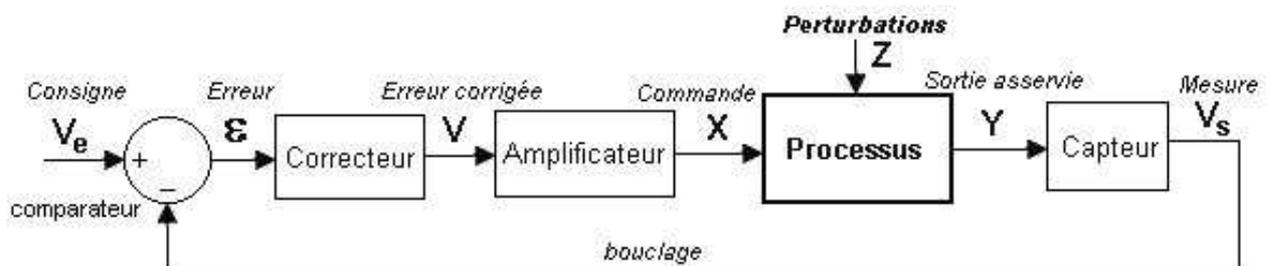




I.U.T. de Montluçon
Département G.E.I.I.

Cours de Michel VERBEKEN

ASSERVISSEMENTS CONTINUS



Plan du Cours

	p		p
Chapitre 0 Généralités	3	3.8 Lieux de Bode des systèmes quelconques. Exemple d'étude harmonique d'un système compliqué	38
0.1 Cybernétique, Automatique, Asservissement	3	3.9 Allure des lieux de Nyquist des systèmes quelconques	39
0.2 Asservissement: définition	3		
0.3 Commande directe (en boucle ouverte)	4	Chapitre 4 Représentations des Fonctions de Transfert	42
0.4 Commande en boucle fermée	5	4.1 Graphe de transfert	42
0.5 Exemples naturels de fonctionnement en boucle fermée	6	4.2 Règle de Mason	43
0.6 Problème posé par la boucle	7	4.3 Graphes canoniques	45
		4.4 Représentations d'état (vecto-matricielle)	47
Chapitre 1 Transformation de Laplace	8	4.5 Mise en équations (systèmes électriques, mécaniques, hydrauliques, thermiques). Analogies	48
1.1 Transformée de Laplace, définition, conventions	8		
1.2 Somme de fonctions, multiplication par une constante	8	Chapitre 5 Systèmes Bouclés	54
1.3 Dérivation et intégration, exemples	9	5.1 Généralités, Fonction de transfert en boucle fermée	54
1.4 Retard	12	5.2 Stabilité de la boucle	55
1.5 Fonction amortie	12	5.3 Marges de stabilité (amortissement du système bouclé)	58
1.6 Valeurs initiale et finale	12	5.3.1 Marge de phase	59
1.7 Fonctions canoniques	13	5.3.2 Marge de gain	59
1.8 Transformation inverse	14	5.3.3 Valeurs optimales	59
1.9 Relation Equation Différentielle et Fonction de Transfert	16	5.3.4 Réglage du gain de boucle	59
1.10 Fonction de Transfert quelconque: les six éléments simples	18	5.4 Abaque de Black	60
		5.5 Précision des asservissements	61
Chapitre 2 Réponse Temporelle des Systèmes Linéaires	20	5.6 Vitesse des asservissements	65
2.1 Réponse transitoire, réponse permanente	20	5.7 Sensibilité aux perturbations	66
2.2 Réponse impulsionnelle des six éléments simples	20		
2.3 Réponse indicielle des six éléments simples. Identification	22	Chapitre 6 Amélioration des Performances: Correcteurs PI, PD, PID, PIR, spécifiques)	68
2.4 Réponse à une rampe (erreur de traînage)	26	6.1 Rappels	68
2.5 Durée du régime transitoire	27	6.2 Amélioration de la Précision (correcteur PI)	69
2.6 Réponse à une entrée quelconque (produit de convolution)	28	6.3 Amélioration de la Précision et de la Vitesse (correcteur PD)	72
2.7 Modèle de Strecj (systèmes apériodiques)	28	6.4 Correction tachymétrique	74
		6.5 Correction P.I.D.	75
Chapitre 3 Réponse Fréquentielle ou Harmonique des Systèmes Linéaires	30	6.6 Critère de Réglage de Ziegler-Nichols	77
3.1 Réponse harmonique, définition	30	6.7 Critère de Réglage de Naslin	78
3.2 Etude théorique de la réponse harmonique	30	6.8 Exemple de Réalisation des correcteurs P.I.D série et parallèle	78
3.3 Représentations d'un nombre complexe (Nyquist, Black, Bode)	30	6.9 Correcteur P.I.R	79
3.4 Lieux de transfert du dérivateur	32	6.10 Modèle Imposé (correcteur spécifique)	81
3.5 Lieux de transfert de l'intégrateur	32	6.11 Correcteur PID programmé (équation de récurrence)	83
3.6 Lieux de transfert du premier ordre. Identification	33		
3.7 Lieux de transfert du second ordre. Identification	35		

Chapitre 0

Généralités.

0.1 Cybernétique, Automatique, Asservissement

Cybernétique est un mot grec signifiant "gouvernement". On rencontre ce terme dans plusieurs "dialogues" de Platon (philosophe grec, élève de Socrate, 400 ans avant J.C, c'est-à-dire il y a 2400 ans!)

Définition du Petit Robert: "Science du gouvernement".

Définition du Grand Dictionnaire Larousse Encyclopédique: "Science de l'action orientée vers un but, fondée sur l'étude des processus de commande des systèmes technologiques, biologiques, sociologiques et économiques".

Nous voyons donc que la cybernétique est une science aux développements très vastes. Mais ceci veut également dire qu'il y a des similitudes dans tous ces domaines. Quant à nous, nous nous intéresserons uniquement à la commande des systèmes technologiques. Dans ce cas la science concernée est l'**Automatique**.

Nous souhaitons donc gouverner (**asservir**) des grandeurs physiques issues de processus technologiques. Ces grandeurs pourront être électriques (tension, courant, puissance, ...), mécaniques (force, vitesse, position, couple, ...), thermiques (température, gradient, ...), hydrauliques (pression, débit, niveau, ...), optiques (éclairage, exposition, ...), chimiques (concentration, ...). Toute grandeur physique issue d'un processus technologique pourra être asservie.

Si la mesure de la grandeur physique est continue (valeur instantanée), nous réaliserons un asservissement continu.

Si la mesure de la grandeur physique ne se fait qu'à certains instants, nous réaliserons un asservissement échantillonné. Dans les deux cas la finalité est la même. Mais les techniques et les outils mathématiques sont différents. Ce cours concerne uniquement les **Asservissements Continus**.

0.2 Asservissement: définition

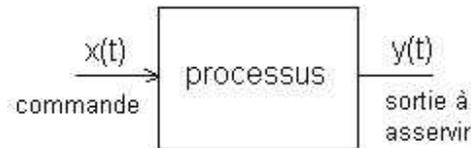
Notre problème est donc d'asservir une grandeur physique $y(t)$ élaborée par un processus technologique (t représente bien entendu le temps). Asservir $y(t)$ consiste à essayer d'obtenir $y(t) = y_e(t)$ où $y_e(t)$ représente la loi de **consigne** qu'on s'est fixé. $y_e(t)$ est évidemment de même nature que la grandeur physique $y(t)$.

Exemple d'un asservissement de température: on souhaite que la température dans un four pour traitement thermique, à partir de la température ambiante, monte lentement de 5°C par minute jusque 150°C, puis reste constante pendant 3 minutes, puis monte rapidement de 20°C par minute jusque 540°C, reste alors constante pendant 15 minutes, avant de redescendre de 10°C par minute jusque 250°C... Cette fonction du temps ainsi décrite est la loi de consigne $y_e(t)$.

C'est l'utilisateur de l'asservissement qui choisit la loi de consigne. L'automaticien doit réaliser l'asservissement pour qu'il fonctionne pour toute loi de consigne dans des limites (en valeurs extrêmes et en vitesse maximale de variation) définies dans le cahier des charges.

Un cas particulier consiste à définir une loi de consigne constante. Dans ce cas le mot asservir devient réguler, et l'asservissement devient une régulation. La régulation est un cas particulier de l'asservissement.

Avant de pouvoir asservir $y(t)$ il faut pouvoir **agir** sur $y(t)$ par modification d'une **grandeur de commande** $x(t)$. Par exemple dans le cas du four, en supposant que c'est un four à gaz, on pourra agir sur la température en faisant varier le débit de gaz dans les injecteurs par l'intermédiaire d'une petite vanne proportionnelle motorisée. Nous retrouverons d'autres exemples dans le paragraphe suivant.

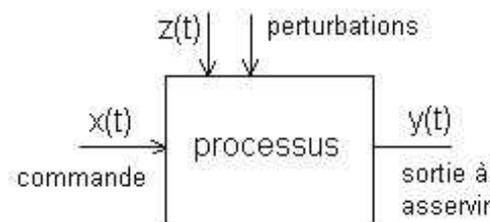


0.3 Commande directe (en boucle ouverte)

Supposons connaître un modèle mathématique parfait décrivant le fonctionnement du processus entre la commande $x(t)$ et la sortie $y(t)$. Ce modèle mathématique peut être une équation différentielle, une fonction de transfert ou une représentation vectorielle. Il paraît alors assez simple de déterminer la loi de commande $x(t)$ permettant d'obtenir $y(t) = y_e(t)$.

Nous pourrions alors envisager d'asservir $y(t)$ par une commande directe.

Outre que l'hypothèse de départ est utopique (on ne peut pas avoir un modèle mathématique parfait), mais surtout cette commande directe ne pourrait pas donner satisfaction car $y(t)$ ne dépend pas seulement de $x(t)$ mais est aussi sensible à d'autres grandeurs qui varient de façon imprévisible et qu'on appelle **perturbations**.



Les quatre exemples ci-dessous nous permettent de bien comprendre cette notion.

Exemple 1. Soit l'asservissement de la vitesse $y(t)$ d'une voiture électrique. Pour agir sur $y(t)$ on fait varier la tension d'induit $x(t)$ des moteurs. Mais la vitesse du véhicule est aussi sensible à la vitesse frontale du vent (et à son sens), à la pente de la route, à la charge, etc...

Exemple 2. Soit l'asservissement de la température $y(t)$ au centre d'une pièce chauffée par des radiateurs de chauffage central. Pour agir sur $y(t)$ on fait varier le débit d'eau $x(t)$ dans les radiateurs par l'intermédiaire d'une petite vanne. Mais la température dans le local est aussi sensible à la température de l'eau qui circule, à la température extérieure, à l'ouverture d'une porte ou d'une fenêtre, au nombre de personnes qui entrent, etc...

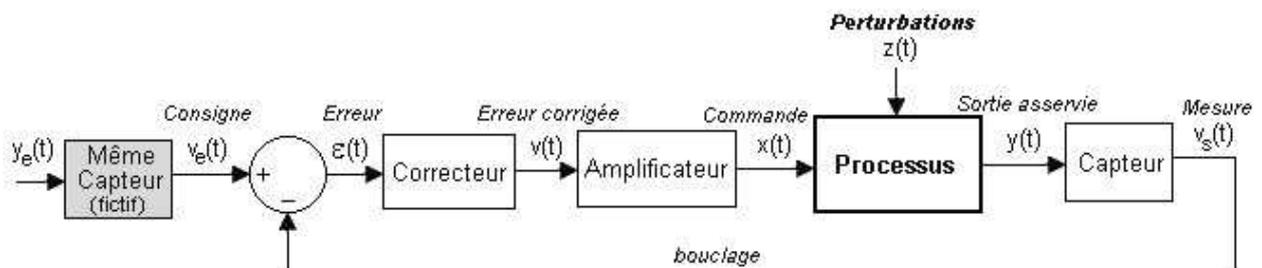
Exemple 3. Soit l'asservissement de l'altitude $y(t)$ d'une montgolfière. Pour agir sur $y(t)$ on fait varier le débit $x(t)$ de gaz propane des brûleurs. Mais l'altitude du ballon est aussi sensible à la température extérieure, aux courants d'air ascendants ou descendants, à la charge dans la nacelle, etc...

Exemple 4. Soit l'asservissement de l'épaisseur $y(t)$ de feuilles de plastique derrière les rouleaux du laminoir. Pour agir sur $y(t)$ on fait varier la pression hydraulique $x(t)$ (dans un vérin) donc la force s'exerçant entre les deux rouleaux. Mais l'épaisseur du film de plastique est aussi sensible à la température des rouleaux, à la vitesse de laminage, etc...

Nous voyons donc bien que lorsqu'une perturbation se manifeste, il faudra réagir sur la commande pour rétablir $y(t)$ à sa valeur de consigne. Ceci ne peut être obtenu que par une structure bouclée.

0.4 Commande en boucle fermée

La structure générale d'un asservissement peut se ramener au schéma fonctionnel ci-dessous:



Le capteur permet de convertir la grandeur physique $y(t)$ en une tension de mesure $v_s(t)$. Il est impératif que le capteur soit fiable, précis, vélocé, et insensible à l'environnement (pas de perturbation). Un capteur de qualité est cher, mais on ne peut pas réaliser un bon asservissement avec un mauvais capteur! On peut simplement supposer que le capteur pourra être représenté par un gain de conversion λ : $v_s(t) = \lambda \cdot y(t)$

Le comparateur doit avoir les mêmes qualités que le capteur, mais c'est plus aisé. La consigne sera générée directement sous forme électrique par un générateur de fonction. Mais que représente la tension $v_e(t)$?

C'est très simple mais très important: la tension $v_e(t)$ est la tension qui serait donnée en sortie du même capteur (rigoureusement le même que celui qui a été disposé dans la boucle) soumis à la consigne physique $y_e(t)$. Donc: $v_e(t) = \lambda \cdot y_e(t)$.

Inversement une tension $v_e(t)$ donnée représente une consigne physique $y_e(t) = v_e(t) / \lambda$. Exemple: soit un asservissement de vitesse d'un train utilisant un capteur de vitesse de gain $\lambda = 0,1 \text{ V}/(\text{m/s})$. Si l'on veut afficher une vitesse de consigne constante de 30 m/s il suffit de régler la tension v_e à 3 V.

Le comparateur fournit une tension appelée signal d'erreur: $\varepsilon(t) = v_e(t) - v_s(t)$. Le correcteur transforme ce signal d'erreur en une tension de commande $v(t)$ (qu'on appelle aussi erreur corrigée suivant qu'on regarde en amont ou en aval).

L'amplificateur de puissance et l'actionneur permettent simplement de convertir la tension de commande $v(t)$ en une commande physique $x(t)$ adaptée au processus. Cet

ensemble amplificateur-actionneur peut lui aussi être soumis à des perturbations sans que cela nuise aux performances de l'asservissement.

Rôle du correcteur:

C'est de délivrer une tension de commande $v(t)$ adéquate tout en maintenant le signal d'erreur proche de zéro.

En effet si on avait $\varepsilon(t) = 0$ on aurait $v_s(t) = v_e(t)$ donc $y(t) = y_e(t)$: C'est ce que nous souhaitons.

Bien sûr il n'est pas possible de maintenir le signal d'erreur à zéro au moment où une perturbation se manifeste ou à un changement brutal de la consigne, mais le correcteur va réagir à cette variation pour fournir la bonne tension de commande afin de retrouver une erreur négligeable le plus rapidement possible.

0.5 Exemples naturels de fonctionnement en boucle fermée

Dans notre comportement quotidien nous sommes pratiquement toujours "en boucle fermée". Pour chaque tâche nous disposons d'un capteur (un de nos cinq sens, et surtout la vue), d'un correcteur (notre cerveau), d'un amplificateur de puissance et d'un actionneur (muscles et articulations) pour commander le processus qui nous occupe.

Exemple 1. Quand nous écrivons sur une feuille de papier, la consigne est de suivre le trait droit tracé. Essayez d'écrire droit en fermant les yeux!

Exemple 2. La maman qui remplit la mini-baignoire du bébé trempe son coude dans l'eau pour obtenir un mélange eau chaude - eau froide correspondant à une consigne qu'elle s'est fixée. On peut imaginer le drame si elle remplit la baignoire "en boucle ouverte" et qu'elle y plonge d'un coup le bébé!

Exemple 3. La ménagère qui prépare un boeuf bourguignon à la cocotte minute entend de loin le bruit que fait la soupape et réagit sur le réchaud pour assurer une cuisson optimale. Si elle s'absente, c'est brûlé!

Exemple 4. Le parfumeur (qu'on appelle un "nez") mélange des essences de base pour obtenir un parfum proche de la consigne qu'il s'est fixé.

Exemple 5. Le grand cuisinier (avec la toque blanche) goûte sa sauce et rectifie jusqu'à obtenir la saveur qu'il s'est fixé en consigne.

D'autre part on peut constater que les asservissements parmi les plus performants sont biologiques. Exemple: la régulation de la température du corps humain à 37°C de consigne. A 39 rien ne va plus!

Il est à souhaiter que les responsables politiques et économiques aient les bases de la commande en boucle fermée.

Comme nous le verrons dans ce cours ce n'est pas si simple car l'existence de cette boucle (indispensable, comme nous l'avons vu, pour réagir aux perturbations) crée d'autres problèmes qui n'existaient pas en boucle ouverte, en particulier le problème de la stabilité.

Ce qui est sûr c'est qu'en boucle ouverte on ne peut pas atteindre l'objectif qu'on s'est fixé. Ce serait comme marcher les yeux fermés!

0.6 Problème posé par la boucle

Nous avons vu que le correcteur devait fournir à sa sortie une tension de commande adéquate en ayant à l'entrée une tension d'erreur qui doit être négligeable.

On pourrait croire qu'un amplificateur de tension avec un très grand gain réglerait l'affaire. Il n'en est rien. Car si on met trop de gain dans la boucle, celle-ci devient instable, et plutôt que d'avoir réalisé un asservissement, on obtient un oscillateur: $y(t)$ augmente puis diminue périodiquement lorsque la consigne est constante! Autrement dit c'est pire qu'en boucle ouverte!

Par contre il existe un système qui permet d'engendrer n'importe quelle tension constante en sortie en ayant une tension nulle à l'entrée: c'est l'intégrateur. En effet l'intégrale de zéro est une constante.

Malheureusement l'intégrateur diminue sensiblement les performances dynamiques du système bouclé. Nous pouvons retrouver des performances dynamiques acceptables grâce à une action dérivée qui a un effet d'anticipation sur les perturbations car elle réagit non pas au signal d'erreur mais à sa vitesse de variation.

Ainsi un correcteur P.I.D. (actions Proportionnelle, Intégrale et Dérivée) donne dans beaucoup d'applications des résultats souvent satisfaisants.

Non seulement la boucle doit être stable mais elle doit être bien amortie de façon qu'à chaque variation du signal d'erreur (changement de consigne ou perturbation), elle réagisse sans osciller. Pour ce faire on est toujours obligé d'adopter un gain de boucle assez faible, ce qui est au détriment de la vitesse et de la précision. Dans toute boucle si on augmente le gain on améliore la vitesse et la précision, mais on diminue l'amortissement et de ce fait $y(t)$ retrouve sa valeur avec des oscillations plus ou moins bien amorties. Bien sûr si on dépasse une valeur de gain appelée "gain critique", la boucle oscille en permanence, et cette boucle ne peut plus s'appeler un asservissement.

Les performances d'un asservissement seront chiffrées par 3 qualités: la précision, la vitesse, et l'amortissement.

Il y a donc toujours un dilemme entre le couple de qualités précision-vitesse et la qualité amortissement.

Fin du chapitre 0

Ces notions de systèmes bouclés ne seront reprises mathématiquement qu'au chapitre 5. Car maintenant il faut d'abord maîtriser de nouveaux outils pour aborder l'étude des asservissements avec aisance. Les chapitres 1 à 4 vous permettront d'acquérir les connaissances nécessaires avant d'aborder le vif du sujet.

Chapitre 1

Transformation de Laplace.

Relation Équation Différentielle - Fonction de Transfert.

1.1 Transformée de Laplace, définition, conventions

Les intérêts de cette transformation sont: une simplification très importante des solutions mathématiques recherchées et une généralisation facile de certains résultats.

Elle consiste à étudier le comportement des systèmes (caractérisé dans notre **monde réel** par des fonctions du temps t) dans un **monde symbolique** où la variable n'est plus le temps t mais une variable symbolique p .

A toute fonction $f(t)$ dans notre monde réel correspondra une fonction $F(p)$ dans le monde symbolique. Cette fonction sera appelée: *image* de $f(t)$. Inversement $f(t)$ sera appelée: *originale* de $F(p)$. Ce passage du monde réel au monde symbolique est défini par la transformée de Laplace suivante:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = \textit{image} \text{ de } f(t)$$

Par convention nous adopterons toujours les lettres minuscules pour les fonctions du temps et leurs homologues majuscules pour les images. Exemples:

Une tension $v(t)$ dans le monde réel deviendra $V(p)$ dans le monde symbolique.

Un débit $q(t)$ deviendra $Q(p)$.

Une vitesse angulaire $\omega(t)$ deviendra $\Omega(p)$.

Ainsi si on oublie de préciser la variable (t ou p) dont dépend la fonction, on peut le savoir simplement grâce à cette convention.

Au début l'introduction de ce monde symbolique (donc irréel) vous paraît une chose très abstraite donc difficile à dominer. Mais très vite vous constaterez que des opérations difficiles à faire dans notre monde réel comme par exemple la résolution d'une équation différentielle, devient une opération élémentaire dans ce monde symbolique. Petit à petit on découvre que la vie dans ce monde symbolique est beaucoup plus simple.

Par contre, une grave erreur à ne pas commettre serait de faire apparaître dans une même expression les variables t et p ! Elles n'appartiennent pas au même monde!!!

Nous allons maintenant examiner les principales propriétés de la Transformée de Laplace. Seules ces propriétés doivent être connues. Il ne sera jamais demandé de calculer une transformée. Vous pourrez donc très vite oublier cette intégrale bornée!

1.2 Somme de fonctions, multiplication par une constante

Dans l'expression de l'intégrale de Laplace (voir page précédente), si on remplace $f(t)$ par une somme de fonctions:

$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ on pourra séparer l'intégrale en une somme de trois intégrales correspondant chacune à l'image d'une des trois fonctions. Ainsi:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p)$$

De même, si on multiplie $f(t)$ par une constante k , on peut sortir cette constante de l'intégrale et on en déduit que l'image est simplement multipliée par k :

$$\mathcal{L}[k.f(t)] = k.F(p)$$

L'image d'une somme de fonctions est la somme des images. Si on multiplie la fonction par une constante, l'image est multipliée par la même constante. Si on s'arrêtait là, ça n'aurait aucun intérêt cette transformée!

1.3 Dérivation et Intégration

1.3.1 Dérivation d'une fonction: soit $g(t)$ la dérivée de $f(t)$. On veut exprimer $G(p)$ en fonction de $F(p)$.

$$\mathcal{L} g(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} . g(t) . dt$$

On va intégrer par partie: on pose $u = e^{-pt}$ et $g(t).dt = dv$
d'où $du = -p.e^{-pt}.dt$ et $v = f(t)$ puisque $g(t)$ est la dérivée de $f(t)$:

$$\mathcal{L} g(t) = \left[e^{-pt} . f(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} . f(t) . dt = p.F(p) - f(0)$$

Donc dans le monde symbolique, la dérivation d'une fonction consiste à la multiplier par p et ensuite retrancher une constante correspondant à la valeur initiale de la fonction originale.

