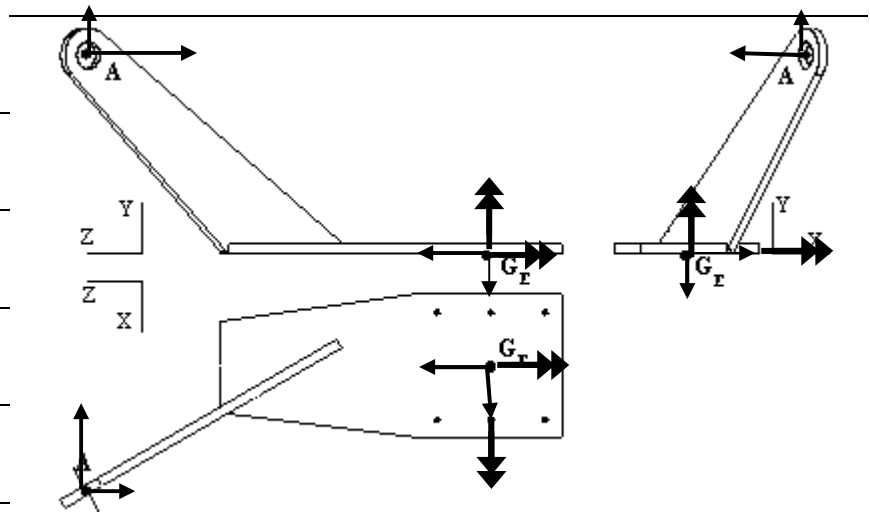
$$\vec{G}_E A \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 137 & 220 & 450 \\ -453,15 & 422,61 & -784,88 \end{bmatrix}$$

→ 6 équations de projections pour déterminer les 6 inconnues algébriques

$$\text{forces} \left\{ \begin{array}{l} / X : -453,15 + X_E = 0 \\ / Y : 422,61 + Y_E = 0 \\ / Z : -784,88 + Z_E = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{moments} \left\{ \begin{array}{l} / X : +(220 \times -784,88) - (450 \times 422,61) + L_E = 0 \\ / Y : -(137 \times -784,88) + (450 \times -453,15) + M_E = 0 \\ / Z : +(137 \times 422,61) - (220 \times -453,15) + N_E = 0 \end{array} \right.$$

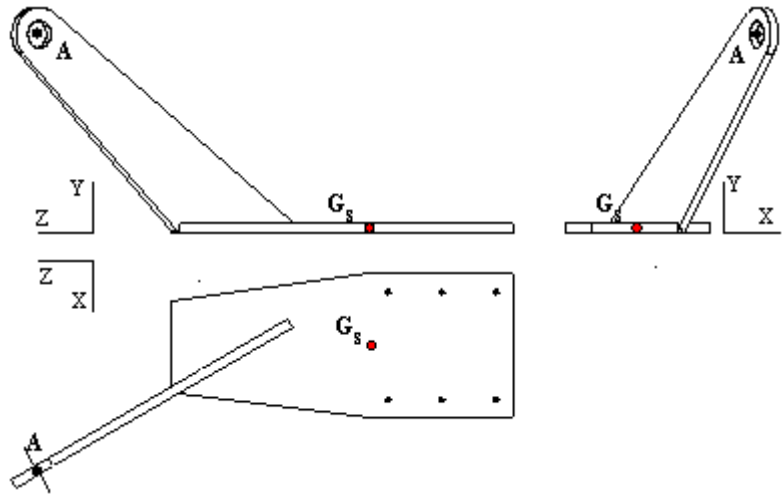
$X_E$	+453,15
$Y_E$	-422,61
$Z_E$	+784,88
$L_E$	+362848,1
$M_E$	+96388,9
$N_E$	-157590,57