Si on extrapole le résultat précédent aux dérivées successives de $f(t)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(t) &= F(p) \\ \mathcal{L} f'(t) &= p.F(p) - f(0) \\ \mathcal{L} f''(t) &= p[p.F(p) - f(0)] - f'(0) \\ \mathcal{L} f'''(t) &= p\{p[p.F(p) - f(0)] - f'(0)\} - f''(0) \end{aligned}$$

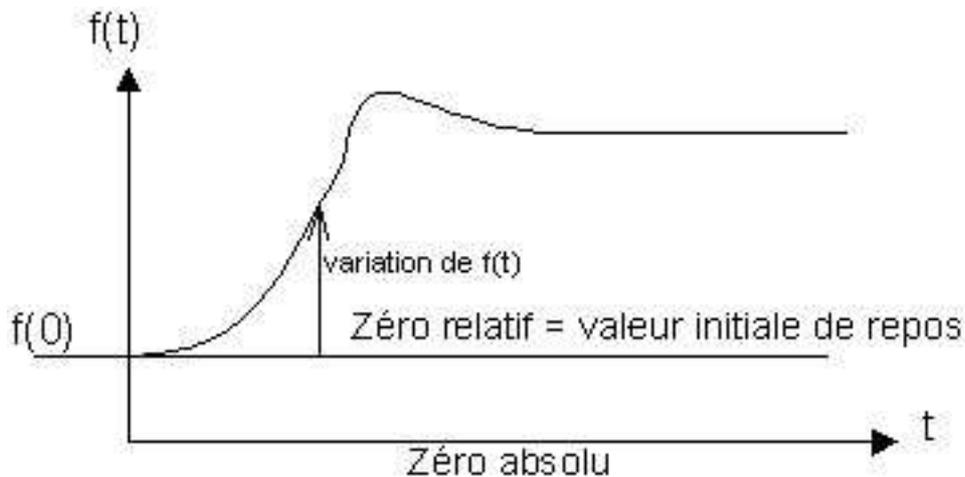
On se rend compte que ça se complique beaucoup à cause des conditions initiales non nulles.

Ainsi, nous nous placerons toujours (aussi bien en théorie qu'en pratique) dans des conditions qui vont simplifier énormément les résultats ci-dessus.

Nous nous placerons toujours dans l'hypothèse suivante: le système qui va générer la fonction $f(t)$ en réponse à une excitation d'entrée doit être initialement au **repos** c'est-à-dire que $f(t)$ doit être **constant** avant qu'on applique un signal de commande.

Ainsi dans les expressions précédentes: $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et de façon générale toutes les valeurs initiales des dérivées successives de $f(t)$ sont nulles.

Seule subsiste la valeur $f(0)$ qui n'est pas nulle. Il suffira de considérer que les fonctions du temps calculées (théorie) ou enregistrées (pratique) ne seront pas comptées à partir du zéro absolu mais seront comptées à partir de la valeur initiale de repos.



Autrement dit, ce qui nous intéresse c'est la **variation** de $f(t)$ par rapport à sa valeur initiale de repos.

Exemple: si on enregistre la température de l'eau dans une casserole à partir du moment où on allume le réchaud, le zéro absolu est loin! Ce que l'on va enregistrer c'est la variation de température à partir de la valeur initiale de repos qui correspond à la température ambiante.

Il faudra toujours respecter ces conditions. Ainsi la notion de dérivation dans le monde symbolique devient un jeu d'enfant:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p) \quad \text{avec } f(0) = 0 \qquad L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$$

Le calcul de la dérivée 7^{ème} d'une fonction du temps $f(t)$ quelconque est très long et fastidieux. Dans le monde symbolique, il suffit de multiplier l'image de $f(t)$ par p^7 .

1.3.2 Intégration d'une fonction. Nous venons de voir que, en respectant les conditions sur les valeurs initiales nulles, dans le monde symbolique la dérivation d'une fonction consiste à multiplier son image par p . Si maintenant on intègre la fonction obtenue après dérivation, on doit retrouver la fonction initiale: ainsi il faut rediviser par p donc multiplier par $1/p$. Il vient:

$$L\left[\int f(t).dt\right] = \left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

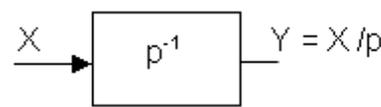
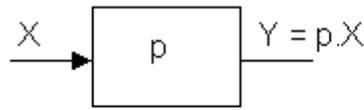
1.3.3 Nous pouvons dès maintenant introduire la notion de Fonction de Transfert à propos du dérivateur et de l'intégrateur. Nous introduirons également la représentation d'une fonction de transfert par un graphe de transfert.

Ces notions seront reprises très en détails dans le chapitre 4, mais cela ne pose aucune difficulté de les découvrir maintenant.

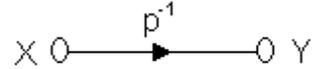
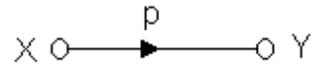
Monde réel
(Equ. Différentielle)



Monde symbolique
(Fonction de Transfert)



Graphes de Transfert



On remarque que dans le monde symbolique pour exprimer la sortie d'un système, il suffit de multiplier l'entrée par la fonction de transfert du système.
La fonction de transfert du dérivateur est: $Y/X = p$ et celle de l'intégrateur est $Y/X = 1/p$

1.3.4 Exemples physiques de dérivateurs et d'intégrateurs.

Exemples électriques:

Prenons une self d'inductance L traversée par un courant instantané $i(t)$.

La tension instantanée à ses bornes sera $v(t) = L.di(t)/dt$

En posant $V(p) = L v(t)$ et $I(p) = L i(t)$ on obtient: $V(p) = L.pI(p)$ et la fonction de transfert de la self est alors $V(p)/I(p) = Lp$.

Prenons maintenant un condensateur de capacité C dans les mêmes conditions d'expérience. On aura $v(t) = 1/C.∫i(t)dt$

Remarque: Le symbole $∫$ doit se lire: Somme de 0 à t (c'est une intégrale).

Donc $V(p) = 1/C. I(p)/p$ et la fonction de transfert du condensateur est alors $V(p)/I(p) = 1/Cp$.

L'inductance est un dérivateur de courant et la capacité est un intégrateur de courant.

Exemples mécaniques analogues:

Prenons une masse M se déplaçant à une vitesse instantanée $v(t)$.

La force $f(t)$ qu'elle engendrera est proportionnelle à son accélération donc à la dérivée de sa vitesse: $f(t) = M.dv(t)/dt$ d'où $F(p) = M.pV(p)$ et la fonction de transfert de la masse est alors $F/V = Mp$.

Faisons la même expérience avec un ressort de raideur R . Cette fois la force instantanée engendrée est proportionnelle à l'élongation du ressort c.à.d. à la position instantanée de l'extrémité déplacée. La vitesse $v(t)$ étant la dérivée de la position, la position est donc l'intégrale de la vitesse. Ainsi $f(t) = R.∫v(t)dt$ d'où $F(p) = R.V(p)/p$ et la fonction de transfert du ressort est alors $F/V = R/p$.

La masse est un dérivateur de vitesse et le ressort est un intégrateur de vitesse.

Exemple hydraulique.

Prenons un récipient de section S . On le remplit avec un débit instantané $q(t)$.

Le volume instantané contenu sera l'intégrale du débit et la hauteur de liquide $h(t)$ est égale au volume divisé par la section du récipient: $h(t) = 1/S.∫q(t)dt$ d'où $H(p) = 1/S.Q(p)/p$ et la fonction de transfert du récipient est alors $H/Q = 1/Sp$.

Le récipient est un intégrateur de débit.

Vous remarquerez l'analogie parfaite avec le condensateur.

De même en thermique nous parlons de capacité thermique. Il existe des analogies de

fonctionnement dans tous les domaines de la physique. Nous reviendrons sur la mise en équations des systèmes dans le chapitre 4 (paragraphe 4.5).

1.4 Retard

Supposons connaître l'image $F(p)$ d'une fonction du temps $f(t)$ nulle avant l'instant initial.

Déterminons l'image de la même fonction mais retardée d'un temps T par rapport à l'instant initial. La valeur à un instant t de cette nouvelle fonction est égale à la valeur de la fonction de départ à l'instant $(t - T)$. Calculons l'image de $f(t - T)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(t - T) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - T) dt && \text{on pose } u = t - T \text{ d'où } t = u + T \text{ et } du = dt \\ &= \int_{-T}^{\infty} e^{-p(u+T)} f(u) du = e^{-pT} \int_{-T}^{\infty} e^{-pu} f(u) du && \text{pour } t < 0 \text{ } f(u) \text{ est nulle} \\ &= e^{-pT} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-pT} F(p) \end{aligned}$$

La fonction de transfert d'un retard T est donc e^{-Tp} $\mathcal{L} f(t - T) = e^{-pT} F(p)$

1.5 Fonction amortie

Etudions l'influence d'un amortissement exponentiel d'une fonction du temps quelconque dont on connaît l'image. Calculons l'image de la fonction $f(t).e^{-at}$:

$$\mathcal{L} f(t).e^{-at} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t).e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} f(t) dt = F(p + a)$$

Ainsi, si une fonction du temps est amortie, son image s'obtient simplement en remplaçant p par $p+a$ (l'inverse de a correspond à la constante de temps de l'exponentielle, ceci sera vu en détail dans le chapitre 2)

$$\mathcal{L} f(t).e^{-at} = F(p + a)$$

1.6 Valeurs initiale et finale

Pour l'étude de la précision des asservissements on ne s'intéresse qu'à la valeur finale de la grandeur asservie. Nous verrons alors qu'il sera très simple de déterminer la valeur finale de cette fonction du temps sans connaître l'expression de cette fonction mais seulement son image.

La démonstration se fait en repartant de l'image de la dérivée $g(t)$ d'une fonction $f(t)$:

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = p.F(p) - f(0)$$

Faisons tendre p vers 0 dans les deux membres de cette égalité: $e^{-pt} \rightarrow 1$ et ainsi le premier membre est l'intégrale de $g(t)$ c.à.d. $f(t)$, donc:

$$[f(t)]_0^{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} [p.F(p)] - f(0) = f(\infty) - f(0) \quad \text{d'où} \quad \lim_{p \rightarrow 0} [p.F(p)] = f(\infty)$$

Maintenant faisons tendre p vers l'infini dans les deux membres de l'égalité du haut. Cette fois $e^{-pt} \rightarrow 0$ et on en déduit que $\lim_{p \rightarrow \infty} [p.F(p)] = f(0)$

Cette dernière relation est utile pour connaître la valeur initiale à $t = 0^+$ uniquement s'il y a discontinuité (c'est le cas par exemple de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre). Sinon on trouvera toujours une valeur initiale nulle, c'est notre hypothèse de travail (voir paragraphe 1.3).

La seule relation qui nous intéresse vraiment est celle qui permet de déterminer la valeur finale de $f(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p.F(p)]$$

Bien entendu dans la plupart des applications lorsqu'on multiplie $F(p)$ par p il apparaît une simplification par p (sinon en faisant tendre p vers 0 le résultat serait toujours nul).

Nous en avons terminé avec les propriétés de la Transformée de Laplace. Elles sont au nombre de 8 et il est souhaitable de les apprendre par cœur. Voici un récapitulatif :

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) \quad \mathcal{L}[k.f(t)] = k.F(p)$$

$$\mathcal{L} f(t - T) = e^{-pT} . F(p) \quad \mathcal{L} f(t).e^{-at} = F(p + a)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p.F(p) \quad \text{avec } f(0) = 0 \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n . F(p)$$

$$\mathcal{L} \left[\int f(t) . dt \right] = \left[\frac{F(p)}{p} \right] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p.F(p)]$$

1.7 Fonctions canoniques

Nous allons calculer (ce sera très facile) les images de trois fonctions très utilisées en asservissement : l'échelon de position, l'échelon de vitesse et l'échelon d'accélération (en Automatique on utilise une terminologie de mécanicien car les premiers

asservissements industriels réalisés furent de technologie entièrement mécanique comme par exemple le régulateur de vitesse à boules sur les machines à vapeur).
 Commençons par l'**échelon-unité** c.à.d. un échelon de une unité. Cette fonction sera nommée **u(t)**. Elle est initialement nulle, et vaut 1 pour t > 0.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot dt = \left[\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad \mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{p}$$

Si l'échelon a une amplitude de a unités alors son image est multipliée par a.

Si on intègre cet échelon on obtient la fonction a.t.u(t) qu'on appelle *échelon de vitesse* de a unités par seconde. La représentation de cette fonction est une rampe (de position) de pente a. Puisque cette fonction est l'intégrale de la précédente, son image est multipliée par 1/p.

Si on intègre une seconde fois on obtient la fonction a.t²/2 qu'on appelle un *échelon d'accélération* de a unités par seconde-carré. La représentation de cette fonction est une parabole (de position). Puisque cette fonction est l'intégrale de la précédente, son image est à nouveau multipliée par 1/p. Donc:

$$\mathcal{L} a \cdot u(t) = \frac{a}{p} \quad \mathcal{L} a \cdot t \cdot u(t) = \frac{a}{p^2} \quad \mathcal{L} \frac{a t^2}{2} \cdot u(t) = \frac{a}{p^3}$$

1.8 Transformation inverse

Il est très facile de travailler dans le monde symbolique, mais il est plus difficile de revenir dans le monde réel et pourtant c'est parfois nécessaire. Si ce n'est pas indispensable, on évite ce travail souvent long et fastidieux.

La transformation inverse consiste donc à trouver la fonction du temps f(t) correspondant à l'originale d'une fonction F(p) qui a été élaborée par des opérations simples dans le monde symbolique: $f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(p)$.

Trois méthodes s'offrent à nous, mais seule la dernière sera exploitée.

1.8.1 Transformée de Mellin-Fourier. C'est vraiment pour les "matheux"!

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} \cdot dp$$

1.8.2 Méthode des Résidus.

Pour chaque pôle de la fonction $H(p) = F(p) \cdot e^{pt}$ il existe un "résidu". Les pôles de $F(p) \cdot e^{pt}$ sont les pôles de F(p).

F(p) se met sous la forme d'un rapport: $F(p) = n(p)/d(p)$. Les pôles de F(p) sont les valeurs de p qui annulent d(p).

Supposons p_1 un des pôles de $F(p)$. Pour ce pôle il existe un résidu R_{p_1} :

Si p_1 est un pôle simple, on a $R_{p_1} = (p - p_1).H(p_1)$

Si p_1 est un pôle double, on a $R_{p_1} = (p - p_1)^2.H'(p_1)$ avec $H'(p) = dH(p) / dp$

Si p_1 est un pôle multiple d'ordre k , on a $R_{p_1} = (p - p_1)^k.H^{(k-1)}(p_1) / (k-1)!$

avec $H^{(k-1)}(p) = d^{k-1}H(p) / dp^{k-1}$

Pour obtenir $f(t)$ il suffit alors de faire la somme des résidus: **$f(t) = \sum [\text{Résidus de } H(p)]$**

Exemple:

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \quad \text{Les deux pôles simples sont } p_1 = -1 \text{ et } p_2 = -2$$

$$H(p) = \frac{(p+3)}{(p+1)(p+2)} e^{pt} \quad R_{p_1} = \left[\frac{p+3}{p+2} e^{pt} \right]_{p=-1} = 2e^{-t} \quad R_{p_2} = \left[\frac{p+3}{p+1} e^{pt} \right]_{p=-2} = -e^{-2t}$$

$$\text{donc: } f(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}] \cdot u(t)$$

Bien sûr toutes les fonctions du temps que nous trouvons sont considérées nulles avant l'origine du temps, c'est pourquoi on multiplie la fonction par $u(t)$ pour exprimer $f(t)$ en toute rigueur.

1.8.3 Table de Transformées de Laplace.

C'est grâce à cette table que nous pourrons exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs.

Cette table est présentée à la page suivante. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Evitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique.

Pour les fonctions $F(p)$ compliquées il faudra faire une décomposition de cette fonction en une somme d'éléments simples puis prendre l'originale de chaque élément afin d'en faire à nouveau la somme.

Il est préférable d'exprimer une exponentielle en faisant apparaître la valeur de la

constante de temps τ plutôt que son inverse a . En effet nous montrerons au chapitre

suivant que la durée de vie de cette exponentielle est égale à 7 fois τ . Ceci nous oblige à mettre $F(p)$ sous une forme canonique en mettant toutes les constantes en facteur.

Par exemple on transformera $(3p + 2)$ en $2(1 + 1,5p)$. La valeur 1,5 représente alors la constante de temps (1,5 s) de l'exponentielle qui interviendra dans la fonction $f(t)$. Ainsi on sait qu'au bout de $7 \times 1,5$ soit à peu près 10 secondes, l'exponentielle sera nulle.

Table de Transformées de Laplace

$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac	$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1 - (1+\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ Echelon unité	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$
e^{-Tp}	$\delta(t-T)$ Impulsion retardée	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t-T)$ Echelon retardé	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{1}{p^2}$	$t \cdot u(t)$ Rampe unitaire	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{1}{p^n}$ n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{p+z\omega_0}{\omega_0^2 + 2z\omega_0 p + p^2}$	$e^{-z\omega_0 t} \cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t)$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2)}$	$1 - \frac{\omega_0}{\omega_p} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \psi)$ avec $\psi = \arccos(z)$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$		

Remarque: Il est sous-entendu que toutes les fonctions du temps sont multipliées par $u(t)$, c'est-à-dire qu'elles sont nulles avant l'instant initial $t = 0$.

1.9 Relation Equation différentielle et Fonction de Transfert

Le fonctionnement d'un système linéaire compliqué, dont l'entrée de commande est $x(t)$ et la sortie observée est $y(t)$, peut être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n :

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + b_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + b_2 y'' + b_1 y' + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x$$

avec $y^{(n)} = dy^n / dt^n$ et m inférieur (ou au plus égal) à n .

La résolution de cette équation différentielle, pour une commande connue $x(t)$ et un état initial connu, est un travail de Titan! En effet il faut d'abord rechercher une solution générale sans second membre (et pour une équation différentielle d'ordre élevé ce n'est pas de la tarte), puis trouver une solution particulière avec le second membre (alors là il

faut du pif) et pour finir déterminer toutes les constantes d'intégration pour satisfaire aux conditions initiales!!!

Vous allez voir que dans le monde symbolique tout est très simple. Prenons l'image de cette équation différentielle.

On pose $Y = \mathcal{L} y$ et $X = \mathcal{L} x$.

Nous savons que l'image de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y est simplement $p^n Y$:

$$b_n p^n Y + b_{n-1} p^{n-1} Y + b_{n-2} p^{n-2} Y + \dots + b_2 p^2 Y + b_1 p Y + b_0 Y = a_m p^m X + a_{m-1} p^{m-1} X + \dots + a_2 p^2 X + a_1 p X + a_0 X$$

Nous pouvons mettre Y en facteur dans le premier membre et X dans le second:

$$(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) Y = (a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X$$

Il est donc excessivement simple d'exprimer Y en fonction de X :

$Y = T(p).X$ où $T(p)$ qu'on appelle Fonction de Transfert est un rapport de deux polynômes en p . Le polynôme du dénominateur de $T(p)$ est du $n^{\text{ième}}$ degré ce qui correspond à l'ordre n de l'équation différentielle:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n}$$

Mise de $T(p)$ sous **forme canonique**:

Si b_0 n'est pas nul, le système est dit de **classe 0** et la forme canonique de $T(p)$ est:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K_0 \frac{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_m p^m}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-1} p^{n-1} + \beta_n p^n}$$

avec $K_0 = a_0/b_0 =$ gain en position (gain statique), $\alpha_k = a_k/a_0$ et $\beta_k = b_k/b_0$.

Si $b_0 = 0$ et si b_1 est non nul, le système est dit de **classe 1** (un intégrateur) et la forme canonique de $T(p)$ est:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_1}{p} \frac{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_m p^m}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-2} p^{n-2} + \beta_{n-1} p^{n-1}}$$

avec $K_1 = a_0/b_1 =$ gain en vitesse, $\alpha_k = a_k/a_0$ et $\beta_k = b_{k+1}/b_1$.

Si $b_0 = 0$ et si $b_1 = 0$, le système est dit de **classe 2** (deux intégrateurs) et la forme canonique de $T(p)$ est:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_2}{p^2} \frac{1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_m p^m}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-3} p^{n-3} + \beta_{n-2} p^{n-2}}$$

avec $K_2 = a_0/b_2 =$ gain en accélération, $\alpha_k = a_k/a_0$ et $\beta_k = b_{k+2}/b_2$.

1.10 Fonction de Transfert quelconque: six éléments simples

Ce que l'on vient d'étudier au chapitre précédent conduit à une expression générale d'une fonction de transfert d'ordre n:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_i}{p^i} \frac{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-i} p^{n-i}}$$

i représente la classe du système (nombre d'intégrateurs).

Ainsi une fonction de transfert quelconque peut s'étudier comme étant i intégrateurs en cascade avec un système de classe 0 d'ordre $n-i$.

Le dénominateur de cette fonction de transfert de classe 0 est un polynôme de degré $n-i$.

Ce polynôme se factorise en facteurs du premier degré et en facteurs du second degré. Par exemple: un polynôme du 5^{ème} degré se factorise soit (s'il existe 5 racines réelles) en 5 facteurs du premier degré, soit (s'il n'existe que 3 racines réelles) en 3 facteurs du premier degré et un facteur du second degré, soit (s'il n'existe qu'une racine réelle) en un facteur du premier degré et deux facteurs du second degré:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_i}{p^i} \frac{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + a_1 p + b_1 p^2)(1 + a_2 p + b_2 p^2) \dots}$$

En effectuant le produit de facteurs on retrouve bien sûr le polynôme $(1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-i} p^{n-i})$.

On peut maintenant décomposer la fraction en une somme d'éléments simples et ceci sans avoir à factoriser le numérateur:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_i}{p^i} \left[\frac{A_1}{1 + \tau_1 p} + \frac{A_2}{1 + \tau_2 p} + \dots + \frac{B_1 + C_1 p}{1 + a_1 p + b_1 p^2} + \frac{B_2 + C_2 p}{1 + a_2 p + b_2 p^2} + \dots \right]$$

On voit donc qu'une fonction de transfert quelconque de classe 0 est en fait une somme de fonctions de transfert du premier ordre et du second ordre. Donc la réponse de ce système sera une somme de réponses de systèmes du premier et du second ordre. De plus:

$$\frac{B + Cp}{1 + ap + bp^2} = \frac{B}{1 + ap + bp^2} + \frac{Cp}{1 + ap + bp^2}$$

Cp est la fonction de transfert d'un dérivateur. Il ne reste donc plus comme éléments simples que les deux fonctions de transfert élémentaires:

du premier ordre: $\frac{A}{1 + \tau p}$ et du second ordre $\frac{B}{1 + ap + bp^2}$.

Nous pouvons donc conclure que la fonction de transfert d'un système linéaire, aussi compliqué soit-elle, pourra toujours s'étudier en associant des fonctions de transfert élémentaires. Exemple:

$$T(p) = \frac{7 + 40p + 68p^2 + 47p^3 + 17p^4}{1 + 7p + 18p^2 + 23p^3 + 17p^4 + 6p^5} = \frac{7 + 40p + 68p^2 + 47p^3 + 17p^4}{(1+3p)(1+2p)(1+p)(1+p+p^2)} = \frac{-1,786}{1+3p} + \frac{4,333}{1+2p} + \frac{2,50}{1+p} + \frac{1,953}{1+p+p^2} + p \frac{-1,238}{1+p+p^2}$$

Nous avons rencontré dans ce paragraphe cinq éléments simples auxquels il faut ajouter le retard pour être tout à fait général.

Les six éléments simples sont donc:

le gain K , l'intégrateur $1/p$, le dérivateur p , le premier ordre $1/(1+\tau p)$, le second ordre $1/(1+ap+bp^2)$, et le retard e^{-Tp} .

Avec ces six éléments simples on peut donc tout faire, c'est-à-dire étudier la réponse d'un système linéaire quelconque.

Fin du chapitre 1

Le chapitre suivant va donc consister à étudier en détails les réponses temporelles de ces systèmes élémentaires.

Les réponses du gain et du retard étant évidentes, on ne s'intéressera qu'aux réponses du dérivateur, de l'intégrateur, du premier ordre et du second ordre. Ces réponses sont données dans la table de Transformées de Laplace.

Chapitre 2

Réponse Temporelle des Systèmes Linéaires.

2.1 Réponse transitoire, réponse permanente

Nous voulons déterminer l'expression de la sortie $y(t)$ d'un système (dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle connue) soumis à une entrée de commande $x(t)$ donnée. La solution est très facile à exprimer dans le monde symbolique:

$Y(p) = X(p).T(p)$ où X est l'image de x , Y l'image de y et T la fonction de transfert du système (image de l'équation différentielle).

La méthode des "résidus" permet d'exprimer $y(t)$:

$$y(t) = \sum \text{Résidus de } H(p) \quad \text{avec } H(p) = T(p).X(p).e^{pt}$$

Les pôles de $H(p)$ se décomposent en n pôles de $T(p)$ et k pôles de $X(p)$ (souvent $k=1$). Il vient:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{1 \text{ à } n} \text{résidus de } H(p) \quad + \quad \sum_{1 \text{ à } k} \text{résidus de } H(p) \\ &= \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{relatifs aux pôles de } T(p)} \quad + \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{relatifs aux pôles de } X(p)} \\ &= y_T(t) \quad + \quad y_P(t) \end{aligned}$$

Si le système est stable, les pôles de $T(p)$ sont à partie réelle négative et les termes $e^{p_i t}$ tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

Ainsi $y_T(t)$ est un terme transitoire alors que $y_P(t)$ est le terme permanent:

$$y(t) = y_T(t) + y_P(t).$$

2.2 Réponse impulsionnelle des éléments simples

L'impulsion de Dirac est définie mathématiquement comme étant la dérivée d'un échelon unité parfait. Ce serait donc une impulsion (à l'instant $t=0$) d'amplitude infinie et de largeur nulle, dont la surface serait 1. Cette impulsion de Dirac est notée $\delta(t)$.

L'image de l'échelon unité étant $1/p$ et la fonction de transfert du dérivateur étant p , on en déduit:

$$\mathcal{L}\delta(t) = 1.$$

C'est l'unique fonction du temps dont l'image ne dépend pas de la variable symbolique p . Malheureusement cette fonction ne peut pas être réalisée en pratique.

Aussi puisque l'image de l'impulsion de Dirac est égale à 1, $Y_{IMP}(p) = T(p)$ pour n'importe quel système.

L'image de la réponse impulsionnelle d'un système quelconque s'identifie à sa fonction de transfert. Donc la réponse impulsionnelle est la fonction du temps "originale" de $T(p)$:

$$y_{imp}(t) = \mathcal{L}^{-1}T(p).$$

2.2.1 Dérivateur: $y(t) = dx(t)/dt$

La réponse impulsionnelle du dérivateur n'est pas définie.

2.2.2 Intégrateur: $y(t) = \int x(t)dt$

$T(p) = Y/X = 1/p$ $y_{imp}(t) = u(t)$.
l'échelon unité.

La réponse impulsionnelle de l'intégrateur est

2.2.3 Premier ordre: $\tau \cdot dy(t)/dt + y(t) = A \cdot x(t)$

$T(p) = Y/X = A/(1 + \tau p)$

$y_{imp}(t) = A/\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t)$

C'est une impulsion exponentielle.

Pour $t = 0$ $e^{-t/\tau} = 1 = 100\%$. Calculons le temps t_α tel que $e^{-t/\tau} = \alpha/100$:

$e^{t/\tau} = 100/\alpha$ d'où $t_\alpha = \tau \cdot \ln(100/\alpha)$.

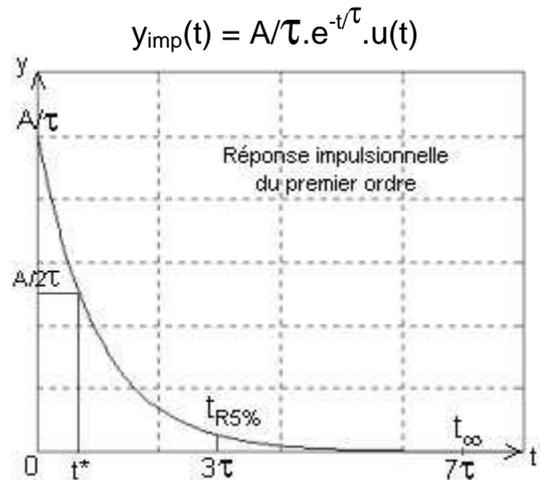
A.N.: $\alpha = 50\%$ $t^* = \tau \cdot \ln 2$

$\alpha = 36,8\%$ $t \cong \tau$

$\alpha = 5\%$ $t_{R5\%} = 3\tau$

$\alpha = 1\%$ $t_{R1\%} = 5\tau$

$\alpha < 0,1\%$ $t_\infty = 7\tau$



2.2.4 Second ordre: $b \cdot d^2y(t)/dt^2 + a \cdot dy(t)/dt + y(t) = B \cdot x(t)$

$T(p) = B/(1 + ap + bp^2)$ On pose $a = 2z/\omega_0$
et $b = 1/\omega_0^2$

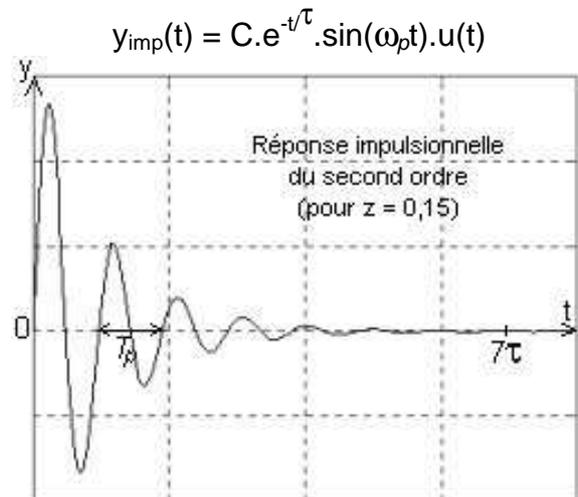
$\omega_0 = b^{-1/2} =$ pulsation naturelle et $z = 0,5a \cdot b^{1/2} =$ coefficient d'amortissement.

$T(p) = B/(1 + 2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2)$

Si $z < 1$ on a $y_{imp}(t) = C \cdot e^{-t/\tau} \cdot \sin(\omega_p t) \cdot u(t)$ C'est une sinusoïde amortie dans une enveloppe exponentielle.

avec $C = B \cdot \omega_p / (1 - z^2)$, $\omega_p = \omega_0(1 - z^2)^{1/2} =$

pulsation propre et $\tau = 1/z\omega_0 =$ constante de temps de l'enveloppe.



Au bout d'un temps $t_\infty = 7\tau$ $y(t)$ peut être considérée comme nulle.

La pseudo-période propre de la sinusoïde est: $T_p = 2\pi/\omega_p$.

Le maximum de cette fonction est: $y_{max} = B \cdot \omega_0 \cdot d \cdot e^{-0,5\pi z d}$ avec $d = (1 - z^2)^{-1/2}$.

Si z est supérieur ou égal à 1 on peut factoriser le dénominateur en deux facteurs du premier degré. Dans ce cas la réponse du système est simplement une somme de deux réponses du premier ordre. Les deux constantes de temps sont alors:

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0(z - \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

Si le coefficient d'amortissement z est inférieur à 1 le système est un second ordre élémentaire, on dit : système du second ordre pseudo-périodique.

Si z est supérieur ou égal à 1 ce n'est pas un second ordre élémentaire car on peut le décomposer en deux systèmes du premier ordre, on dit : système du second ordre aperiodique.

2.3 Réponse indicielle des éléments simples

Nous allons étudier la réponse des systèmes élémentaires à un échelon de commande:

$$x(t) = u(t) \quad [\mathcal{L}u(t) = 1/p].$$

Ainsi $Y_{IND}(p) = T(p) \cdot 1/p = Y_{IMP}(p) \cdot 1/p$.

On constate donc que pour n'importe quel système, donc pour $T(p)$ quelconque, la réponse indicielle est l'intégrale de la réponse impulsionnelle. Inversement la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle:

$$y_{imp}(t) = dy_{ind}(t)/dt \quad \text{et} \quad y_{ind}(t) = \int y_{imp}(t) \cdot dt.$$

Afin d'être plus proche de l'expérimentation, nous étudierons les réponses non pas à un échelon-unité, mais à un échelon de commande d'amplitude a : $x(t) = a \cdot u(t)$ [$X(p) = a/p$].

2.3.1 Dérivateur

$T(p) = p$ d'où: $Y_{IND}(p) = p \cdot a/p = a$ donc: $y_{ind}(t) = a \cdot \delta(t)$. C'est une impulsion de Dirac de surface a .

2.3.2 Intégrateur

$T(p) = 1/p$ d'où: $Y_{IND}(p) = 1/p \cdot a/p = a/p^2$ donc: $y_{ind}(t) = a \cdot t \cdot u(t)$. C'est une rampe de pente a (rampe de position), donc un échelon de vitesse de a unités par seconde. Nous savions déjà que pour générer une rampe il suffit d'intégrer un échelon.

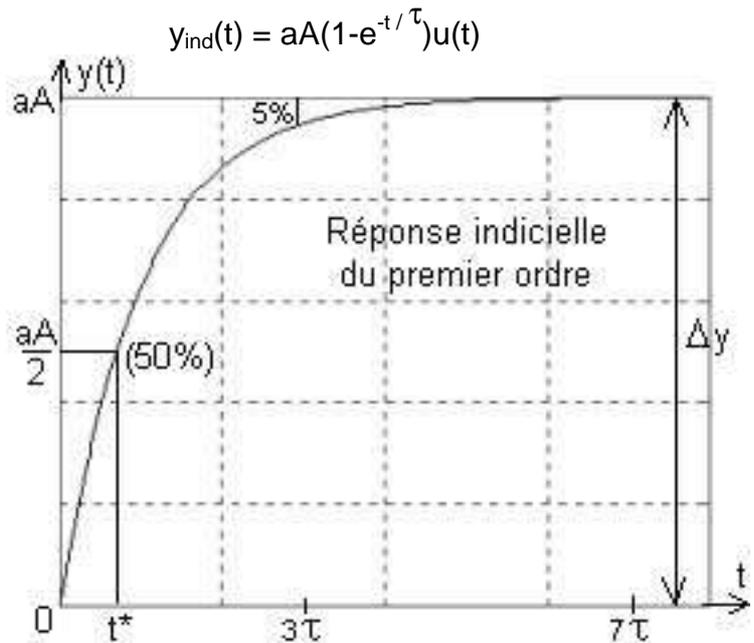
2.3.3 Premier ordre

$$T(p) = Y/X = A/(1 + \tau p) \quad \text{d'où:} \quad Y_{IND}(p) = [A/(1 + \tau p)] \cdot a/p = aA/[p(1 + \tau p)]$$

donc: $y_{ind}(t) = aA(1 - e^{-t/\tau})u(t)$. C'est une courbe exponentielle qui, à partir de la valeur initiale, varie de $\Delta y = a \cdot A$ où a représente l'amplitude de l'échelon et A le gain en

position (gain statique) du système.

Au paragraphe 2.2.3 nous avons déterminé les temps correspondants à des valeurs. Ainsi nous savons que le régime permanent est atteint au bout d'un temps $t_{\infty} = 7\tau$, que le temps de réponse à 5% vaut $t_{R5\%} = 3\tau$, et enfin que le temps à 50% de la variation est $t^* = \tau \ln 2$.



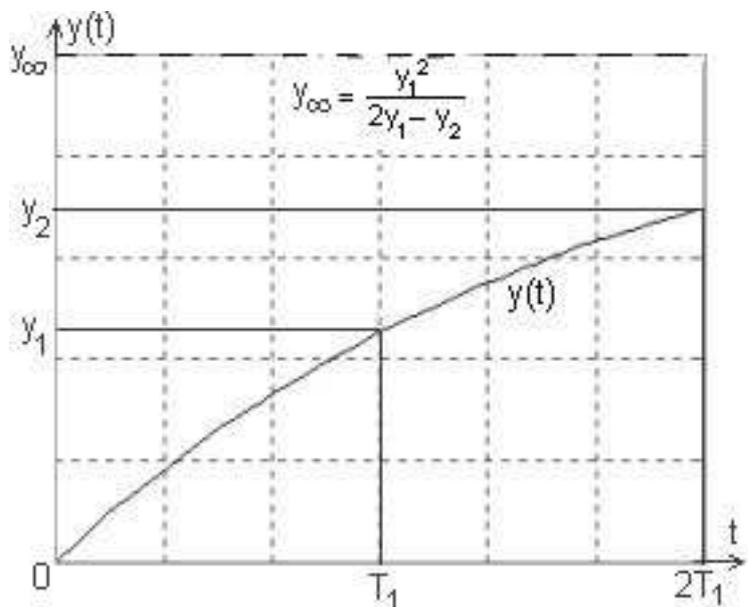
Identification: il s'agit grâce à cet enregistrement de retrouver la fonction de transfert $T(p)$ c'est-à-dire ici les valeurs de A et τ :

$$A = \Delta y / \Delta x = \Delta y / a \quad \tau = t^* / \ln 2 \cong 1,44 t^*$$

La mesure de t^* à 50% de la variation est précise et commode. La mesure de $t_{R5\%}$ est très peu précise car la pente de la courbe est faible.

Formule de Bureau:

Si la constante de temps est grande (cas des systèmes thermiques et hydrauliques), il faut beaucoup de temps pour atteindre la valeur finale. Or, si nous ne connaissons pas cette valeur finale nous ne pouvons pas identifier le système. La formule de Bureau permet de déterminer cette valeur finale y_{∞} en n'ayant enregistré qu'une partie de la réponse. Ce temps d'enregistrement sera alors divisé en 2, ainsi nous pourrons mesurer la valeur de y pour un temps T_1 : $y_1 = y(T_1)$, et pour un temps $2T_1$: $y_2 = y(2T_1)$.



$$y_1 = y_{\infty} (1 - e^{-T_1/\tau}) \quad \text{et} \quad y_2 = y_{\infty} (1 - e^{-2T_1/\tau})$$

$$y_1^2 = y_{\infty}^2 (1 - e^{-T_1/\tau})^2 = y_{\infty}^2 (1 - 2e^{-T_1/\tau} + e^{-2T_1/\tau})$$

$$2y_1 - y_2 = y_{\infty} (1 - 2e^{-T_1/\tau} + e^{-2T_1/\tau}) \quad \text{Le rapport } y_1^2 / (2y_1 - y_2) \text{ donne } y_{\infty}.$$

Attention: les valeurs y_1 , y_2 et y_{∞} doivent être déterminées par rapport à la valeur initiale (ici supposée nulle).

2.3.4 Second ordre

$$T(p) = Y/X = B/(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2) \quad \text{d'où}$$

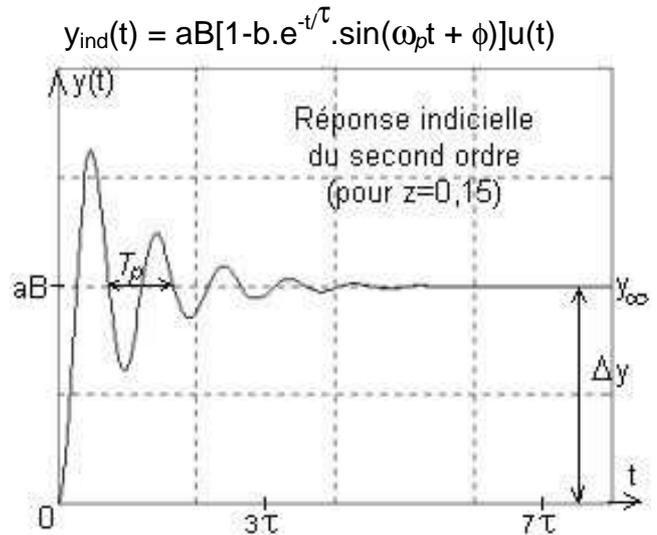
$$Y(p) = aB/[p(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2)]$$

donc: $y_{ind}(t) = aB[1 - b.e^{-t/\tau} . \sin(\omega_p t + \phi)]u(t)$.

C'est une sinusoïde amortie dans une enveloppe exponentielle qui, à partir de la valeur initiale, varie en régime établi de $\Delta y = a.B$ où a représente l'amplitude de l'échelon et B le gain en position (gain statique) du système,

avec $b = (1-z^2)^{-1/2}$, $\omega_p = \omega_0(1-z^2)^{1/2} =$ pulsation propre $\phi = \text{arc cos } z$

et $\tau = 1/z\omega_0 =$ constante de temps de l'enveloppe.



Temps de réponse à 5%: $t_{R5\%} = 3\tau$. Durée totale du régime transitoire: $t_\infty = 7\tau$.

Pseudo-période propre de la sinusoïde: $T_p = 2\pi/\omega_p$.

Calcul du maximum de $y_{ind}(t)$:

Le maximum correspond à l'annulation de la dérivée de $y_{ind}(t)$, c.à.d. de $y_{imp}(t)$. En se reportant au paragraphe 2.2.4 on sait que:

$y_{imp}(t) = 0$ pour $t_m = T_p/2 = \pi/\omega_p$, donc pour $\omega_p.t_m = \pi$.

Dans l'expression de y_{max} apparaît $\sin(\pi + \phi) = -\sin \phi$. Or $\cos \phi = z$.

D'où: $-\sin \phi = -(1-z^2)^{1/2} = -1/b$. Il y a une simplification: $b.\sin \phi = 1$. Il vient:

$$y_{max} = y(t_m) = aB[1 + e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}] = y_\infty[1 + D_1]$$

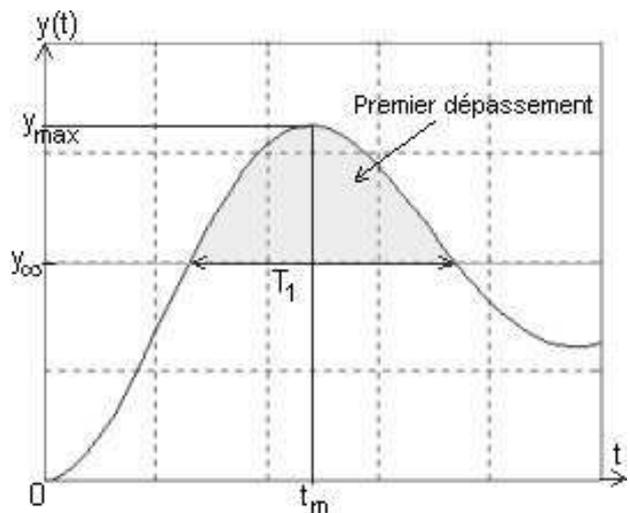
$$D_1 = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} = \text{premier dépassement relatif}$$

avec $\cos \phi = z$

$$D_1\% = 100.e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} = 100.e^{-\frac{\pi}{\tan \phi}}$$

$$e^{\frac{\pi}{\tan \phi}} = \frac{100}{D_1\%} \quad \text{d'où } \tan \phi = \frac{\pi}{\ln(100/D_1\%)}$$

Le temps de montée et le temps de premier dépassement sont égaux (une demi pseudo-période): $t_m = T_1 = T_p/2 = \pi/\omega_p$.



Identification: les mesures de Δy , de $D_1\%$ et de T_1 permettent l'identification du système (détermination de la valeur des 3 paramètres B , z et ω_0). Pour le gain statique: $B = \Delta y/\Delta x = \Delta y/a$. Pour z et ω_0 :

$$z = \cos\left[\arctan\frac{\pi}{\ln(100/D_1\%)}\right] \text{ et } \omega_0 = \frac{\pi}{T_1\sqrt{1-z^2}}$$

Exemple d'identification: on applique un échelon de commande de 2 unités. On mesure une variation $\Delta y = 3$ unités, un premier dépassement de 30% et un temps de montée de 0,75 s. Il vient: $B = 3/2 = 1,5$. Les formules ci-dessus donnent: $z = 0,358$ et $\omega_0 = 4,48$ rad/s.

La fonction de transfert du système est donc $T(p) = Y/X = 1,5/(1 + 0,16p + 0,05p^2)$.

D'autre part les extrêma de la fonction $y_{ind}(t)$ se produisent périodiquement pour $t = k.\pi/\omega_p$.

Ainsi les dépassements successifs s'expriment simplement en fonction du premier: $|D_k| = D_1^k$ (en valeur absolue car les dépassements impairs sont au-dessus de la valeur finale et sont donc positifs, alors que les dépassements pairs sont en dessous, donc négatifs). A.N.:

$z = 0,15$: $D_1=62,1\%$ $D_2=38,5\%$ $D_3=23,9\%$ $D_4=14,8\%$ $D_5=9,2\%$ $D_6=5,7$
 $D_7=3,5\%$ $D_8=2,2\%$ $D_9=1,4\%$ $D_{10}=0,8\%$

$z = 0,30$: $D_1=37,2\%$ $D_2=13,8\%$ $D_3=5,1\%$ $D_4=1,9\%$ $D_5=0,7\%$

$z = 0,45$: $D_1=20,5\%$ $D_2=4,2\%$ $D_3=0,8\%$

$z = 0,60$: $D_1=9,5\%$ $D_2=0,9\%$

$z = 0,75$: $D_1=2,8\%$ $D_2=0,0\%$

On peut donc, grâce à ces exemples, discuter de l'amortissement du système du second ordre en fonction de la valeur de z :

Pour $z = 0,15$ il y a 9 rebondissements supérieurs à 1% avant que la réponse ne se stabilise: l'amortissement est très faible.

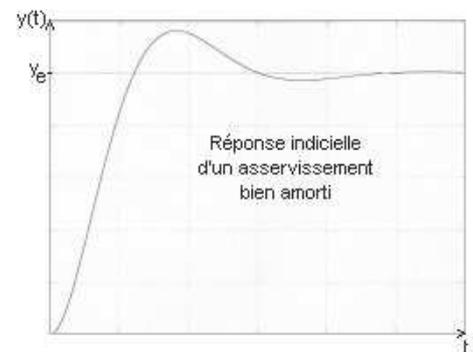
Pour $z = 0,30$ il y a encore 4 rebondissements: l'amortissement est faible.