451-

$$\{F_{\text{rotule / ferrure}}\}_{G_s} = \begin{cases} \vec{R}_{G_s} = X_S \vec{X} + Y_S \vec{Y} + Z_S \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_s} = L_S \vec{X} + M_S \vec{Y} + N_S \vec{Z} \end{cases}_{G_s, R} = \begin{cases} \vec{R}_{G_s} = \vec{F} \\ \vec{M}_{G_s} = \vec{G}_s A \wedge \vec{F} \end{cases}_{G_s, R} ; \begin{cases} L_S = +(215 \times -784,88) - (370 \times 422,61) \\ M_S = -(137 \times -784,88) + (370 \times -453,15) \\ N_S = +(137 \times 422,61) - (215 \times -453,15) \end{cases}$$

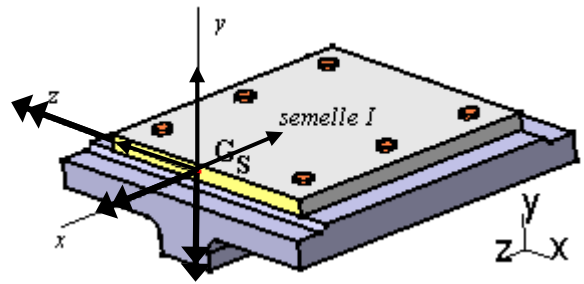
$X_S$	-453,15
$Y_S$	+422,61
$Z_S$	-784,88
$L_S$	-325114,9
$M_S$	-60136,9
$N_S$	+157590,57



452-

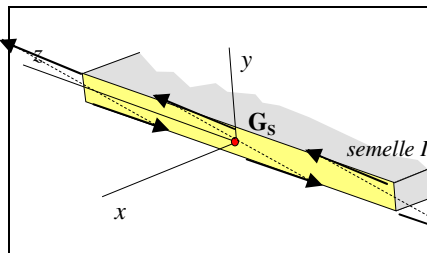
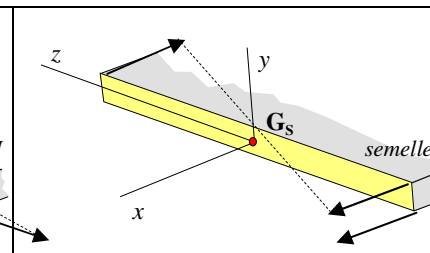
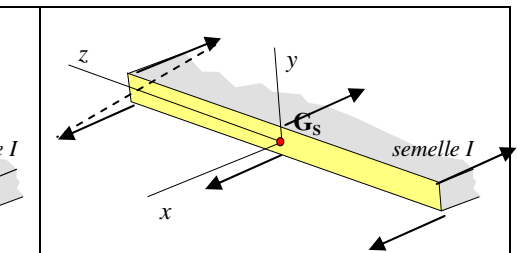
$$\begin{cases} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{cases}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_r \Rightarrow \begin{cases} \vec{X} = -z \\ \vec{Y} = y \\ \vec{Z} = x \end{cases}$$

$N$	-784,88
$T_y$	+422,61
$T_z$	+453,15
$M_x$	+157590,57
$M_f_y$	-60136,9
$M_f_z$	+325114,9

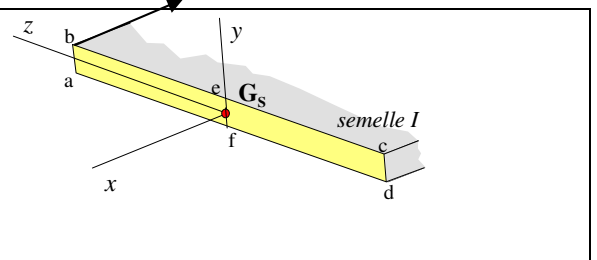


453-

<i>Sollicitation TRACTION</i>	<i>Sollicitation CISAILEMENT</i>	<i>Sollicitation CISAILEMENT</i>
$\sigma_x = \frac{N}{S} = \frac{-784,88}{1600} = -0,49 \text{MPa}$	$\tau_{xy \text{ max}} = \frac{3 T_y}{2 S} = \frac{3 \cdot 423}{2 \cdot 1600} = +0,39 \text{MPa}$	$\tau_{xz \text{ max}} = \frac{3 T_z}{2 S} = \frac{3 \cdot 453,15}{2 \cdot 1600} = +0,425 \text{MPa}$