Pour $z = 0,45$ il n'y a plus que 2 rebondissements: l'amortissement est acceptable.

Pour $z = 0,60$ il n'y a qu'un seul rebondissement (de l'ordre de 10%): l'amortissement est bon.

Pour $z = 0,75$ le premier dépassement est inférieur à 3%: l'amortissement est fort.

Pour des valeurs de z supérieures à 0,75 la réponse est presque comparable à celle d'un second ordre apériodique (très fort amortissement).



La relation qui donne le temps de montée (en bas de la page précédente) montre que celui-ci augmente avec z . Il y a donc un compromis entre la vitesse du système et son amortissement.

On essaiera toujours que la réponse indicielle d'un asservissement soit comparable à celle d'un second ordre bien amorti (z de l'ordre de 0,5). Pour $z = 0,5$ on a $D_1=16,3\%$.

2.4 Réponse à une rampe (échelon de vitesse)

On applique maintenant un échelon de vitesse de commande: $x=a.t.u(t)$ donc $X=a/p^2$.

2.4.1 Dérivateur

$T(p) = p$ d'où: $Y(p) = p.[a/p^2] = a/p$ donc: $y(t) = a.u(t)$. C'est un échelon d'amplitude a (correspondant à la pente de la rampe de commande).

2.4.2 Intégrateur

$T(p) = 1/p$ d'où: $Y(p) = [1/p].[a/p^2] = a/p^3$ donc: $y(t) = a.t^2/2.u(t)$. C'est une parabole (de position), donc un échelon d'accélération de a unités par seconde-carré.

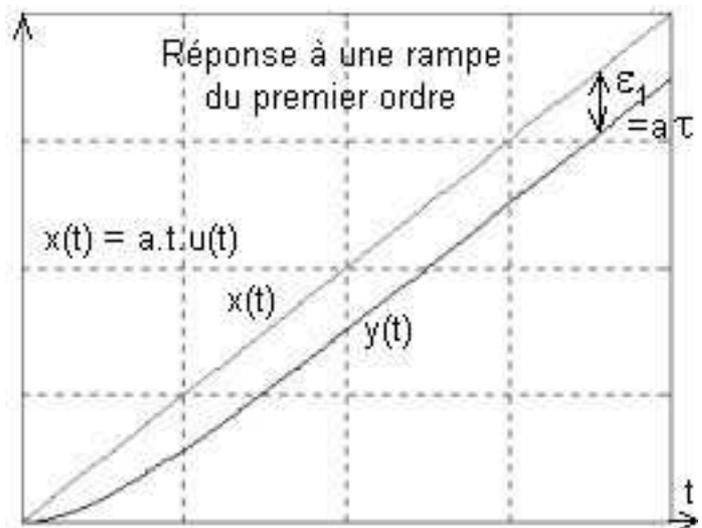
2.4.3 Premier ordre

Pour que la pente de la rampe de sortie ait la même pente que la commande il faut que le gain A en position (statique) du système soit de 1. Pour une valeur quelconque du gain A la réponse est de pente différente que celle de la rampe de commande (si $A < 1$ elle est plus petite, si $A > 1$ elle est plus grande).

Donc si A est différent de 1 les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ s'éloignent l'une de l'autre. Au contraire si $A=1$, en régime établi, les deux rampes ont même pente et il apparaît alors une erreur de traînage ε_1 .

$T(p) = Y/X = 1/(1 + \tau p)$ d'où: $Y(p) = [1/(1 + \tau p)].[a/p^2] = a/[p^2(1 + \tau p)]$
donc: $y(t) = a[t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}]u(t)$.

En régime établi (au bout de 7τ) c'est une rampe retardée d'un temps τ par rapport à $x(t)$.



Erreur de traînage $\varepsilon_1 = \lim [x(t) - y(t)]_{t \rightarrow \infty} = \lim [p(X - Y)]_{p \rightarrow 0} =$

$$\lim p\{a/p^2 - a/[p^2(1 + \tau p)]\}_{p \rightarrow 0} = \lim [a\tau/(1 + \tau p)]_{p \rightarrow 0} = a\tau$$

L'erreur de traînage est proportionnelle à la constante de temps du système.

Ainsi, si le système du premier ordre est un capteur dont la précision statique est supposée excellente, la mesure d'une grandeur qui varie en forme de rampe peut être

erronée si la constante de temps du capteur n'est pas négligeable. Pour une régulation la constante de temps du capteur n'a pas d'importance capitale. Par contre pour un asservissement où la consigne varie en permanence, il faut que la constante de temps du capteur soit négligeable (en pratique 100 fois plus petite que la plus grande constante de temps du processus).

2.4.4 Second ordre

De la même façon que pour le premier ordre, nous allons étudier la réponse du second ordre dont le gain en position (statique) est égal à 1.

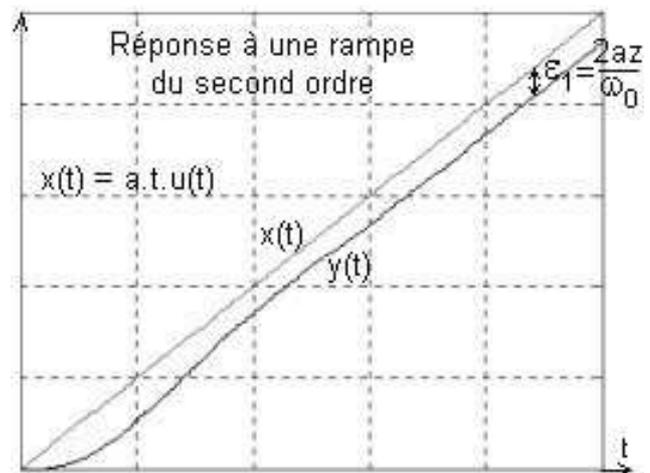
$$T(p) = Y/X = 1/(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2) \quad \text{d'où} \quad Y(p) = a/[p^2(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2)].$$

On obtient $y(t) = a[t - 2z/\omega_0 + e^{-t/\tau} \cdot q(t)]u(t)$ où $q(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_p .

En régime établi (au bout d'un temps $7/z\omega_0$), $y(t)$ est une rampe retardée d'un temps $2z/\omega_0$ par rapport à $x(t)$.

Erreur de traînage: bien sûr si l'on dispose de la fonction du temps, pour obtenir sa limite on fait tendre t vers l'infini. Utilisons néanmoins le théorème de la valeur finale pour déterminer cette erreur de traînage:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lim [x(t) - y(t)]_{t \rightarrow \infty} = \lim [p(X - Y)]_{p \rightarrow 0} = \lim p\{a/p^2 - a/[p^2(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2)]\}_{p \rightarrow 0} \\ &= \lim [a(2z/\omega_0 + p/\omega_0^2)/(1+2zp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2)]_{p \rightarrow 0} = 2az/\omega_0. \end{aligned}$$



2.5 Durée du régime transitoire

Nous avons montré au paragraphe 1.10 que la réponse temporelle d'un système quelconque peut être considérée comme une somme de réponses de systèmes élémentaires (en particulier du premier et du second ordre).

Nous avons vu aussi (paragraphe 2.2.3 et 2.2.4) que la durée du régime transitoire de la réponse d'un système élémentaire est de 7 fois la constante de temps (τ pour le premier ordre ou $1/z\omega_0$ pour le second ordre).

Donc c'est la constante de temps la plus grande qui détermine la durée totale du régime transitoire: $t_\infty = 7\tau_{\max}$.

Il faut par conséquent que le dénominateur de la fonction de transfert du système quelconque soit factorisé pour connaître la valeur de la plus grande constante de temps. Il faut prendre l'habitude d'écrire une fonction de transfert sous forme canonique factorisée et ordonnée, de façon à mettre en évidence en première position au dénominateur le facteur $(1 + \tau_{\max}p)$.

Si en outre le système possède un retard, sa valeur s'ajoute évidemment à cette durée.

Exemple: $T(p) = 3.e^{-8p} / [(1+3p)(1+1,5p)(1+p+p^2)]$. Le facteur du second degré correspond à un second ordre avec $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ et $z = 0,5$. Donc $1/z\omega_0 = 2 \text{ s}$. La plus grande constante de temps est donc celle de 3 s. La durée totale du régime transitoire est donc: $t_\infty = 7 \times 3 + 8 = 29 \text{ s}$ c.à.d. à peu près 30 secondes.

2.6 Réponse à une entrée quelconque. Produit de convolution

Attention: la fonction du temps originale d'un produit de deux images $Y_1(p).Y_2(p)$ n'est en aucune façon le produit $y_1(t).y_2(t)$!

Mais c'est un produit de convolution qu'on note $y(t) = y_1(t)*y_2(t)$.

Le produit de convolution est une intégrale [le symbole \int doit se lire: somme de 0 à t]:

$$y(t) = \int_0^t [y_1(w).y_2(t-w).dw] = \int_0^t [y_1(t-w).y_2(w).dw]$$

Nous savons que l'image de la réponse d'un système à une entrée de commande $x(t)$ quelconque est obtenue simplement en multipliant l'image de la commande $X(p)$ par la fonction de transfert $T(p)$ du système. Mais nous avons montré (paragraphe 2.2) que la fonction de transfert a la même expression que l'image $Y_{IMP}(p)$ de la réponse impulsionnelle. Ainsi $y(t)$ est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle $y_{imp}(t)$ par l'entrée de commande $x(t)$:

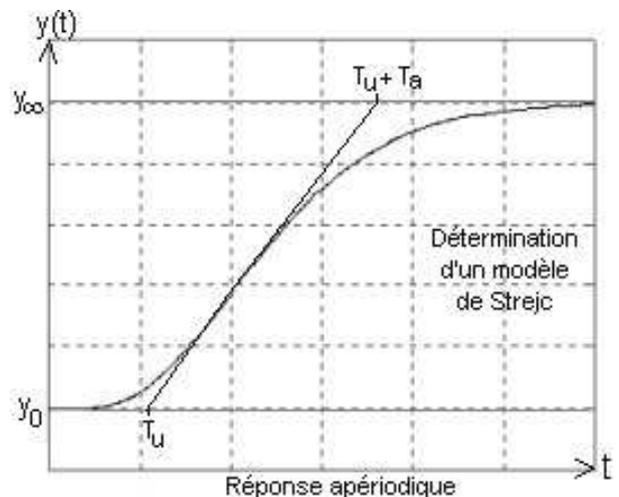
$$Y(p) = T(p).X(p) = Y_{IMP}(p).X(p) = pY_{IND}(p).X(p) = Y_{IND}(p).pX(p) \quad \text{d'où} \quad y(t) = y_{imp}(t)*x(t)$$

$$= y_{ind}(t)*x'(t) .$$

2.7 Modèle de Strejc (pour les systèmes aperiodiques d'ordre élevé)

Lorsque le système possède plusieurs constantes de temps, l'enregistrement de sa réponse indicielle ne permet pas d'identifier la valeur de chacune des constantes de temps. On utilise alors un modèle simplifié possédant n constantes de temps identiques. Grâce à un retard bien choisi on peut alors pratiquement faire coïncider la réponse du modèle et celle du système à identifier.

La méthode consiste à tracer la tangente au point d'inflexion de $y(t)$ et d'en déduire la valeur des temps T_a et T_u . On compare alors le rapport T_u / T_a expérimental avec les rapports théoriques T'_u / T_a de la réponse indicielle d'un système ayant n constantes de temps identiques. On prend dans le tableau ci-dessous la valeur de n qui correspond au rapport T'_u / T_a immédiatement inférieur au rapport T_u / T_a expérimental.



T'_u / T_a	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493	0,570	0,642
n	2	3	4	5	6	7	8
T_a / τ	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699	6,226	6,711

La troisième ligne du tableau permet alors de calculer la valeur des n constantes de temps identiques (pour n donné, τ est proportionnelle au temps T_a).

Il ne reste plus qu'à compenser la différence pour une même valeur de T_a entre T_u / T_a et T'_u / T_a avec un retard τ :

$$\frac{T_u}{T_a} = \frac{T'_u + \tau}{T_a} \Rightarrow \tau = T_a \left(\frac{T_u}{T_a} - \frac{T'_u}{T_a} \right)$$

mesure tableau

La fonction de transfert obtenue est alors:

$$T(p) = \frac{A}{(1 + \tau p)^n} e^{-\tau p}$$

Remarque: la mesure du gain statique A est classique: c'est le rapport de la variation totale de $y(t)$ sur l'amplitude de l'échelon de commande.

Le modèle de Strejc est très utilisé pour l'identification des processus en boucle ouverte car 9 fois sur 10 la réponse indicielle en boucle ouverte est apériodique (comparable à la courbe de la page précédente). L'expression de cette fonction de transfert est simple et permet une synthèse correcte et aisée de l'asservissement.

Fin du chapitre 2

Dans le chapitre 3 nous allons étudier la réponse harmonique des systèmes linéaires.

Chapitre 3

Réponse Fréquentielle ou Harmonique des Systèmes Linéaires.

3.1 Réponse harmonique: définition

C'est le régime permanent de la réponse du système à une commande sinusoïdale.

3.2 Etude théorique de la réponse harmonique

Rappel: L'application de la propriété de la transformée de Laplace, démontrée au paragraphe 1.5, pour la fonction $u(t)$ est:

$$\mathcal{L} e^{-at}.u(t) = 1/(p+a).$$

Ainsi en posant $a = -j\omega$ on trouve que l'image de la fonction complexe $x(t) = e^{j\omega t}$ est $X(p) = 1/(p - j\omega)$.

L'image de la réponse temporelle d'un système de fonction de transfert $T(p)$ à cette commande est donc: $Y(p) = T(p) / (p - j\omega)$.

Nous avons montré au paragraphe 2.1 que la réponse permanente pouvait se calculer par la méthode des résidus en ne s'intéressant qu'aux pôles de $X(p)$.

Dans notre cas $X(p)$ ne possède qu'un seul pôle simple $p_1 = j\omega$. D'où:

$$y_P(t) = R_{p_1} = (p - p_1) [T(p).X(p).e^{pt}]_{p=p_1} = [T(p).e^{pt}]_{p=j\omega} = T(j\omega).e^{j\omega t} = T(j\omega).x(t).$$

Or $x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j.\sin(\omega t)$ et d'autre part $T(j\omega)$ est un nombre complexe qu'on peut définir en fonction de ces coordonnées polaires (module et argument): $T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\perp T(j\omega)}$.

Notations: $|T(j\omega)|$ doit se lire module de $T(j\omega)$ et $\perp T(j\omega)$ doit se lire argument de $T(j\omega)$.
 $y_P(t) = T(j\omega).x(t) = |T(j\omega)| e^{j\perp T(j\omega)}.e^{j\omega t} = |T(j\omega)| e^{j[\omega t + \perp T(j\omega)]} = |T(j\omega)| \{ \cos[\omega t + \perp T(j\omega)] + j.\sin[\omega t + \perp T(j\omega)] \}.$

Donc la réponse permanente d'un système linéaire de fonction de transfert $T(p)$ à une commande sinusoïdale $x(t) = E.\sin(\omega t)$ est:

$$y_P(t) = E.|T(j\omega)| .\sin[\omega t + \perp T(j\omega)].$$

C'est une sinusoïde de même pulsation que la sinusoïde de commande, modifiée en amplitude par la valeur d'un gain $G(\omega)$, et déphasée d'une valeur $\varphi(\omega)$ avec:

$G(\omega) = |T(j\omega)| = \text{gain}$ et $\varphi(\omega) = \perp T(j\omega) = \text{déphasage}$ (exprimé en degrés d'arc pour faciliter la corrélation entre les études théorique et expérimentale).

Ainsi l'étude de la réponse harmonique d'un système consiste simplement à étudier le nombre complexe $T(j\omega)$ qu'on appelle transmittance harmonique (ou transmittance complexe).

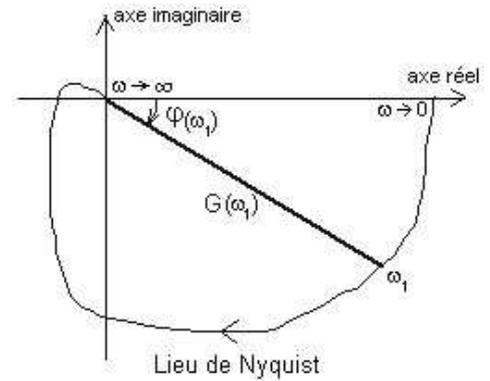
Le nombre complexe $T(j\omega)$ s'obtient simplement en remplaçant p par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $T(p)$.

3.3 Représentations d'un nombre complexe (Nyquist, Black, Bode)

3.3.1 Lieu de Nyquist

C'est la représentation du nombre complexe $T(j\omega)$ dans le plan complexe en faisant varier le paramètre ω de 0 à l'infini.

Le lieu de Nyquist est gradué en valeurs de ω .
 Pour des raisons de commodité on utilise du papier en coordonnées polaires.
 L'argument est exprimé en degrés d'arc.



3.3.2 Lieu de Black

C'est (à peu de chose près) le lieu de Nyquist de $\ln[T(j\omega)]$.

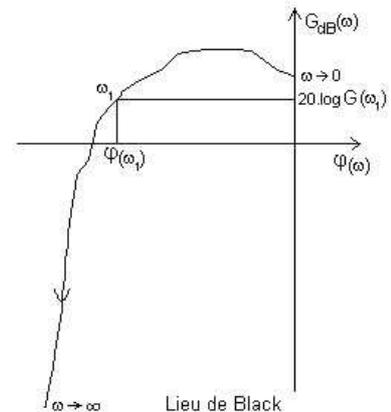
$$T(j\omega) = G(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{donc} \quad \ln[T(j\omega)] = \ln[G(\omega)] + j\varphi(\omega)$$

La partie réelle serait $\ln[G(\omega)]$ et la partie imaginaire serait $\varphi(\omega)$.

Dans le lieu de Black on intervertit les axes et on remplace le logarithme népérien par 20 fois le logarithme décimal (gain en dB):

$\varphi(\omega)$ en abscisses et $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log[G(\omega)]$ en ordonnées.

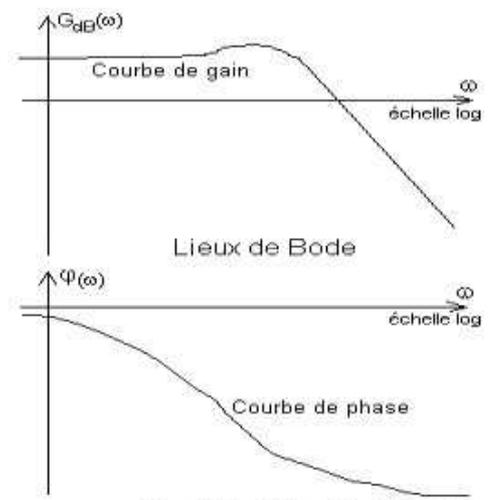
Le lieu de Black est gradué en valeurs de ω .



3.3.3 Lieux de Bode

C'est la représentation séparée des deux coordonnées du lieu de Black en fonction du logarithme décimal de la pulsation ω . Pour des raisons de commodité on utilise du papier semi-logarithmique qui permet de porter directement les valeurs de ω sur une échelle logarithmique.

Donc les lieux de Bode sont constitués d'une courbe de gain $G_{dB}(\omega)$ et d'une courbe de phase $\varphi(\omega)$.

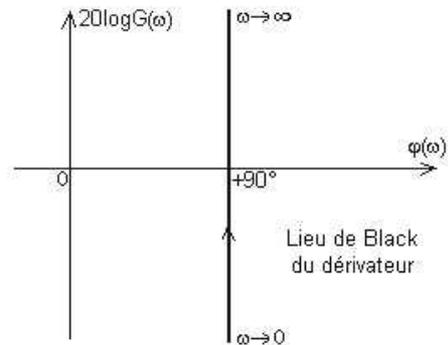
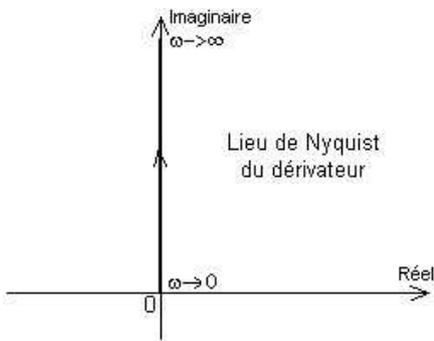


Les avantages de cette représentation sont triples:

- Continuité des valeurs du gain et du déphasage en fonction de la pulsation.
- Si on fait le produit de deux nombres complexes, les deux courbes de gain s'ajoutent ainsi que les deux courbes de phase.
- Les deux asymptotes de la courbe de gain (en basses pulsations et en hautes pulsations) sont dans tous les cas des demi-droites.

3.4 Lieux de transfert du dérivateur

$T(p) = p$ $T(j\omega) = j\omega$ C'est un imaginaire pur: $|T(j\omega)| = \omega$ et $\angle T(j\omega) = +90^\circ$.



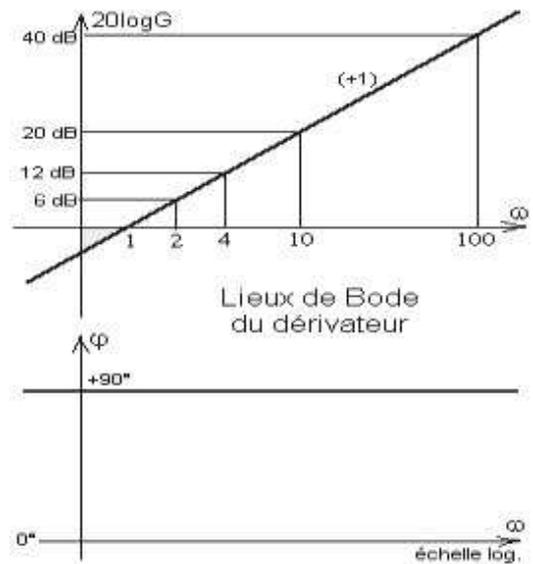
Lieux de Bode:

La courbe de gain est une droite de pente (+1), sachant que l'unité de pente est égale à 20 dB par décade (rapport 10 en pulsation). En effet $20\log 10 = 20$ dB.

Si on prend un écart de pulsation d'une octave (rapport 2), une pente (+1) montre une variation de gain de $20\log 2 \approx 6$ dB.

Pour tracer cette droite il est commode de prendre un écart de pulsation de deux octaves (rapport 4) et de reporter une variation de gain de 12 dB.

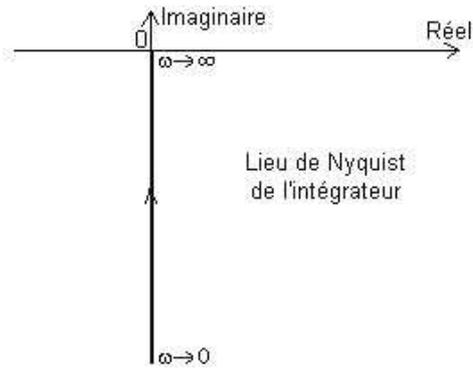
La courbe de phase est une constante (+90°) puisque le nombre complexe $T(j\omega)$ est un imaginaire pur.



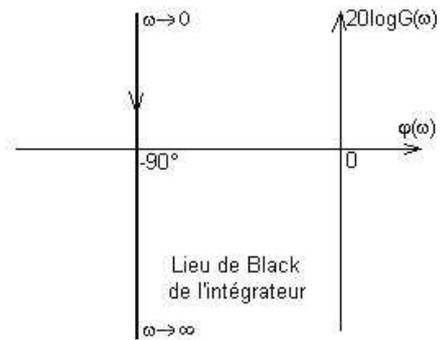
3.5 Lieux de transfert de l'intégrateur

$T(p) = 1/p$ $T(j\omega) = 1/j\omega$ C'est un imaginaire pur: $|T(j\omega)| = 1/\omega$ et $\angle T(j\omega) = -90^\circ$.

Lieu de Nyquist



Lieu de Black

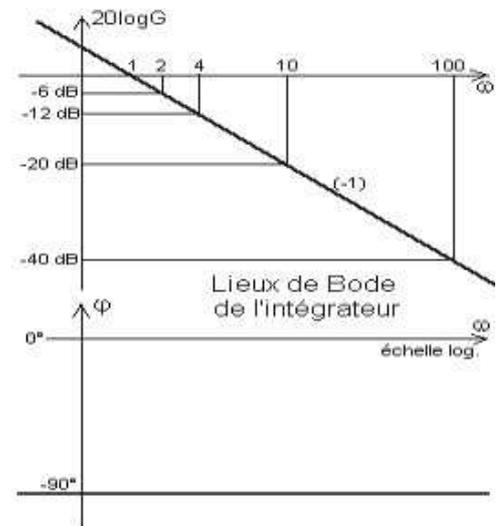


Lieux de Bode:

La courbe de gain est une droite de pente (-1), c.à.d. - 20 dB / décade = - 6dB / octave.

Pour tracer cette droite il est commode de prendre un écart de pulsation de deux octaves (rapport 4) et de reporter une variation de gain de - 12 dB.

La courbe de phase est une constante (- 90°) puisque le nombre complexe $T(j\omega)$ est un imaginaire pur négatif.



3.6 Lieux de transfert du premier ordre

$$T(p) = A/(1+\tau p) \quad T(j\omega) = A/(1 + j\omega\tau)$$

$$|T(j\omega)| = G(\omega) = A/(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \angle T(j\omega) = \varphi(\omega) = - \arctan(\omega\tau).$$

Quand ω varie de 0 à l'infini, $\varphi(\omega)$ varie de 0 à - 90°.

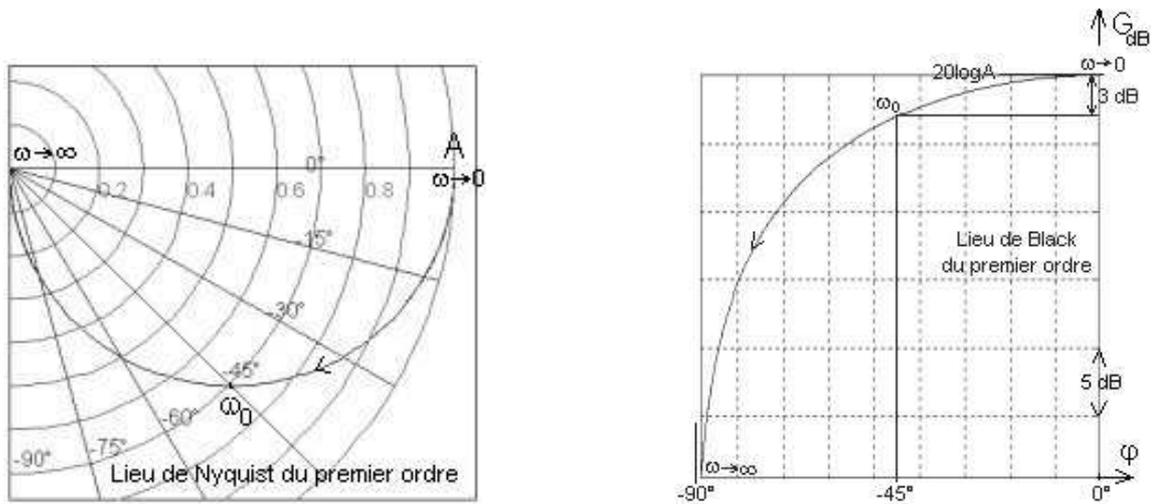
Une valeur caractéristique de ω : $\omega_0 = 1/\tau$ est telle que $\varphi(\omega_0) = - 45^\circ$.

On a alors $G(\omega_0) = A/2^{1/2} \cong 0,7A$.

Le lieu de Nyquist du premier ordre est un demi-cercle.

Le lieu de Black présente une asymptote verticale à - 90°.

Pour $\omega = \omega_0$ on a : $G_{dB}(\omega_0) = 20\log A - 10\log 2 = A_{dB} - 3 \text{ dB}$.



Lieux de Bode:

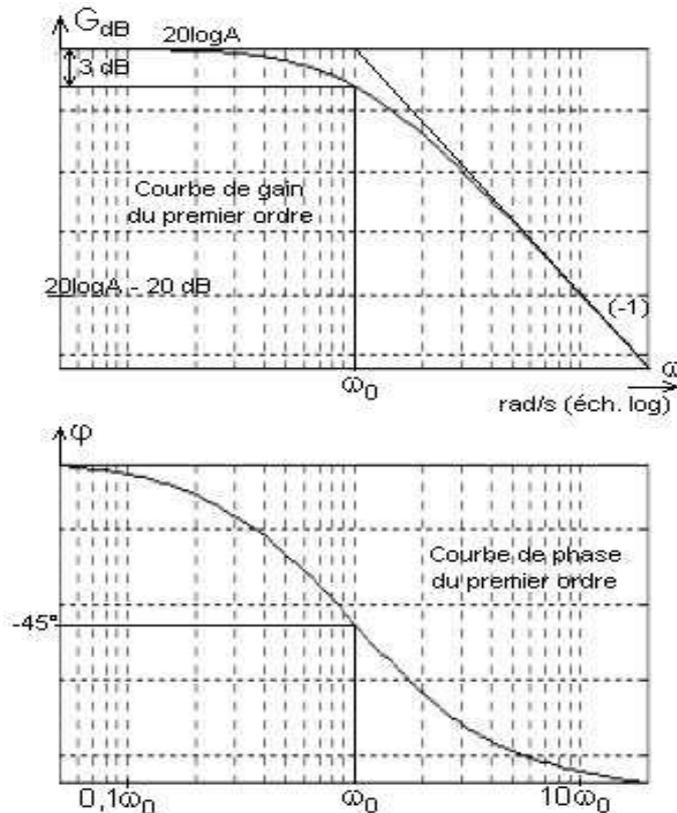
Le diagramme asymptotique de gain est constitué, dans le domaine des basses pulsations, d'une asymptote horizontale [pente (0)] à l'ordonnée $A_{dB} = 20\log A$, et à partir de $\omega = \omega_0$ d'une asymptote de pente (-1) c.à.d. -20 dB/décade. Dans le domaine des hautes pulsations, le premier ordre se comporte exactement comme un intégrateur (à partir de $\omega = 10\omega_0$).

La courbe de phase admet un centre de symétrie en ω_0 pour $\varphi(\omega_0) = -45^\circ$.

A l'asymptote de pente (0) pour le gain correspond une asymptote à 0° pour la phase.

A l'asymptote de pente (-1) pour le gain correspond une asymptote à (-1) fois 90° .

Il y a corrélation entre la pente de la courbe de gain et la valeur du déphasage.



Identification d'un système du premier ordre par la réponse harmonique:

On recherche d'abord la pulsation qui correspond à un déphasage de -45° . La valeur

de cette pulsation est ω_0 . Puis on règle la pulsation de la sinusoïde de commande à une valeur inférieure à $\omega_0/10$. On mesure le gain (rapport d'amplitude) pour cette pulsation. Ce gain est le gain statique A du système. Il ne reste plus qu'à prendre l'inverse de ω_0 pour obtenir la constante de temps du système: $\tau = 1/\omega_0$.

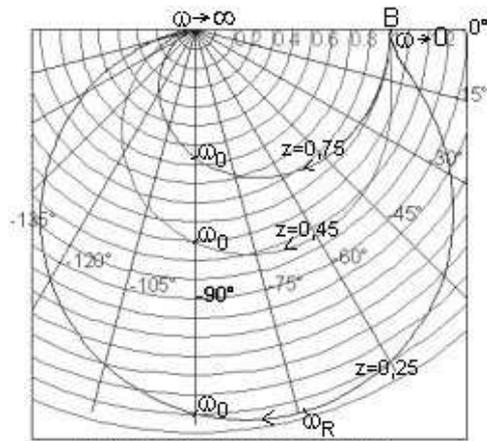
La fonction de transfert s'écrit alors $T(p) = A/(1+\tau p)$.

3.7 Lieux de transfert du second ordre

$$T(p) = \frac{B}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad T(j\omega) = \frac{B}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2zj\frac{\omega}{\omega_0}}$$

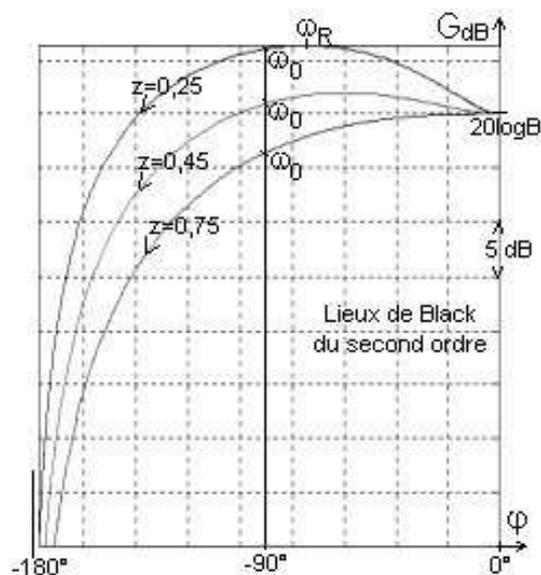
Le nombre complexe $T(j\omega)$ sera étudié en détails 2 pages plus loin. Les représentations de ce nombre complexe sont données ci-après.

Le lieu de Nyquist est d'autant plus "enflé" que z est faible. L'intersection du lieu de Nyquist avec l'axe imaginaire (pour un argument de -90°) se fait toujours pour une pulsation $\omega = \omega_0$ (quelle que soit la valeur de z).

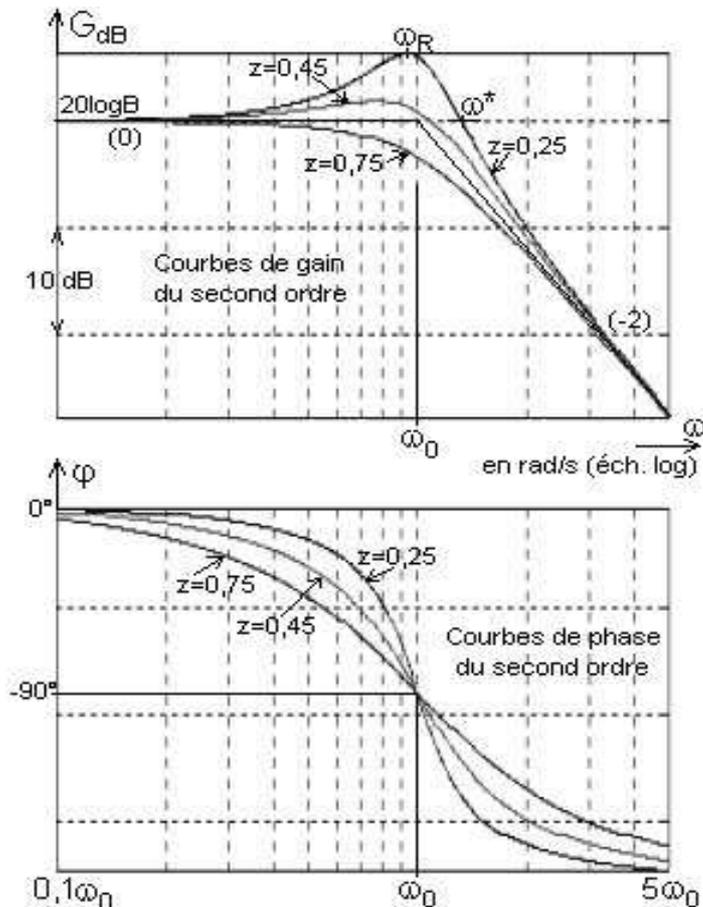


Lieux de Nyquist du second ordre

Le lieu de Black présente une asymptote verticale à -180° . Pour $\omega = \omega_0$ on a un argument de -90° quelle que soit la valeur du coefficient d'amortissement z.



Lieux de Bode: (page suivante)



Le diagramme asymptotique de gain est constitué, dans le domaine des basses pulsations, d'une asymptote horizontale [pente (0)] à l'ordonnée $B_{dB} = 20 \log B$, et à partir de $\omega = \omega_0$ d'une asymptote de pente (-2) c.à.d. - 40 dB/décade. Dans le domaine des hautes pulsations, le second ordre se comporte exactement comme deux intégrateurs (à partir de $\omega = 10\omega_0$).

Plus z est faible, plus la résonance est importante.

La courbe de phase admet un centre de symétrie en ω_0 pour $\varphi(\omega_0) = -90^\circ$.

A l'asymptote de pente (0) pour le gain correspond une asymptote à 0° pour la phase.

A l'asymptote de pente (-2) pour le gain correspond une asymptote à (-2) fois 90° .

Il y a corrélation entre la pente de la courbe de gain et la valeur du déphasage.

Notamment on remarque qu'une résonance importante (pour z faible) s'accompagne d'une variation rapide du déphasage autour de ω_0

Etude du nombre complexe $T(j\omega)$:

$$T(j\omega) = \frac{B}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2zj \frac{\omega}{\omega_0}} \quad G(\omega) = |T(j\omega)| = \frac{B}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4z^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{1/2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg T(j\omega) = - \arctan \left[\frac{2z \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]$$

Rappels: B est le gain statique, ω_0 est la pulsation naturelle en rad/s, et z est le coefficient d'amortissement compris entre 0 et 1 (sans dimension).

Etude de l'argument $\varphi(\omega)$:

La fonction $\varphi(\omega)$ varie de 0° à -180° quand la pulsation varie de 0 à l'infini. La valeur caractéristique est -90° .

L'expression de $\varphi(\omega)$ montre que pour $\omega = \omega_0$ la tangente est infinie et correspond à un déphasage de -90° et ceci quelle que soit la valeur de z : $\varphi(\omega_0) = -90^\circ \quad \forall z$.

Déterminons maintenant la valeur des deux pulsations ω_1 et ω_2 telles que les déphasages soient respectivement de -45° et de -135° . On a $-\tan[\varphi(\omega)] = 2z.x / (1 - x^2)$ en posant $x = \omega/\omega_0$.

Pour un argument de -45° il faut $-\tan[\varphi(\omega)] = 1$, c.à.d. $(1 - x^2) = 2z.x$ donc : $x^2 + 2z.x - 1 = 0$.

Seule la solution positive de cette équation du second degré nous intéresse puisque x est un rapport de deux pulsations.

On trouve $x_1 = (1 + z^2)^{1/2} - z$ d'où $\omega_1 = \omega_0[(1 + z^2)^{1/2} - z]$.

Pour un argument de -135° il faut $-\tan[\varphi(\omega)] = -1$, c.à.d. $(1 - x^2) = -2z.x$ donc : $x^2 - 2z.x - 1 = 0$.

Seule la solution positive de cette équation du second degré nous intéresse.

On trouve $x_2 = (1 + z^2)^{1/2} + z$ d'où $\omega_2 = \omega_0[(1 + z^2)^{1/2} + z]$.

Identification de z et ω_0 uniquement par des mesures de déphasage:

On règle la pulsation de la sinusoïde de commande pour obtenir en régime permanent un déphasage de -45° puis de -135° . On relève la valeur de chacune de ces deux pulsations particulières: ω_1 à -45° et ω_2 à -135° .

Les expressions ci-dessus permettent de montrer

. d'une part que $\omega_1.\omega_2 = \omega_0^2$ d'où $\omega_0 = [\omega_1.\omega_2]^{1/2}$ (ω_0 est la moyenne géométrique des deux mesures),

. et d'autre part que la différence $\omega_2 - \omega_1 = 2z.\omega_0$ est proportionnelle à z (la courbe de phase est d'autant plus pentue que z est faible). Ainsi: $\omega_0 = [\omega_1.\omega_2]^{1/2}$ et $z = (\omega_2 - \omega_1) / 2\omega_0$.

La mesure du gain statique B se fait à une pulsation inférieure à $\omega_0/10$. Un gain se mesure simplement en faisant le rapport de l'amplitude de la sinusoïde de sortie sur l'amplitude de la sinusoïde d'entrée (en pratique on mesure les amplitudes crête à crête).

Etude du module $G(\omega)$:

La fonction $G(\omega)$ est plus difficile à étudier que la fonction argument.

Surtout il n'est pas possible de déterminer directement la valeur de ω_0 par une mesure de gain.

Par contre il peut y avoir un phénomène de résonance (maximum de gain) et les caractéristiques de cette résonance peuvent permettre d'identifier le système du second ordre.

Condition d'existence de la résonance.

Il suffit que la dérivée $dG(\omega)/d\omega$ s'annule.

L'expression de $G(\omega)$ donnée à la page précédente peut s'écrire:

$$G(\omega) = B[f(\omega)]^{-1/2} \text{ avec } f(\omega) = [(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4z^2(\omega^2/\omega_0^2)]$$

Donc: $dG(\omega)/d\omega = -0,5B[f(\omega)]^{-3/2} \cdot f'(\omega)$.

$dG(\omega)/d\omega = 0$ si $f'(\omega) = 0$. On pose cette fois $x = \omega^2/\omega_0^2$.

$f(x) = (1 - x)^2 + 4z^2 \cdot x = x^2 + 2(2z^2 - 1)x + 1$ d'où $df(x)/dx = 2x + 2(2z^2 - 1)$.

La dérivée s'annule donc pour $x = \omega^2/\omega_0^2 = 1 - 2z^2$ c.à.d. pour $\omega = \omega_0(1 - 2z^2)^{1/2}$.

Ainsi pour que la résonance existe il faut $(1 - 2z^2)$ positif donc $z < 2^{-1/2} \cong 0,7$.

Dans ces conditions la pulsation de résonance est : $\omega_R = \omega_0[1 - 2z^2]^{1/2}$.

Que vaut alors le maximum de gain ?

Il suffit de remplacer ω par ω_R dans l'expression de $G(\omega)$ donc de remplacer x par $(1 - 2z^2)$ dans $G(x)$.

$G(x) = B[(1 - x)^2 + 4z^2x]^{-1/2}$. $G_{\max} = B[(1 - 1 + 2z^2)^2 + 4z^2(1 - 2z^2)]^{-1/2} = B[4z^2 - 4z^4]^{-1/2} = B/[2z(1 - z^2)^{1/2}]$.

On définit un coefficient de résonance Q qui est le rapport entre le gain maximum et le gain statique: $Q = G_{\max}/B$.

Ce coefficient de résonance, facile à mesurer, ne dépendant que de z permet l'identification du coefficient d'amortissement du système.

$Q = 1 / [2z(1 - z^2)^{1/2}]$.

On peut poser $z = \sin \alpha$ puisque z est inférieur à 0,7 quand il y a résonance. D'où $Q = 1/[2\sin \alpha \cdot \cos \alpha] = 1/(\sin 2\alpha)$.

Il est ainsi facile d'exprimer $\alpha = 0,5 \cdot \arcsin(1/Q)$ donc **$z = \sin[0,5 \cdot \arcsin(1/Q)]$.**

Ayant déterminé la valeur de z , l'identification de ω_0 pourrait se faire par la mesure de ω_R . Mais comme cette pulsation est définie par un maximum de gain la précision n'est pas très bonne (on peut faire varier la pulsation sans qu'on observe une variation du gain). On préfère donc mesurer la pulsation ω^* telle que le gain du système retrouve la valeur du gain statique (voir courbe de gain deux pages précédentes).

Il faut donc résoudre $G(x) = B[(1 - x)^2 + 4z^2x]^{-1/2} = B$ donc $(1 - x)^2 + 4z^2x = 1$ c.à.d.: $x^2 + 2x(2z^2 - 1) = 0 \implies x[x + 2(2z^2 - 1)] = 0 \implies x = 2(1 - 2z^2)$.

Ainsi $\omega^* = \omega_0[2(1 - 2z^2)]^{1/2} = \omega_R \cdot 2^{1/2}$.

Après avoir identifié z par la mesure du coefficient de résonance Q , on pourra identifier ω_0 par la mesure de ω^* :

$\omega_0 = \omega^* / [2(1 - 2z^2)]^{1/2}$

Calculons maintenant le gain du système pour une sinusoïde de commande dont la pulsation est réglée à la valeur de sa pulsation naturelle :

Dans la relation de $G(\omega)$, si on remplace ω par ω_0 , on voit immédiatement les simplifications et on obtient: **$G(\omega_0) = B/2z$.**

La méthode d'identification la plus commode et la plus simple est la suivante:

On recherche la pulsation de la sinusoïde de commande pour obtenir un déphasage de -90° . Cette pulsation correspond à la pulsation naturelle ω_0 du système. On mesure alors le gain $G(\omega_0)$. Enfin on se place à une décade en dessous (pulsation inférieure à $\omega_0/10$) et on mesure à nouveau le gain (qui sera pratiquement le gain statique B).

Les mesures de B et de ω_0 sont donc des mesures directes. Il ne reste plus qu'à calculer **$z = B / [2G(\omega_0)]$.**

La fonction de transfert du système sera alors : $T(p) = B/[1 + ap + bp^2]$ avec $a = 2z/\omega_0$ et $b = 1/\omega_0^2$.

3.8 Lieux de Bode des systèmes quelconques

Contrairement à l'étude temporelle qui nécessitait une décomposition en une somme d'éléments simples de la fonction de transfert, l'étude harmonique oblige seulement à

factoriser le dénominateur ainsi que le numérateur de cette fonction de transfert. Ainsi en remplaçant p par $j\omega$ le nombre complexe $T(j\omega)$ sera le produit de nombres complexes élémentaires.

Or le module du produit de nombres complexes est égal au produit des modules et son argument est égal à la somme des arguments.

Puisque les lieux de Bode représentent $20\log|T(j\omega)|$ ce produit des modules devient une somme.

Ainsi il suffit d'**ajouter les courbes de gain** de chaque facteur et d'**ajouter les courbes de phase** de chaque facteur pour obtenir les lieux de Bode d'un système quelconque.

Remarque: La factorisation du dénominateur de la fonction de transfert correspond en remplaçant p par $j\omega$ au produit de transmittances harmoniques élémentaires étudiées en détails dans les paragraphes précédents (3.4 3.5 3.6 et 3.7).

Par contre pour le numérateur on peut considérer que chaque facteur correspond à l'inverse d'une de ces transmittances harmoniques élémentaires (inverse du module et opposé de l'argument). Pour les lieux de Bode il suffit donc, pour représenter la courbe de gain et la courbe de phase d'un facteur du numérateur, de "retourner" les courbes: une diminution du gain avec une pente (-1) devient une augmentation du gain avec une pente (+1), et un retard de phase devient une avance de phase.