		
Sollicitation <b>TORSION</b>	Sollicitation <b>FLEXION/y</b>	Sollicitation <b>FLEXION/z</b>
$\tau_{\max} = \frac{M_x \times e}{\frac{1}{3} \ell \times e^3} = \frac{157590,57 \times 10}{\frac{1}{3} \times 160 \times 1000}$ = 29,13MPa	$\sigma_{\max} = \frac{Mf_y \times \pm z}{I_{yy}} = \frac{-60136,9 \times \pm 80}{\frac{10 \times 160^3}{12}}$ = $\mp 1,41$ MPa	$\sigma_{\max} = -\frac{Mf_z \times \pm y}{I_{zz}} = \frac{-325285 \times \pm 5}{\frac{160 \times 10^3}{12}}$ = $\mp 122$ MPa

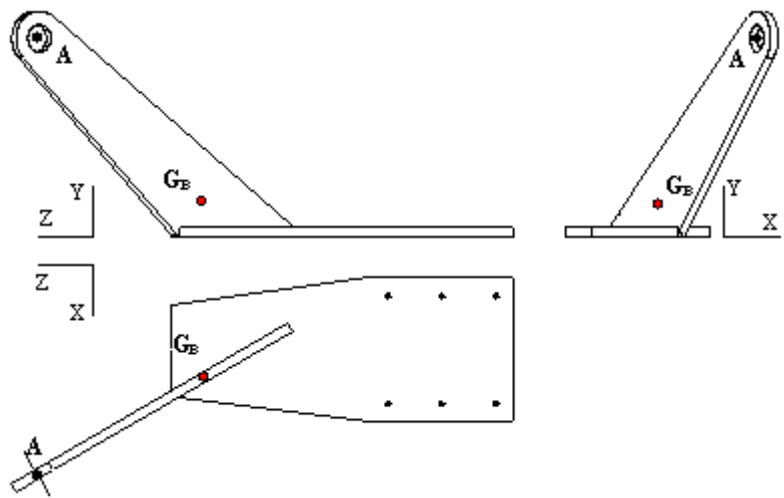
454-

$\sigma_{\max} = \frac{N}{S} + \frac{Mf_y \times \pm z}{I_{yy}} - \frac{Mf_z \times \pm y}{I_{zz}} = -0,49 - 1,41 - 122 = -124 \text{MPa}$ <p>Contrainte équivalente maxi selon VON MISES aux points a,b</p> $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} = \sqrt{124^2 + 3(0 + 29,13^2)} = 133,8 \text{MPa}$ <p>Condition de résistance</p> $\sigma_{\text{eq}} = 133,8 \text{MPa} \leq R_e \text{ condition vérifiée matériau titane}$	
--	--

461-

$$\{ \mathcal{F}_{\text{rotule / ferrure}} \}_{G_B} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{G_B} = X_B \vec{X} + Y_B \vec{Y} + Z_B \vec{Z} \\ \vec{M}_{G_B} = L_B \vec{X} + M_B \vec{Y} + N_B \vec{Z} \end{array} \right\}_{G_{B,R}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{G_B} = \vec{F} \\ \vec{M}_{G_B} = \vec{G}_B A \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_{G_{B,R}} ; \left\{ \begin{array}{l} L_B = +(175 \times -784,88) - (179 \times 422,61) \\ M_B = -(103 \times -784,88) + (179 \times -453,15) \\ N_B = +(103 \times 422,61) - (175 \times -453,15) \end{array} \right\}$$