Exemple d'étude harmonique d'un système compliqué

L'exemple ci-dessous, à priori très compliqué, montre qu'à partir du moment où la fonction de transfert est mise sous sa forme canonique factorisée (dénominateur et numérateur) l'écriture du module et de l'argument du nombre complexe $T(j\omega)$ ne pose aucune difficulté majeure, puisqu'on s'intéresse à un seul facteur à la fois.

$$T(p) = \frac{4(1+0,5p)^2(1+0,3p)}{p(1+1,5p)(1+p)(1+0,2p)^3(1+0,4p+4p^2)} e^{-0,15p} \quad T(j\omega) = \frac{4(1+0,5j\omega)^2(1+0,3j\omega) \cdot e^{-0,15j\omega}}{j\omega(1+1,5j\omega)(1+j\omega)(1+0,2j\omega)^3(1-4\omega^2+0,4j\omega)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{4(1+0,25\omega^2)(1+0,09\omega^2)^{1/2}}{\omega(1+2,25\omega^2)^{1/2}(1+\omega^2)^{1/2}(1+0,04\omega^2)^{3/2}[(1-4\omega^2)^2+0,16\omega^2]^{1/2}}$$

$$\angle T(j\omega) = 2\arctan 0,5\omega + \arctan 0,3\omega - 90^\circ - \arctan 1,5\omega - \arctan \omega - 3\arctan 0,2\omega - \arctan [0,4\omega/(1-4\omega^2)] - 0,15\omega(180/\pi)$$

Remarques:

L'argument est exprimé en degrés d'arc de façon à "coller" à l'expérimentation (on mesure les déphasages en degrés).

Ainsi l'imaginaire pur a un argument de 90° (c.à.d. $\pi/2$ rad).

De même pour le nombre complexe $e^{-0,15j\omega}$ (représentation polaire d'un nombre complexe), son module est égal à 1 et son argument est $-0,15\omega$ rad; cet argument est converti en degrés en multipliant par $180/\pi$.

3.9 Allure des lieux de Nyquist des systèmes quelconques

Les allures de ces lieux de Nyquist dépendent tout d'abord de la classe de la fonction de transfert.

Ainsi dans le domaine des basses pulsations le système se comporte comme un gain en position s'il est de classe 0, comme un gain en vitesse (1 intégrateur) s'il est de classe 1, et comme un gain en accélération (2 intégrateurs) s'il est de classe 2.

Ensuite, pour comprendre l'allure du lieu de Nyquist, il faut étudier le comportement du système dans le domaine des hautes pulsations.

Il dépend uniquement des degrés du numérateur (m) et du dénominateur (n) de la fonction de transfert: voir l'expression générale d'une fonction de transfert au début du paragraphe 10.

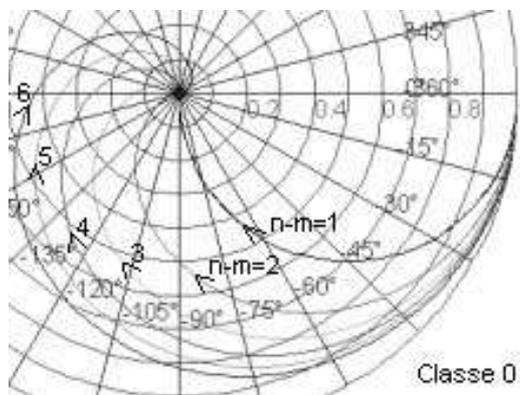
Ainsi en hautes pulsations le système se comporte comme $K.p^m/p^n$ c'est-à-dire comme $(n-m)$ intégrateurs.

Bien sûr le gain tend vers 0, mais le déphasage tend vers $(n-m)$ fois (-90°) .

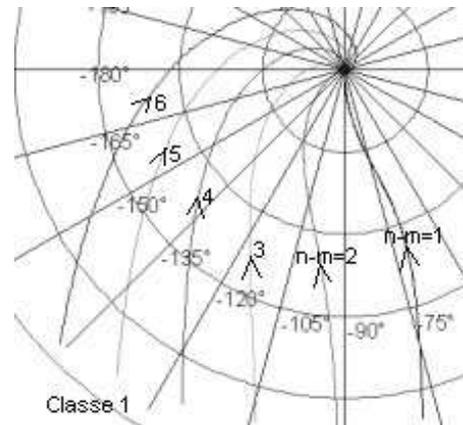
A la page suivante sont représentés trois séries de six lieux de Nyquist (pour les trois classes 0, 1 et 2) et pour $(n-m)$ variant de 1 à 6 (de 2 à 6 pour la classe 2).

L'intérêt de ces allures de lieux de Nyquist est d'aider à la compréhension de la stabilité des boucles d'asservissements (ceci sera étudié au chapitre 5).

Allure des lieux de Nyquist des systèmes de classe 0, 1 et 2.



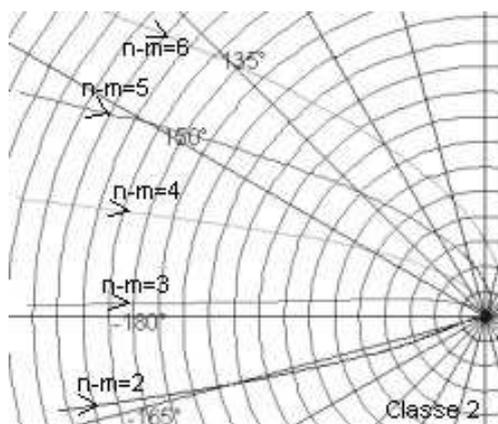
Classe 0



Classe 1

En classe 0, le comportement en basses pulsations correspond à un gain statique (constante sur l'axe réel, pas de déphasage).

En classe 1, le comportement en basses pulsations est celui d'un intégrateur (très grand gain et retard de phase de 90°).



Classe 2

En classe 2, le comportement en basses pulsations correspond à 2 intégrateurs en cascade (très grand gain et retard de phase de 180°).

En hautes pulsations le comportement est indépendant de la classe de $T(p)$. Le système se comporte comme $(n-m)$ intégrateurs: gain tendant vers 0 mais avec un retard de phase de $(n-m)90^\circ$.

Fin du chapitre 3

Dans le chapitre 4 (dernier chapitre avant d'aborder la boucle d'asservissement), nous allons étudier la représentation des fonctions de transfert et en particulier nous allons nous familiariser avec les graphes de transfert.

Chapitre 4

Représentations des Fonctions de Transfert.

4.1 Graphe de Transfert

Lorsque l'on fait la mise en équations du fonctionnement d'un processus technologique (électrique, mécanique, hydraulique, thermique, optique, etc.), on décompose le problème posé par la complexité de ce processus en écrivant de nombreuses équations simples, en partant de l'entrée de commande pour arriver à la sortie, en introduisant un grand nombre de variables internes. On obtient finalement un système de nombreuses équations. Le but est de résoudre ce système d'équations afin d'en déduire la fonction de transfert globale du processus.

La résolution algébrique est souvent très difficile car il faut réussir à éliminer toutes les variables intermédiaires (souvent on tourne en rond!).

Le graphe de transfert est une représentation graphique de ce système d'équations.

La règle de Mason que nous verrons au paragraphe suivant permet d'obtenir beaucoup plus facilement la fonction de transfert globale, car sur le graphe l'élimination des variables intermédiaires est immédiat.

Mais attention, le graphe de transfert n'est valable que si les équations écrites sont des équations "physiques" c'est-à-dire des équations qui tiennent compte de la notion de **cause à effet**. L'établissement du graphe de transfert permet donc de faire une description précise du fonctionnement du processus.

Par exemple si on applique une tension aux bornes de l'induit d'un moteur, cette tension est la cause d'une cascade d'effets:

La tension crée le courant d'induit ; ce courant crée le couple moteur ; ce couple crée la vitesse laquelle crée à son tour la force contre-électromotrice qui réagit sur le courant d'induit. Dans le graphe de transfert qui décrit le fonctionnement de ce moteur il y aura, par exemple, une "flèche" qui ira du courant vers le couple (et non l'inverse!).

Dans le paragraphe 4.5 nous verrons différents exemples concrets de mise en équations.

Mais dans un premier temps il faut présenter la façon de construire le graphe de transfert avec un système d'équations donné.

Bien sûr dans un graphe de transfert on utilise les grandeurs symboliques (images des grandeurs temporelles).

Exemple:

Soient E l'image de $e(t)$, S l'image de $s(t)$ et X_k l'image de $x_k(t)$ intervenant dans le système de six équations (page suivante) où a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m et n sont des fonctions de transfert élémentaires [$a = a(p)$, $b = b(p)$,, $n = n(p)$].

Rappel: le mot "image" est synonyme de "Transformée de Laplace".

Système de six équations proposé:

$$X_1 = a.E - i.X_2$$

$$X_2 = b.X_1 - j.X_3 - h.X_5$$

$$X_3 = c.X_2 - k.X_4 - n.S$$

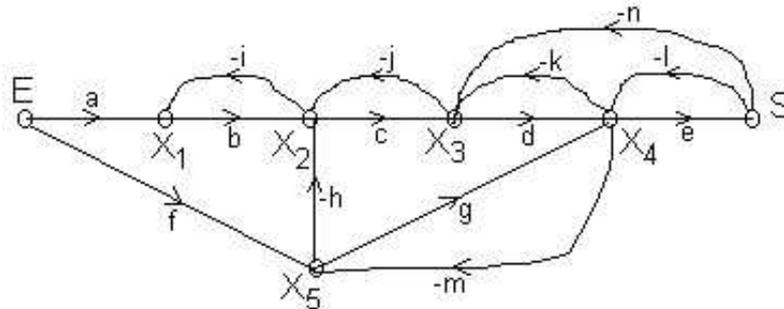
$$X_4 = d.X_3 + g.X_5 - l.S$$

$$X_5 = f.E - m.X_4$$

$$S = e.X_4$$

Le graphe de transfert est constitué de petits ronds appelés "nœuds", et de flèches appelées "chemins".

Il existe un nœud pour chaque grandeur physique (entrée, sortie et grandeurs internes) et un chemin pour chaque fonction de transfert élémentaire entre un nœud "cause" et un nœud "effet".



Regardez le nœud X₁: il y a deux flèches qui y arrivent. Donc X₁ a deux composantes (une composante en E et une composante en X₂). On doit lire sur le graphe: $X_1 = a.E - i.X_2$. Lisez le graphe en entier pour comparer avec le système d'équations proposé. On privilégie les chemins en ligne droite pour les actions dans le sens de l'entrée vers la sortie (cascades de causes à effets) et les chemins en ligne courbe pour les rétroactions, de façon à rendre le graphe le plus lisible possible.

4.2 Règle de Mason

Essayez de résoudre algébriquement le système de six équations proposé en haut de la page afin d'exprimer la fonction de transfert S/E (après avoir éliminé les cinq grandeurs internes X_k). Bon courage!!! Etant donné la complexité du résultat c'est de toute évidence un travail colossal! Proposez cet exercice à votre prof de math.... Il va en baver!!!

La résolution graphique est beaucoup plus facile car pour éliminer les cinq grandeurs internes X_k il suffit d'effacer leur nom sur le graphe, celui-ci restant inchangé. La règle de Mason permet une résolution globale en exprimant d'emblée la fonction de transfert S/E recherchée.

La formule de départ est: $T(p) = S/E = \sum T_k \cdot \Delta_k / \Delta$.

La première chose à faire avant d'appliquer la règle de Mason est de dénombrer toutes les **boucles** du graphe ainsi que tous les **chemins directs** allant de l'entrée à la sortie. Une boucle est constituée d'une succession de chemins permettant de partir d'un nœud et d'y revenir sans jamais passer deux fois par un même nœud.

Remarque: Aucune boucle ne peut passer par le nœud d'entrée, puisqu'il n'y a pas d'équation exprimant cette grandeur (l'entrée est une grandeur imposée de l'extérieur par l'utilisateur du processus).

Un chemin direct est constitué d'une succession de chemins permettant de partir du nœud d'entrée pour arriver au nœud de sortie sans jamais passer deux fois par un même nœud.

Examinons le graphe de la page précédente. Il y a 7 boucles et 3 chemins directs.

Boucles:

b_1 de X_1 à X_2 , retour à X_1 . La transmittance de cette boucle est: $b_1 = - b.i$ (on fait le produit des fonctions de transfert de chaque chemin qui constitue la boucle). Remarque: la majorité des boucles ont une transmittance négative (contre-réactions)

b_2 de X_2 à X_3 , retour à X_2 . $b_2 = - c.j$

b_3 de X_3 à X_4 , retour à X_3 . $b_3 = - d.k$

b_4 de X_4 à S, retour à X_4 . $b_4 = - e.l$

b_5 de X_5 à X_4 , retour à X_5 . $b_5 = - g.m$

b_6 de X_3 à X_4 puis à S, retour à X_3 . $b_6 = - d.e.n$

b_7 de X_5 à X_2 , puis à X_3 puis à X_4 , retour à X_5 . $b_7 = +h.c.d.m$

Chemins directs:

T_1 par les nœuds E, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , S. Fonction de transfert de ce chemin direct: $T_1 = a.b.c.d.e$

T_2 par les nœuds E, X_5 , X_4 , S. $T_2 = f.g.e$

T_3 par les nœuds E, X_5 , X_2 , X_3 , X_4 , S. $T_3 = - f.h.c.d.e$

Revenons à la règle de Mason: $T(p) = S/E = \sum T_k \Delta_k / \Delta$ avec:

$\Delta =$ déterminant du graphe = $1 - \sum b_i + \sum b_i.b_j - \sum b_i.b_j.b_k + \dots$

C'est une somme de produit de transmittances. Le produit $b_i.b_j$ correspond au produit de deux boucles *disjointes*, c.à.d. qui n'ont aucun nœud commun. De même $b_i.b_j.b_k$ correspond au produit de trois boucles *disjointes*.

T_k est la transmittance d'un chemin direct et Δ_k est le déterminant mineur relatif à ce chemin.

Δ_k se calcule comme Δ mais après avoir supprimé du graphe tous les nœuds empruntés par le chemin T_k .

Δ_k a toujours une expression simple car il ne reste pas ou peu de boucles disjointes d'un chemin direct.

Application de la règle de Mason à notre exemple (graphe deux pages avant).

$\Delta =$ déterminant du graphe = $1 - \sum b_i + \sum b_i.b_j - \sum b_i.b_j.b_k + \dots$

$b_1 = - b.i$ $b_2 = - c.j$ $b_3 = - d.k$ $b_4 = - e.l$ $b_5 = - g.m$ $b_6 = - d.e.n$ $b_7 = + c.d.h.m$

Combinaisons de deux boucles disjointes: 1.3 1.4 1.5 1.6 2.4 2.5

Combinaisons de trois boucles disjointes: aucune. D'où:

$$\Delta = 1 + b.i + c.j + d.k + e.l + g.m + d.e.n - c.d.h.m + b.d.i.k + b.e.i.l + b.g.i.m + b.d.e.i.n + c.e.j.l + c.g.j.m$$

$T_1 = a.b.c.d.e$ $\Delta_1 = 1$ (il n'y a aucune boucle disjointe du chemin T_1).

$T_2 = e.f.g$ $\Delta_2 = 1 + b.i + c.j$ (les boucles 1 et 2 sont disjointes du chemin T_2).

$T_3 = - c.d.e.f.h$ $\Delta_3 = 1$ (il n'y a aucune boucle disjointe du chemin T_3).

$$\sum T_k \Delta_k = a.b.c.d.e + e.f.g(1 + bi + cj) - c.d.e.f.h$$

Il ne reste plus qu'à faire le rapport $\sum T_k \Delta_k$ sur Δ et nous avons déterminé sans trop de mal la fonction de transfert S/E.

4.3 Graphes canoniques

Nous avons vu au chapitre 1 (paragraphe 1.10) qu'une fonction de transfert quelconque d'ordre n pouvait se mettre sous la forme:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_i}{p^j} \frac{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m}{1 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_{n-i} p^{n-i}}$$

Nous allons étudier la fonction de transfert d'ordre 4, la généralisation à l'ordre n ne pose aucune difficulté. Il sera toujours facile de mettre en facteur, au dénominateur de la fonction de transfert, le coefficient du terme de plus haut degré en p . Pour notre application à l'ordre 4 il faut mettre la fonction de transfert sous la forme:

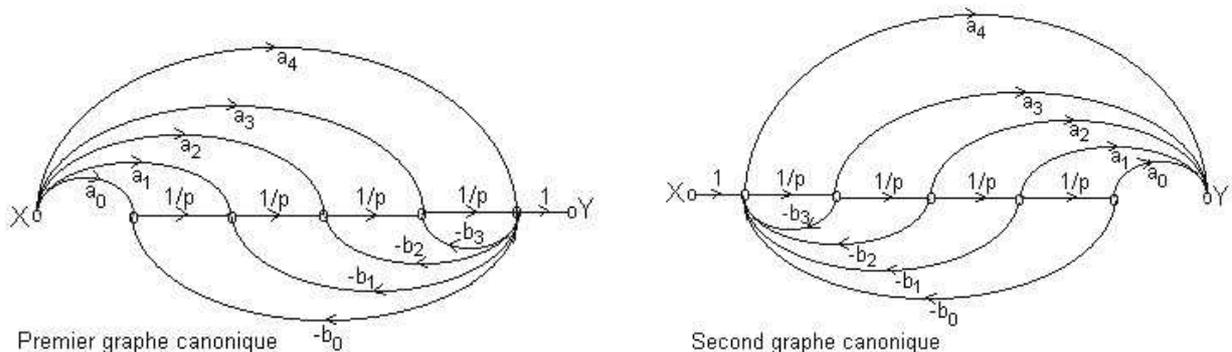
$$T(p) = Y/X = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4] / [b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + p^4]$$

Le coefficient en p^4 au dénominateur est égal à 1.

Si $b_0 = 0$ $T(p)$ est de classe 1, si de plus $b_1 = 0$ $T(p)$ est de classe 2.

A la page suivante sont présentés les deux graphes canoniques. L'utilisation de la règle de Mason permet de montrer que ces deux graphes ont une fonction de transfert Y/X conforme à celle ci-dessus.

Vérifiez vous-même à titre d'exercice (4 boucles, aucune disjointe, 5 chemins directs). Le résultat est très vite obtenu.



Remarque: le plus souvent le degré m du numérateur de la fonction de transfert est inférieur au degré n du dénominateur. Ici on aurait $a_4 = 0$.

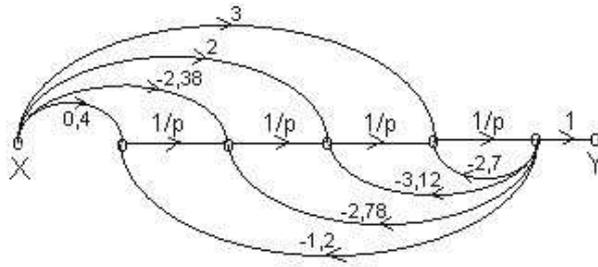
Ces graphes canoniques montrent que toute fonction de transfert peut être simulée grâce aux composants suivants: intégrateurs, gains, sommateurs. Avant les ordinateurs, il existait des calculateurs analogiques utilisant cette technique. Pour être plus concret nous allons faire une application complète: à partir de l'expression d'une fonction de transfert d'ordre 4, déterminer un schéma de simulation avec un réglage indépendant de chaque paramètre.

Soit la fonction de transfert $Y/X = [0,8 - 4,76p + 4p^2 + 6p^3] / [2,4 + 5,56p + 6,24p^2 + 5,4p^3 + 2p^4]$.

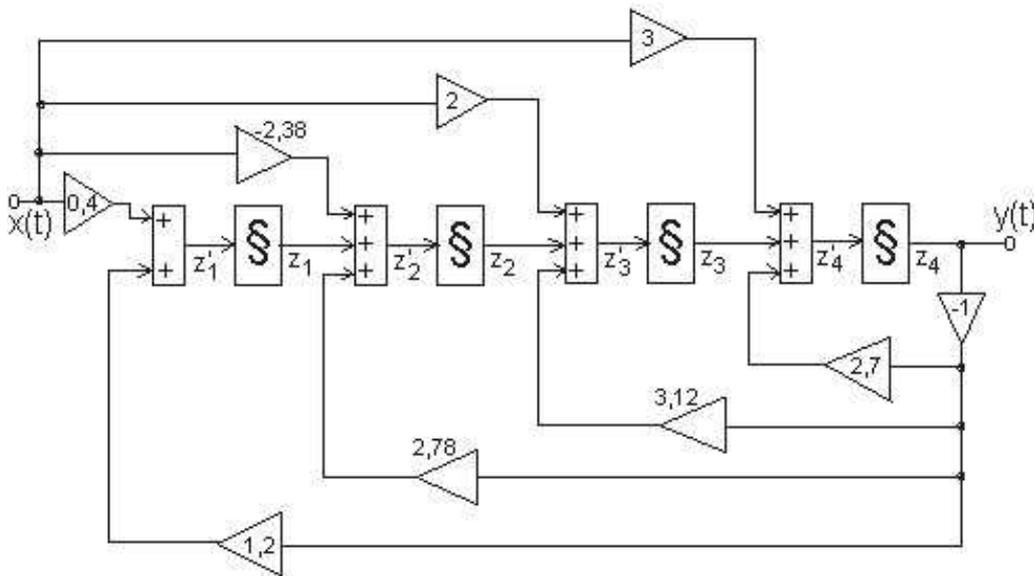
La première chose à faire est de diviser le numérateur et le dénominateur par 2 (pour avoir p^4 au dénominateur):

$$Y/X = [0,4 - 2,38p + 2p^2 + 3p^3] / [1,2 + 2,78p + 3,12p^2 + 2,7p^3 + p^4]$$

Le premier graphe canonique est donc:



On peut ainsi matérialiser ce système avec 4 intégrateurs, 8 gains (réglage indépendant de chaque coefficient), et 4 sommateurs à 3 entrées:



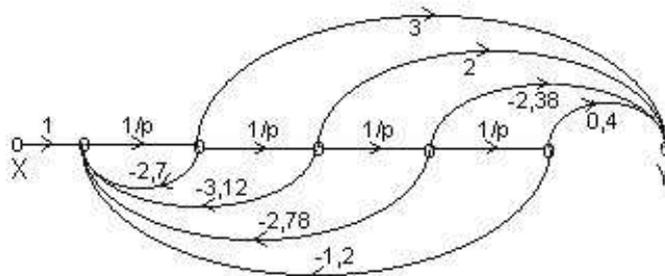
Il est très facile de réaliser ce schéma sur un calculateur analogique ou sur un simulateur de fonctions de transfert.

Bien sûr le système qui renferme le symbole \int est un intégrateur.

On peut même imposer des conditions initiales non nulles (sur chaque intégrateur) avant d'appliquer l'entrée $x(t)$.

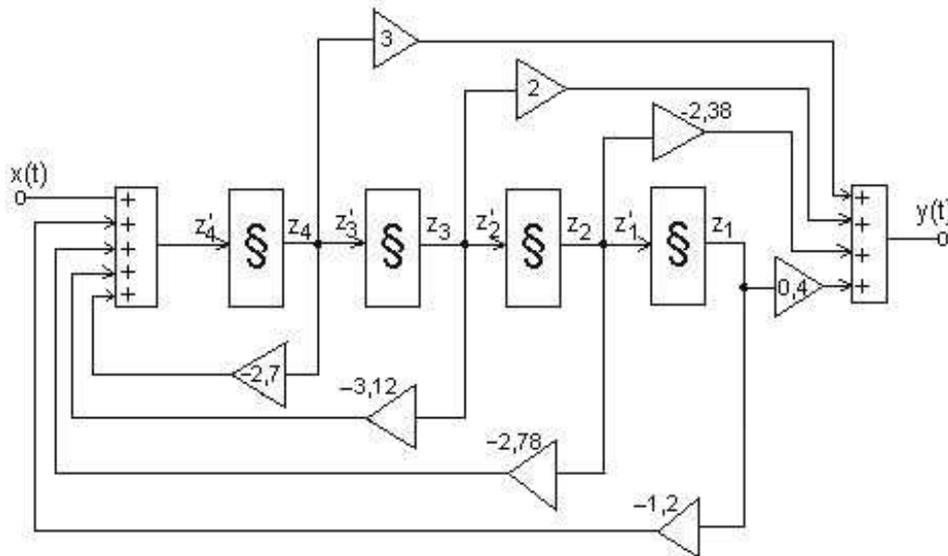
Nous avons introduit des variables internes z_k qui seront utiles pour présenter le paragraphe suivant.

Le second graphe canonique est:



On peut cette fois matérialiser ce système avec 4 intégrateurs, 8 gains et 2 sommateurs à 5 entrées: (voir page suivante).

Les variables internes z_k ne sont évidemment pas les mêmes que dans le schéma précédent.



4.4 Représentations d'État (vecto-matricielle)

Nous allons étudier ces représentations grâce à l'exemple d'ordre 4 vu précédemment.

Première représentation d'état (voir le schéma de matérialisation issu du premier graphe canonique).

On a donné un nom à la sortie de chaque intégrateur: $z_k(t)$.

Le système étant d'ordre 4 on a 4 variables internes qui constituent ce qu'on appellera un "vecteur d'état".

L'entrée d'un intégrateur correspond à la dérivée de sa sortie. Ainsi à partir du schéma de la page précédente on peut écrire:

$$z'_1 = -1,2.z_4 + 0,4.x \quad z'_2 = z_1 - 2,78.z_4 - 2,38.x \quad z'_3 = z_2 - 3,12.z_4 + 2.x \quad z'_4 = z_3 - 2,7.z_4 + 3.x \quad y = z_4 .$$

Deuxième représentation d'état (voir le schéma de matérialisation issu du second graphe canonique en haut de cette page). Bien sûr on a pris les mêmes notations pour les variables internes (variables d'état), mais elles ne sont pas les mêmes que précédemment. Ici on peut écrire:

$$z'_1 = z_2 \quad z'_2 = z_3 \quad z'_3 = z_4 \quad z'_4 = -1,2.z_1 - 2,78.z_2 - 3,12.z_3 - 2,7.z_4 + x \quad y = 0,4.z_1 - 2,38.z_2 + 2.z_3 + 3.z_4 .$$

A la page suivante sont données les deux représentations d'état (vecto-matricielle).

Première représentation d'état:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ z'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1,2 \\ 1 & 0 & 0 & -2,78 \\ 0 & 1 & 0 & -3,12 \\ 0 & 0 & 1 & -2,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ -2,38 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x \quad y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Seconde représentation d'état:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ z'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,2 & -2,78 & -3,12 & -2,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x \quad y = [0,4 \ -2,38 \ 2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Généralisation:

On peut représenter le fonctionnement d'un système linéaire d'ordre n par deux équations vecto-matriciellees en introduisant un vecteur d'état z à n composantes:

$$\vec{z}' = A \cdot \vec{z} + B \cdot x \quad \text{et} \quad y = C \cdot \vec{z}$$

avec A = matrice d'état (n lignes, n colonnes) B = matrice d'entrée (n lignes, 1 colonne) C = matrice de sortie (1 ligne, n colonnes).

Soit T(p) la fonction de transfert générale d'un processus avec $b_n = 1$:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n}$$

Première représentation d'état:	Seconde représentation d'état:
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-2} & -b_{n-1} \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \\ 0 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$C = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$	$C = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ 0]$

La résolution du système de deux équations vecto-matriciellees consiste à diagonaliser la matrice d'état. Le logiciel Matlab effectue ce travail en une toute petite fraction de seconde!

4.5 Mise en équations des systèmes technologiques

Avant de traiter des exemples de mises en équations de systèmes (électrique, mécanique, hydraulique et thermique), il faut prendre conscience des analogies qui existent dans les différents domaines de la physique. Dans le tableau ci-dessous sont présentées les *grandeurs physiques analogues* dans ces différents domaines.

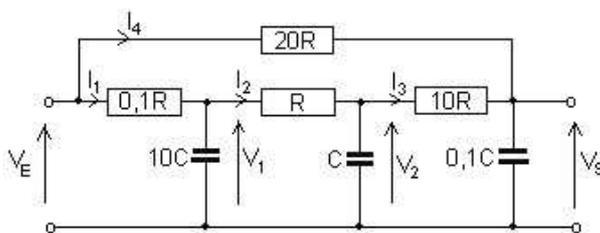
	Systèmes électriques	Systèmes mécaniques en translation	Systèmes mécaniques en rotation	Systèmes hydrauliques	Systèmes thermiques	Systèmes optiques
Les deux grandeurs de base	Courant $i(t)$ en A	Vitesse linéaire $v(t)$ en m/s	Vitesse angulaire $\omega(t)$ en rad/s	Débit $q(t)$ en m^3/s	Puissance $p_u(t)$ en W	Éclairement $e(t)$ en lx
	Tension $u(t)$ en V	Force $f(t)$ en N	Couple $\gamma(t)$ en N.m	Pression $p(t)$ en Pa	Température $\theta(t)$ en K	Flux lumineux $f(t)$ en lm
Intégrale de la première grandeur	$\int i \cdot dt = q(t)$	$\int v \cdot dt = x(t)$	$\int \omega \cdot dt = \theta(t)$	$\int q \cdot dt = v(t)$	$\int p_u \cdot dt = e_n(t)$	$\int e \cdot dt = e_x(t)$
	Charge élect. en C (A.s)	Position en m	Position ang. en rad	Volume en m^3	Enthalpie en J (W.s)	Exposition en lx.s

4.5.1 Exemple électrique

Soit le schéma ci-dessous (4 résistances et 3 capacités). La commande est la tension V_E et la sortie la tension V_S .

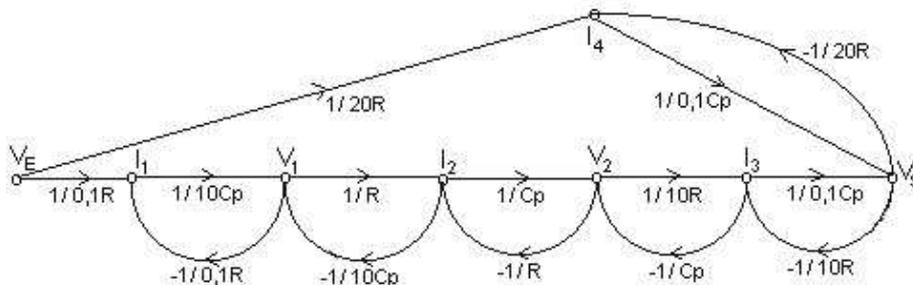
Remarque: on utilise les lettres majuscules pour signifier qu'on exprime les images des fonctions du temps.

Pour faire la mise en équations on introduit des variables internes (4 courants et 2 tensions).



Les équations symboliques sont:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (V_E - V_1)/0,1R & I_2 &= (V_1 - V_2)/R \\
 I_3 &= (V_2 - V_S)/10R & I_4 &= (V_E - V_S)/20R \\
 V_1 &= (I_1 - I_2)/10Cp & V_2 &= (I_2 - I_3)/Cp \\
 V_S &= (I_3 + I_4)/0,1Cp
 \end{aligned}$$



6 boucles et 2 chemins directs:

$$\Delta = 1 + (1/RCp)[1+0,1+1+0,1+1+0,5] + (1/R^2C^2p^2)[1+0,1+1+0,5+0,01+0,1+0,05+1+0,5+0,05] + (1/R^3C^3p^3)[1+0,5+0,05+0,005]$$

$$= 1 + 3,7/(RCp) + 4,31/(R^2C^2p^2) + 1,555/(R^3C^3p^3)$$

$$\Sigma T_k \Delta_k = 1/R^3C^3p^3 + (0,5/RCp)[1 + 2,2/(RCp) + 1,11/(R^2C^2p^2)]$$

$$= 1,555/(R^3C^3p^3) + 1,1/(R^2C^2p^2) + 0,5/(RCp)$$

$$V_S / V_E = (1,555 + 1,1RCp + 0,5R^2C^2p^2) / (1,555 + 4,3RCp + 3,7R^2C^2p^2 + R^3C^3p^3)$$

$$= (1 + 0,707RCp + 0,322R^2C^2p^2) / (1 + 2,77RCp + 2,38R^2C^2p^2 + 0,643R^3C^3p^3)$$

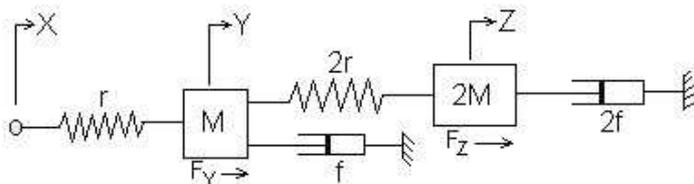
Bien sûr on peut factoriser le dénominateur et de plus poser $\tau = RC$:

$$V_S / V_E = (1 + 0,707\tau p + 0,322\tau^2 p^2) / (1 + 1,392\tau p)(1 + 0,802\tau p)(1 + 0,576\tau p)$$

4.5.2 Exemple mécanique

Soit le montage mécanique en translation ci-dessous (2 masses guidées suivant l'axe horizontal, 2 ressorts et 2 amortisseurs). La commande est la position X [image de x(t)] et la sortie la position Z [image de z(t)].

Pour faire la mise en équations on introduit des variables internes (2 résultantes de forces et une position).



Les équations symboliques sont:

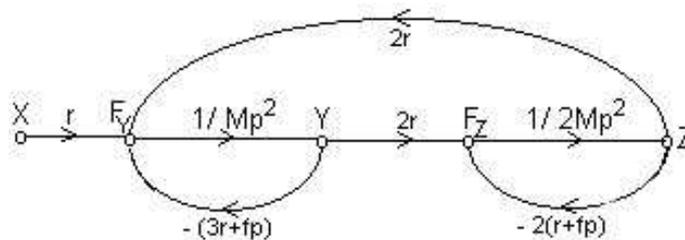
$$F_Y = rX + 2rZ - (3r + fp)Y$$

$$F_Z = 2rY - 2(r + fp)Z$$

$$Y = F_Y / Mp^2$$

$$Z = F_Z / 2Mp^2$$

Explications: un ressort transmet une force proportionnelle à la position relative de ses extrémités [exemple: $r(X-Y)$], alors qu'un amortisseur (frottement visqueux) transmet une force proportionnelle à la vitesse relative de déplacement de ses extrémités, donc à la dérivée de la position [exemple: $-fpY$]. La force est positive si elle va dans le sens de l'augmentation de la position, elle est négative si elle est opposée (force résistante). Quand on a exprimé la résultante des forces qui s'exercent sur une masse, on divise par la valeur de cette masse et on obtient son accélération. Une intégration donne la vitesse, une seconde intégration donne la position.



3 boucles et 1 chemin direct:

$$\Delta = 1 + (3r+fp)/(Mp^2) + (r+fp)/(Mp^2) - 2r^2/(M^2p^4) + (3r^2+4rfp+f^2p^2)/(M^2p^4)$$

$$= [r^2 + 4rfp + (f^2+4rM)p^2 + 2fMp^3 + M^2p^4] / (M^2p^4)$$

$$\Sigma T_k \Delta_k = r^2 / (M^2p^4)$$

$$Z / X = 1 / [1 + (4f/r)p + (f^2/r^2 + 4rM/r^2)p^2 + (2fM/r^2)p^3 + (M^2/r^2)p^4]$$

A.N.: $M = 1,2 \text{ kg}$; $r = 1 \text{ kg/s}^2$ et $f = 0,8 \text{ kg/s}$:

$$Z / X = 1 / (1 + 3,2p$$

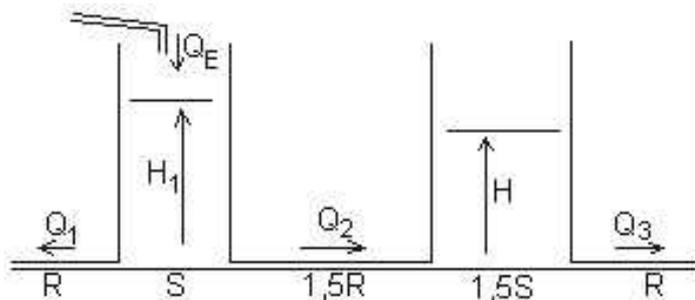
$+ 5,44p^2 + 1,92p^3 + 1,44p^4)$

Le dénominateur se factorise en 2 facteurs du second degré: $Z / X = 1 / [(1+2,986p+4,480p^2)(1+0,214p+0,321p^2)]$.

4.5.3 Exemple hydraulique

Soit le montage hydraulique ci-dessous constitué de 2 réservoirs et 3 tuyaux (résistances hydrauliques). La commande est le débit Q_E [image de $q_e(t)$] et la sortie le niveau H [image de $h(t)$].

Pour faire la mise en équations on introduit des variables internes (3 débits et 1 niveau).



Les équations symboliques sont:

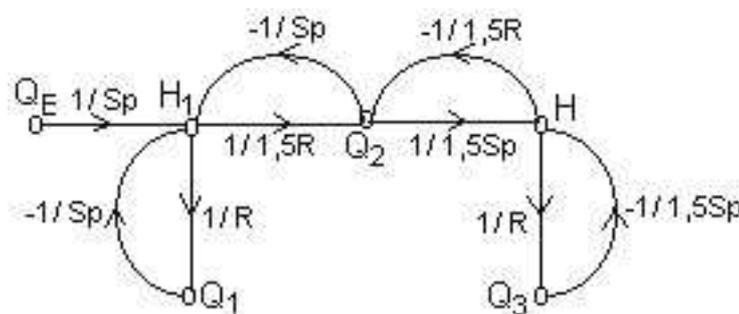
$$H_1 = (Q_E - Q_1 - Q_2) / Sp$$

$$Q_1 = H_1 / R \quad Q_3 = H / R$$

$$Q_2 = (H_1 - H) / (1,5R)$$

$$H = (Q_2 - Q_3) / (1,5Sp)$$

Explications: on suppose que l'écoulement dans les tuyaux est "laminaire" et non "turbulent". Dans ces conditions le débit est proportionnel à la différence de pression, donc à la différence de niveau du liquide. Si le liquide est de l'eau, une hauteur de 1 m correspond à une pression de 10^4 Pa (1 cm d'eau = 1 hPa). La résistance hydraulique qui intervient dans les équations est donc le rapport entre une hauteur et un débit (elle s'exprime alors en s/m^2). D'autre part un réservoir est un intégrateur de débit (le volume d'eau est l'intégrale de la résultante des débits). Pour avoir le niveau on divise le volume par la section. La section d'un réservoir est analogue à la capacité électrique d'un condensateur.



4 boucles et 1 chemin direct. On pose $\tau = RS$

$$\Delta = 1 + (1/\tau p)[1+2/3+4/9+2/3] + (1/\tau^2 p^2)[4/9+2/3+4/9] = (1/\tau^2 p^2)[1,555 + 2,777\tau p +$$

$$\tau^2 p^2] \Sigma T_k \Delta_k = (4R)/(9\tau^2 p^2)$$

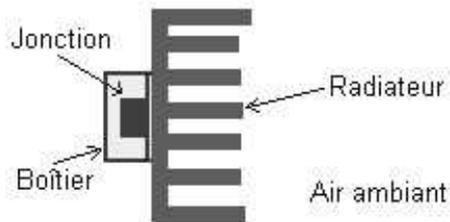
$$H / Q_E = (0,444R) / (1,555 + 2,777\tau p + \tau^2 p^2) = (0,285R) / (1 + 1,785\tau p + 0,643\tau^2 p^2) =$$

$$(0,285R) / [(1+1,284\tau p)(1+0,501\tau p)].$$

4.5.4 Exemple thermique

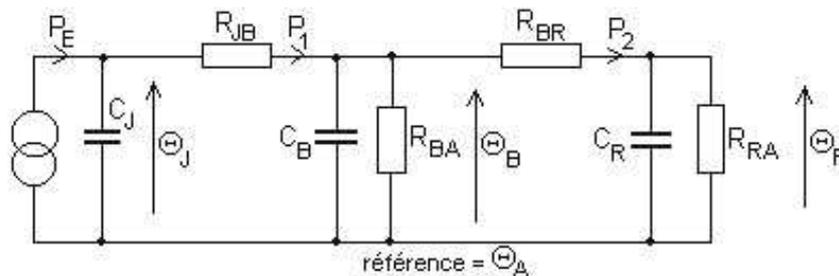
Soit un gros transistor de puissance dont la jonction est chauffée par la puissance instantanée appliquée (tension x courant), et refroidie par les liaisons thermiques au boîtier, au radiateur et à l'air ambiant. Le montage comprend 4 résistances thermiques (jonction-boîtier, boîtier-radiateur, boîtier-air, radiateur-air) et 3 capacités thermiques (jonction, boîtier, radiateur).

La commande est la puissance P_E dissipée dans la jonction [image de $p_E(t)$] et la sortie est la température Θ_B du boîtier [image de $\Theta_B(t)$].



Pour faire la mise en équations de ce système thermique nous allons faire un schéma électrique équivalent. La grandeur analogue de la puissance thermique sera un courant électrique et la température aura pour grandeur analogue une tension (différence de potentiel). La référence de température est ici l'air ambiant.

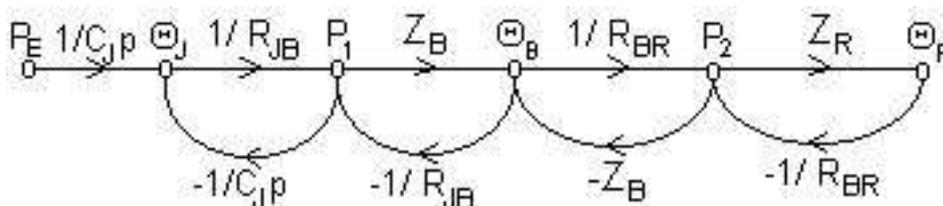
En plus de la commande et de la sortie, pour faire la mise en équations on introduit des variables internes (2 puissances thermiques et 2 températures)



Les équations symboliques sont:

$\Theta_J = (P_E - P_1) / C_J p$ $P_1 = (\Theta_J - \Theta_B) / R_{JB}$ $\Theta_B = Z_B(P_1 - P_2)$ $P_2 = (\Theta_B - \Theta_R) / R_{BR}$ $\Theta_R = Z_R.P_2$
avec $Z_B = R_{BA} / (1 + R_{BA}C_B p)$ et $Z_R = R_{RA} / (1 + R_{RA}C_R p)$. La lettre A correspond bien sûr à "air ambiant".

Nous allons calculer la fonction de transfert Θ_B / P_E avec des applications numériques:
 $R_{JB} = 0,75 \text{ K/W}$; $R_{BR} = 0,2 \text{ K/W}$; $R_{BA} = 4 \text{ K/W}$; $R_{RA} = 1,2 \text{ K/W}$; $C_J = 1,5 \text{ J/K}$; $C_B = 12 \text{ J/K}$; $C_R = 60 \text{ J/K}$.



4 boucles et 1 chemin direct:

$$\Delta = 1 + 0,888/p + 5,333/(1+48p) + 20/(1+48p) + 6/(1+72p) + 17,777/[p(1+48p)] + 5,333/[p(1+72p)] + 32/[(1+48p)(1+72p)] = [p(1+120p+3456p^2) + 0,888(1 + 120p + 3456p^2) + 25,333p(1+72p) + 6p(1+72p) + 5,333(1+48p) + 32p] / [p(1+72p)(1+48p)] = [24 + 1707p + 5304p^2 + 3456p^3] / [p(1+72p)(1+48p)]$$

$$\Sigma T_k \Delta_k = 3,555/[p(1+48p)].[1 + 6/(1+72p)] = [3,555(7+72p)][p(1+72p)(1+48p)]$$

$$\Theta_R / P_E = [24,888 + 256p] / [24 + 1707p + 5304p^2 + 3456p^3] = 1,037[1 + 10,285p] / [1 + 71,125p + 221p^2 + 144p^3]$$

$$\Theta_R / P_E = 1,037[1+10,285p] / [(1+69,03p)(1+2,30p)(1+0,92p)] .$$

Intéressons nous maintenant aussi à la température de la jonction puis à celle du radiateur.

$$\text{Sortie: } \Theta_J \quad \Sigma T_k \Delta_k = (0,666/p).[1 + 5,333/(1+48p) + 20/(1+48p) + 6/(1+72p) + 32/(1+48p)(1+72p)]$$

$$= [0,666(64,333 + 2232p + 3456p^2) / [p(1+72p)(1+48p)]]$$

$$\Theta_J / P_E = [42,888 + 1488p + 2304p^2] / [24 + 1707p + 5304p^2 + 3456p^3]$$

$$\Theta_J / P_E = 1,787[1+33,11p)(1+1,62p)] / [(1+69,03p)(1+2,30p)(1+0,92p)] .$$

$$\text{Sortie: } \Theta_R \quad \Sigma T_k \Delta_k = 21,333 / [p(1+72p)(1+48p)]$$

$$\Theta_R / P_E = [21,333] / [24 + 1707p + 5304p^2 + 3456p^3]$$

$$\Theta_R / P_E = 0,888 / [(1+69,03p)(1+2,30p)(1+0,92p)]$$

Pour une température ambiante de 23 °C et une puissance dissipée dans la jonction de 70 W, au bout d'environ 7 minutes (la plus grande constante de temps est de 69 s), les températures se stabilisent à:

$$\theta_J = 1,787 \times 70 + 23 = 148,1 \text{ °C} \quad \theta_B = 1,037 \times 70 + 23 = 95,6 \text{ °C} \quad \theta_R = 0,888 \times 70 + 23 = 85,1 \text{ °C}$$

Fin du chapitre 4

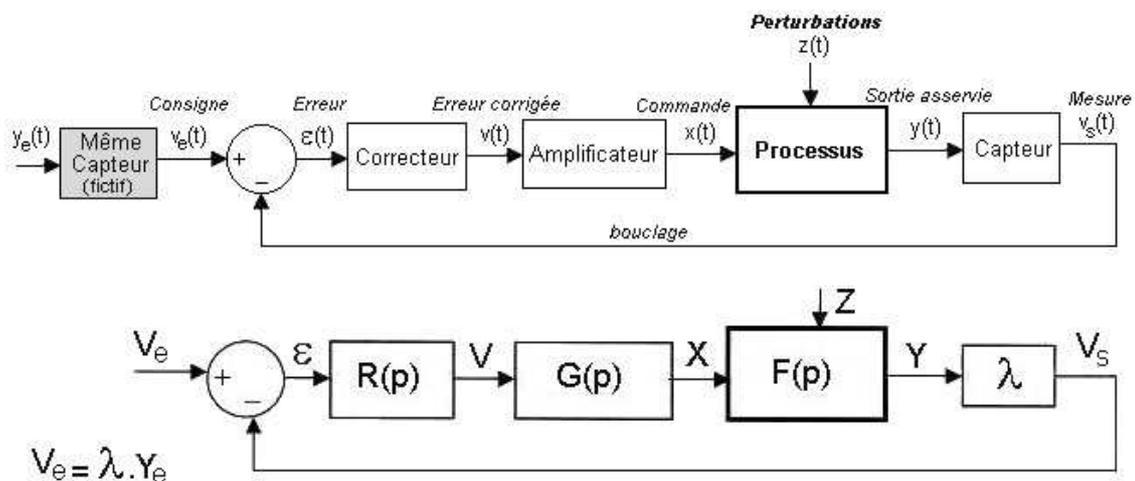
Dans le chapitre 5 nous allons (enfin!) aborder l'étude des systèmes bouclés, donc des asservissements.