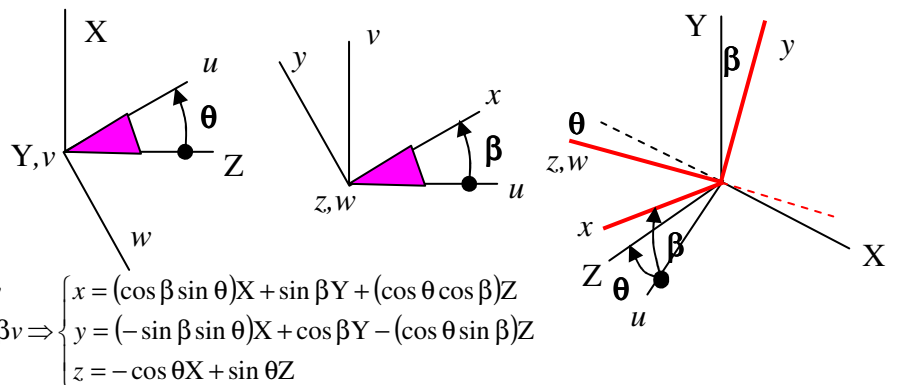
$X_B$	-453,15
$Y_B$	+422,61
$Z_B$	-784,88
$L_B$	-213001,19
$M_B$	-271,21
$N_B$	+1222830,08



462-

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{Li} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{et } \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{Li}$$



$$\begin{cases} u = \sin \theta X + \cos \theta Z \\ v = Y \\ w = -\cos \theta X + \sin \theta Z \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} x = \cos \beta u + \sin \beta v \\ y = -\sin \beta u + \cos \beta v \\ z = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (\cos \beta \sin \theta)X + \sin \beta Y + (\cos \theta \cos \beta)Z \\ y = (-\sin \beta \sin \theta)X + \cos \beta Y - (\cos \theta \sin \beta)Z \\ z = -\cos \theta X + \sin \theta Z \end{cases}$$

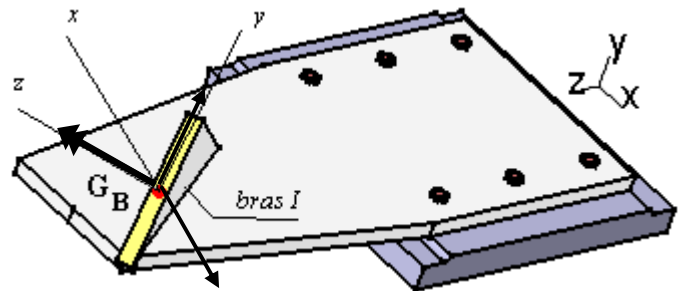
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_G$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0,3814 & 0,6466 & 0,6607 \\ -0,3233 & 0,7628 & -0,5599 \\ -0,866 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_G$$

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{T}_y \\ \mathcal{T}_z \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0,3814 & 0,6466 & 0,6607 \\ -0,3233 & 0,7628 & -0,5599 \\ -0,866 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix}_G \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0,3814 & 0,6466 & 0,6607 \\ -0,3233 & 0,7628 & -0,5599 \\ -0,866 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{Bmatrix}_G$$

$$\left\{ \text{Coh}_{\text{brasII}/\text{brasI}} \right\}_{G_B} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{brasII}/\text{brasI}} = \mathcal{N} \vec{x} + \mathcal{T}_y \vec{y} + \mathcal{T}_z \vec{z} \\ \vec{M}_{G_B(\text{brasII}/\text{brasI})} = \mathcal{M}_x \vec{x} + \mathcal{M}_y \vec{y} + \mathcal{M}_z \vec{z} \end{array} \right\}_{G_B, r}$$

$\mathcal{N}$	-418,11
$\mathcal{T}_y$	+900,7
$\mathcal{T}_z$	$\approx 0$
$\mathcal{M}_x$	0
$\mathcal{M}_y$	0
$\mathcal{M}_z$	+245874,07



463-

<i>Sollicitation TRACTION</i>	<i>Sollicitation CISAILLEMENT</i>	<i>sollicitation</i>
$\sigma_x = \frac{\mathcal{N}}{S} = \frac{-418,11}{960} = -0,43\text{MPa}$	$\tau_{xy \max} = \frac{3 \mathcal{T}_y}{2 S} = \frac{3 \cdot 900,7}{2 \cdot 960} = +1,4\text{MPa}$	
<i>sollicitation</i>	<i>sollicitation</i>	<i>Sollicitation FLEXION /z</i>
		$\sigma_{\max} = -\frac{\mathcal{M}_z \times \pm y}{I_{zz}} = \frac{-245874,07 \times \pm 48}{\frac{10 \times 96^3}{12}}$ $= \mp 1,6\text{MPa}$

464-

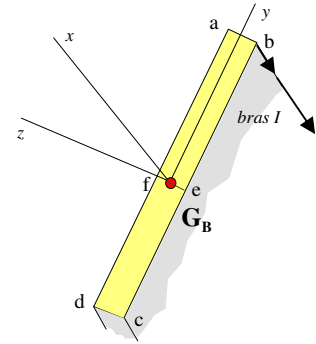
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{S} - \frac{Mf_z \times \pm y}{I_{ZZ}} = -0,43 - 16 = -16,43 \text{ MPa}$$

Contrainte équivalente maxi selon VON MISES aux points a et b

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} = 16,43 \text{ MPa}$$

Condition de résistance

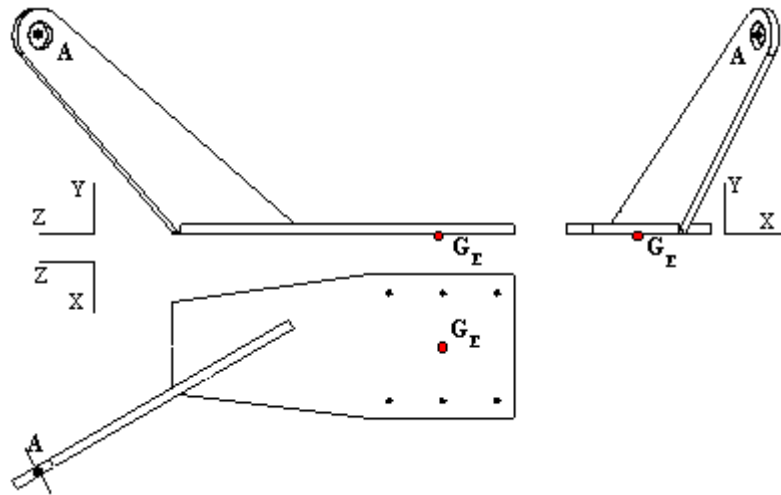
$$\sigma_{\text{eq}} = 16,43 \text{ MPa} \leq R_e \text{ condition vérifiée matériau titane}$$



471-

472-

$X^*_E$	-453,15
$Y^*_E$	+422,61
$Z^*_E$	-784,88
$L^*_E$	-362848,1
$M^*_E$	-96388,9
$N^*_E$	+157590,57



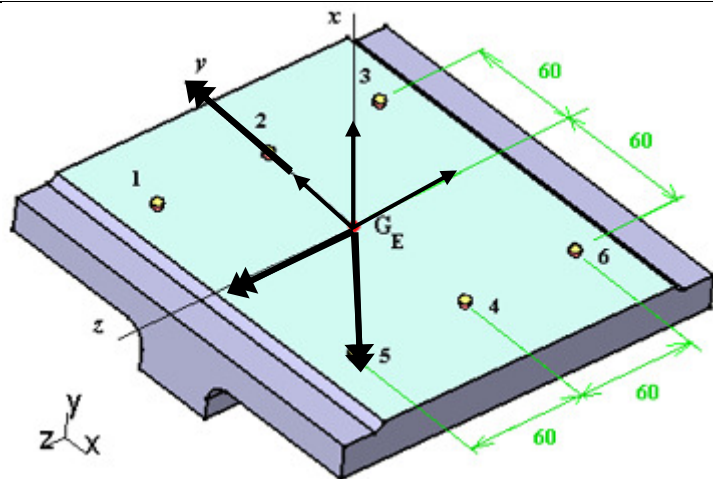
c'est égal aussi à « moins » le torseur du cadre sur la semelle en  $G_E$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{\text{rotule / ferrure}} \\ \mathcal{M}_{G_E} \end{array} \right\}_{G_E} = - \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{\text{cadre / ferrure}} \\ \mathcal{M}_{G_E} \end{array} \right\}_{G_E, R} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{G_E} = X_E \vec{X} + Y_E \vec{Y} + Z_E \vec{Z} \\ \mathcal{M}_{G_E} = L_E \vec{X} + M_E \vec{Y} + N_E \vec{Z} \end{array} \right\}_{G_E, R}$$

473-

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{array} \right\}_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\}_r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{X} = -y \\ \vec{Y} = x \\ \vec{Z} = z \end{array} \right\}$$

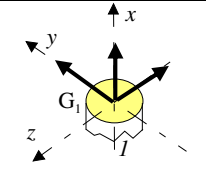
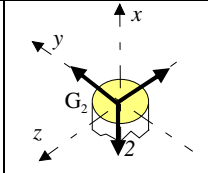
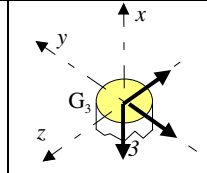
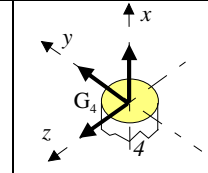
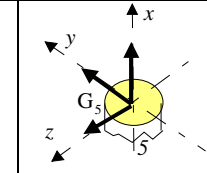
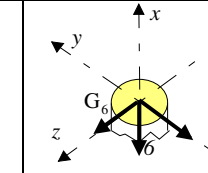
$N$	+422,61
$T_y$	453,15
$T_z$	-784,88
$M_x$	-96388,9
$Mf_y$	362848,1
$Mf_z$	+157590,57



474-

Voir annexes : extraits de l'ouvrage "Dimensionnement des structures" D. GAY et J. GAMBELIN éditions Hermès

$$X_i = \frac{423}{6} + \frac{362848 \times \pm 60}{4 \times 60^2} - \frac{157590 \times \pm 60}{6 \times 60^2}; Y_i = \frac{453}{6} - \frac{-96388,9 \times \pm 60}{6 \times 60^2 + 4 \times 60^2}; Z_i = \frac{-785}{6} + \frac{-96388,9 \times \pm 60}{6 \times 60^2 + 4 \times 60^2}$$

											
X <sub>1</sub>	1144,6	X <sub>2</sub>	-367,25	X <sub>3</sub>	-1879,11	X <sub>4</sub>	508,25	X <sub>5</sub>	2020,11	X <sub>6</sub>	-1003,61
Y <sub>1</sub>	236,14	Y <sub>2</sub>	75,5	Y <sub>3</sub>	-85,14	Y <sub>4</sub>	75,5	Y <sub>5</sub>	236,14	Y <sub>6</sub>	-85,14
Z <sub>1</sub>	-291,44	Z <sub>2</sub>	-291,44	Z <sub>3</sub>	-291,44	Z <sub>4</sub>	29,84	Z <sub>5</sub>	29,84	Z <sub>6</sub>	29,84

475- sollicitation en traction max :boulon 5

$$\frac{\sigma_5}{0.84 \times R_r} + \frac{\tau_5}{0.8 \times R_{rg}} \leq 1$$

$$\frac{X_5}{s_o \times R_r \times 0,84} + \frac{\sqrt{Y_5^2 + Z_5^2}}{s_o \times R_{rg} \times 0,8} \leq 1 \Rightarrow \frac{2020,11}{s_o \times 1000 \times 0,84} + \frac{\sqrt{236,84^2 + 29,54^2}}{s_o \times 500 \times 0,8} \leq 1 \Rightarrow s_o \geq 3\text{mm}^2; d = 1,95$$

Condition de résistance vérifiée vu que boulons utilisés M5