Chapitre 5

Systèmes Bouclés.

5.1 Généralités. Fonction de Transfert en boucle fermée

Avant d'aborder la théorie sur les systèmes bouclés, il faut rappeler pourquoi on ne peut pas asservir une grandeur par une commande directe (voir paragraphe 0.3) et rappeler aussi la structure générale d'une boucle d'asservissement (voir paragraphe 0.4). Nous redonnons le schéma de principe d'une boucle d'asservissement et en dessous le schéma fonctionnel avec les notations symboliques des grandeurs et des fonctions de transfert.



Soit $T(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte $V_s(p) / \epsilon(p)$. Cette fonction de transfert est tout simplement le produit des fonctions de transfert des quatre éléments (le correcteur, l'amplificateur, le processus et le capteur).

Fonction de transfert en boucle ouverte: $T(p) = R(p).G(p).F(p).\lambda$

Nous verrons au cours des paragraphes de ce chapitre qu'il ne faudra pas, en général, calculer la fonction de transfert en boucle fermée pour déterminer les qualités de l'asservissement. Néanmoins dans des cas simples il est préférable d'étudier la fonction de transfert du système bouclé $W(p) = V_s / V_e = Y / Y_e$.

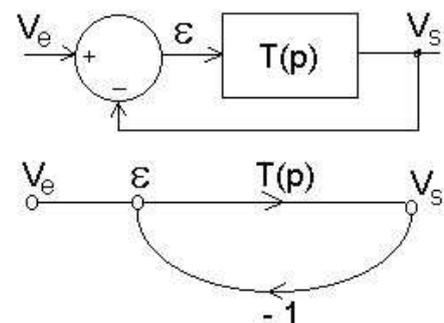
L'asservissement peut donc s'étudier comme étant un seul système, de fonction de transfert $T(p)$, qui est bouclé. On peut en faire la représentation ci-contre: La règle de Mason permet d'écrire immédiatement la fonction de transfert en boucle fermée:

$$W(p) = T(p) / [1+T(p)]$$

Mais $T(p)$ est un rapport : $T(p) = n(p) / d(p)$, ainsi il

est plus facile d'exprimer $W(p)$ en fonction de n et d :

$$W(p) = n(p) / [n(p) + d(p)]$$



Pour exprimer la fonction de transfert en boucle fermée il suffit d'ajouter le numérateur au dénominateur de la fonction de transfert en boucle ouverte.

En général nous connaissons $T(p)$ sous une forme canonique factorisée puisque c'est un produit de fonctions de transfert (il suffit par exemple que le processus soit identifié par un modèle de Strejc).

Par contre $n(p) + d(p)$ devient dans tous les cas un polynôme dont chaque coefficient dépend du réglage de gain du correcteur. L'étude de cette fonction de transfert $W(p)$ est donc souvent très compliquée. C'est pourquoi la théorie des asservissements est basée sur l'étude de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte afin d'en déduire les performances de l'asservissement (en boucle fermée).

Ainsi nous étudierons successivement la stabilité, l'amortissement, la précision et la vitesse des asservissements par l'examen de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.

Bien sûr, dans les cas simples (premier ou second ordre) il est alors plus efficace de travailler sur la fonction de transfert $W(p)$ en boucle fermée. Mais dès que l'ordre de $T(p)$ est égal ou supérieur à 3 on ne calcule pas $W(p)$.

5.2 Stabilité de la boucle

Il est assez facile de comprendre qu'une boucle peut osciller puisque le système "se mord la queue!".

Supposons que la consigne reste constante et faisons l'hypothèse que la boucle engendre une sinusoïde (superposée à une constante). Nous allons comprendre que cette hypothèse peut se vérifier.

Une sinusoïde apparaissant en V_s se retrouve instantanément en ε mais avec un déphasage de -180° (signe moins du comparateur). Il suffit que, pour la pulsation de cette sinusoïde, l'ensemble correcteur-ampli-processus-capteur introduise à son tour un déphasage de -180° pour qu'il y ait continuité

Remarque: Ceci ne peut être obtenu que si le processus est au moins d'ordre 3 (ou d'ordre inférieur avec un retard pur).

Si pour cette pulsation le gain de l'ensemble est égal à 1 la sinusoïde est auto-entretenu.

Si ce gain est inférieur à 1 la sinusoïde subit une décroissance exponentielle de son amplitude: dans ce cas la boucle est stable.

Si ce gain est supérieur à 1 la sinusoïde augmente en amplitude de façon exponentielle: dans ce cas la boucle est instable.

En pratique l'amplitude de l'oscillation ne peut pas augmenter indéfiniment car les saturations de l'amplificateur seront rapidement atteintes et la limiteront. Une oscillation d'amplitude constante mais non sinusoïdale sera alors observée: cette oscillation s'appelle *pompage*.

Ainsi la pulsation critique ω_c de l'oscillation sinusoïdale que la boucle peut créer est telle que $T(j\omega_c) = -1$ (argument de -180° et module de 1).

La pulsation critique ω_c est donc définie par l'équation $\angle T(j\omega_c) = -180^\circ$.

Rappel: dans ce cours le symbole \angle correspond à l'argument du nombre complexe.

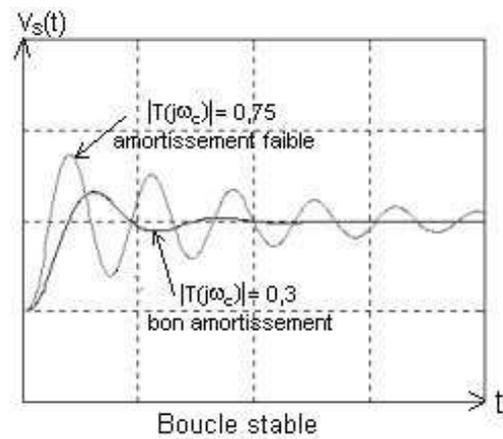
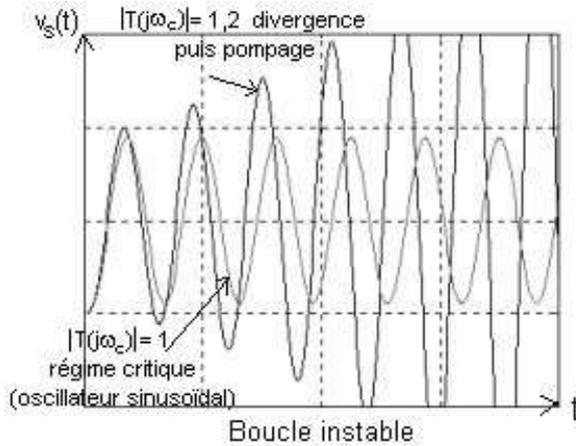
Quatre cas sont possibles:

- . Si $|T(j\omega_c)| > 1$: la boucle est instable, elle engendre une oscillation d'amplitude divergente jusqu'au *pompage* limité en amplitude par les saturations de l'amplificateur.
- . Si $|T(j\omega_c)| = 1$: la boucle engendre une oscillation sinusoïdale. Mais il s'agit d'un régime critique: en pratique ce gain ne peut pas être rigoureusement égal à 1.
- . Si $|T(j\omega_c)| < 1$ mais proche de 1 (par exemple 0,75): la boucle est stable mais mal

amortie (l'amplitude des oscillations diminue peu à chaque pseudo-période).

. Si $|T(j\omega_c)| < 1$ nettement plus petit que 1 (par exemple 0,3) : la boucle est stable et bien amortie (en une pseudo-période on retrouve pratiquement un régime permanent constant).

Seulement dans ce dernier cas on peut considérer que le système bouclé est un asservissement.



La valeur critique du nombre complexe $T(j\omega)$ est donc -1.

On peut faire une étude graphique de la stabilité de la boucle en représentant le nombre complexe $T(j\omega)$ (Nyquist ou Black) et en positionnant cette valeur -1 qui sera le *point critique*. Dans Bode le point critique devient deux axes critiques (-180° et 0 dB).

A la page suivante sont représentés les 4 cas ci-dessus décrits pour les 3 types de représentation d'un nombre complexe (Nyquist, Black et Bode).

5.2.1 Examinons tout d'abord le lieu de Nyquist de $T(j\omega)$.

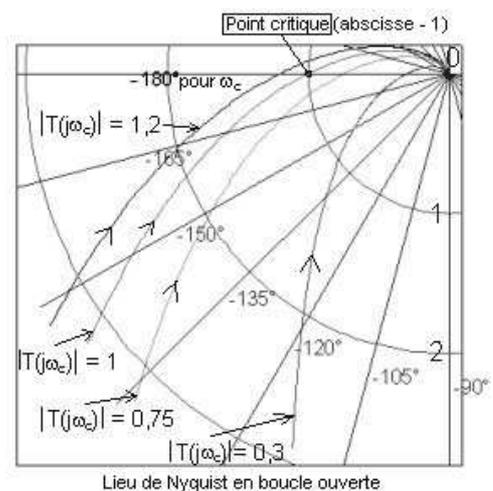
Nous avons représenté le lieu de Nyquist en boucle ouverte pour 4 réglages de gain. Il faut corrélérer ces quatre lieux avec les quatre comportements en boucle fermée représentés à la page précédente.

La pulsation critique correspond à un argument de -180°. Si pour cette pulsation le module est égal à 1 (le lieu de Nyquist passe par le point critique) on est au régime critique: la boucle engendre une oscillation sinusoïdale de pulsation ω_c .

Si pour la pulsation critique le module est supérieur à 1 la boucle est instable: elle engendre une oscillation d'amplitude divergente jusqu'au pompage.

Si pour la pulsation critique le module est inférieur à 1 la boucle est stable.

Critère du revers: Soit un "micro-observateur" se déplaçant sur le lieu de Nyquist de $T(j\omega)$ dans le sens croissant des pulsations (sens de la flèche). S'il voit le point critique sur sa droite alors la boucle est instable. S'il voit le point critique sur sa gauche, la boucle est stable. Dans ce deuxième cas, l'amortissement de la boucle est lié à la distance entre le "micro-observateur" et le point critique: plus cette distance est grande meilleur est l'amortissement de la boucle.



Nous étudierons cette notion de distance entre le lieu de Nyquist et le point critique dans le paragraphe suivant.

5.2.2 Examinons maintenant le lieu de Black de $T(j\omega)$.

Cette fois le point critique se trouve à l'intersection des axes -180° et 0 dB.

Nous avons représenté le lieu de Black en boucle ouverte pour les 4 réglages de gain.

Si pour la pulsation critique $20\log G$ vaut 0 dB (le lieu de Black passe par le point critique) la boucle est "juste" instable.

Si pour la pulsation critique $20\log G$ est positif (le lieu passe au dessus du point critique) la boucle est instable. Si pour la pulsation critique $20\log G$ est négatif (le lieu passe en dessous du point critique) la boucle est stable. Plus le lieu de Black en boucle ouverte passe bas en dessous du point critique meilleur est l'amortissement en boucle fermée.

Critère du revers: Ici le "micro-observateur" se déplaçant sur le lieu de Black (dans le sens croissant des pulsations) doit voir le point critique sur sa droite pour que la boucle soit stable.

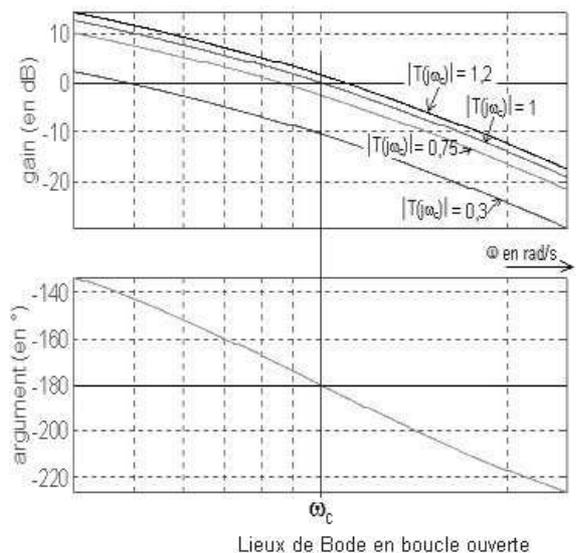
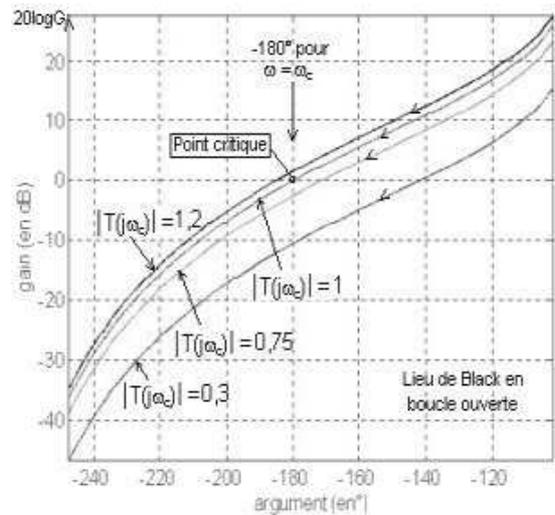
5.2.3 Examinons enfin les lieux de Bode de $T(j\omega)$.

La courbe de phase est indépendante du réglage de gain puisqu'on le règle par une action proportionnelle K du correcteur (K est un nombre réel, son argument est toujours nul). Par contre la courbe de gain subit une translation (vers le haut si on augmente K). Ainsi, pour un réglage critique tel que $20\log |T(j\omega_c)| = 0$ dB, la courbe de gain passe par 0 dB pour la pulsation critique, la boucle est "juste" instable.

Si pour la pulsation critique $20\log G$ est positif (la courbe de gain est au dessus de l'axe 0 dB) la boucle est instable.

Si pour la pulsation critique $20\log G$ est négatif (la courbe de gain est en dessous de l'axe 0 dB) la boucle est stable.

Plus, pour la pulsation critique ω_c , la courbe de gain en boucle ouverte passe bas en dessous de l'axe 0 dB meilleur est l'amortissement en boucle fermée.



5.2.4 Etude algébrique de la stabilité de la boucle.

La fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte est imposée. La question posée est : la boucle est-elle stable ?

Il faut tout d'abord remplacer p par $j\omega$ pour exprimer la transmittance harmonique $T(j\omega)$ en boucle ouverte et bien sûr exprimer le module $|T(j\omega)|$ et l'argument $\angle T(j\omega)$ de ce nombre complexe.

Puis il faut résoudre l'équation $\angle T(j\omega) = -180^\circ$. La solution est unique: c'est la pulsation critique ω_c .

Enfin il faut remplacer ω par ω_c dans l'expression du module pour obtenir la valeur numérique de $|T(j\omega_c)|$.

Si $|T(j\omega_c)| > 1$: la boucle est instable.

Si $|T(j\omega_c)| < 1$: la boucle est stable. Si de plus $|T(j\omega_c)|$ est petit par rapport à 1 (exemple: 0,25), la boucle est bien amortie.

5.2.5 Calcul du réglage critique K_c de l'action proportionnelle K du correcteur.

Cette fois le nombre complexe $T(j\omega)$ est proportionnel à K (gain réel).

Comme ci-dessus il faut résoudre l'équation $\angle T(j\omega) = -180^\circ$ (l'argument est indépendant de K). La solution est unique: c'est la pulsation critique ω_c . Puis on remplace ω par ω_c dans l'expression du module (ce module est proportionnel à K).

Il suffit d'imposer $|T(j\omega_c)| = 1$ pour en déduire la valeur critique K_c .

Pour ce réglage la boucle est juste instable, elle engendre une oscillation sinusoïdale de pulsation ω_c .

Pour un réglage $K > K_c$ la boucle est instable: pompage.

Pour $K < K_c$ la boucle est stable.

5.3 Marges de stabilité: amortissement du système bouclé

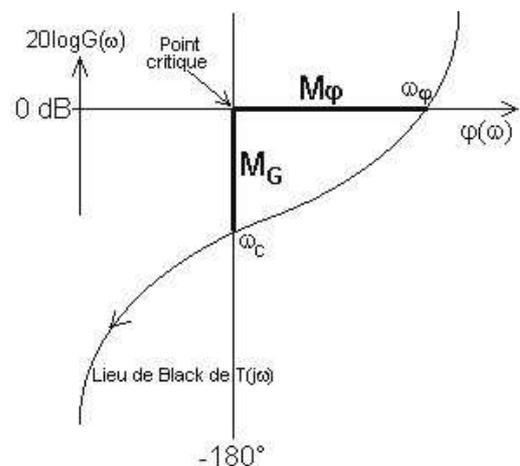
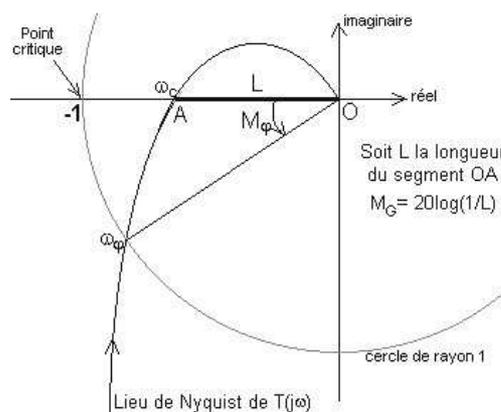
Pour réaliser un asservissement il ne faut pas seulement que la boucle soit stable, il faut en plus qu'elle soit bien amortie, de façon qu'à chaque changement de consigne et à chaque perturbation la réponse se fasse sans oscillations.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent le *critère du revers* qui donne une notion graphique, à partir de la représentation du lieu de Nyquist en boucle ouverte, de l'amortissement en boucle fermée. Pour augmenter l'amortissement il faut *augmenter la distance* du lieu par rapport au point critique.

Cette distance sera chiffrée par deux grandeurs: la marge de phase M_ϕ et la marge de gain M_G .

Avant de donner les méthodes de calcul de ces marges de stabilité, nous allons les définir graphiquement dans les trois représentations de $T(j\omega)$:

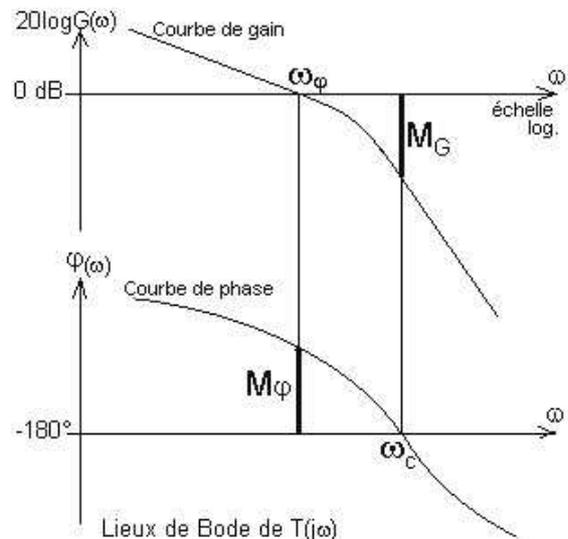
Sur le lieu de Nyquist, la marge de gain est d'autant plus grande que la longueur L du segment OA est petite, elle est inversement proportionnelle à cette longueur. On l'exprime en dB.



La marge de gain est positive si la courbe de gain est *en-dessous* de l'axe 0 dB pour la pulsation critique ω_c qui correspond à l'intersection de la courbe de phase avec l'axe -180° .

La marge de phase est positive si la courbe de phase est *au-dessus* de l'axe -180° pour la pulsation ω_ϕ correspondant à l'intersection de la courbe de gain avec l'axe 0 dB.

En fait nous verrons plus loin que c'est la valeur de la marge de phase qui est la mieux corrélée à l'amortissement de la boucle.



5.3.1 Calcul de la marge de phase

A partir de l'expression imposée de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte, on remplace p par $j\omega$ pour obtenir la transmittance harmonique $T(j\omega)$ et on exprime le module $|T(j\omega)|$ et l'argument $\angle T(j\omega)$.

Ensuite il faut résoudre l'équation $|T(j\omega)| = 1$. La solution unique de cette équation est la pulsation ω_ϕ .

Enfin on exprime la valeur de la marge de phase: $M_\phi = 180^\circ + \angle T(j\omega_\phi)$.

Remarque: Bien sûr $\angle T(j\omega_\phi)$ est négatif (par exemple -150° qui correspondrait à une marge de phase de 30°).

5.3.2 Calcul de la marge de gain

Il faut déterminer la valeur de la pulsation critique ω_c en résolvant l'équation :

$$\angle T(j\omega) = -180^\circ$$

$$\text{La marge de gain (en dB) est : } M_G = 20 \cdot \log[1/|T(j\omega_c)|]$$

5.3.3 Valeurs optimales des marges de stabilité

C'est la marge de phase qui est bien corrélée à l'amortissement de la boucle. La marge de gain doit simplement être dans tous les cas supérieure à 6 dB.

La valeur optimale de la marge de phase dépend de la classe de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.

En classe 0 : $M_\phi \cong 65^\circ$ En classe 1 ou 2 : $M_\phi \cong 50^\circ$ Dans tous les cas il faut : $M_G > 6$ dB.

Pour ces réglages de marge de stabilité la réponse indicielle de l'asservissement présentera un dépassement de l'ordre de 20% et la réponse harmonique une résonance d'environ 2,5 dB. Si, pour certaines applications, on estime que ces valeurs (20% de dépassement et 2,5 dB de résonance) sont encore trop grandes, il faut alors majorer la marge de phase de 5° (voire 10°). Mais il faut bien garder à l'esprit que ce sera au détriment de la vitesse et de la précision.

5.3.4 Réglage du gain de boucle

La fonction de transfert en boucle ouverte est proportionnelle à un gain K : $T(p) = K \cdot T_k(p)$.

$$T(j\omega) = K \cdot T_k(j\omega) \quad |T(j\omega)| = K \cdot |T_k(j\omega)| \quad \text{et} \quad \angle T(j\omega) = \angle T_k(j\omega).$$

On s'impose une marge de phase (par exemple 50° en classe 1) pour assurer un bon amortissement de la boucle.

$$\text{On résoud l'équation : } \angle T(j\omega) = -180^\circ + M \varphi$$

La solution de cette équation est nommée ω_G .

Il suffit maintenant d'imposer un module égal à 1 pour cette pulsation et on en déduit la valeur optimale K_0 du gain K :

$$K_0 \cdot |T_k(j\omega_G)| = 1 \quad \text{donc} \quad K_0 = 1 / |T_k(j\omega_G)|.$$

Il reste à vérifier que, pour ce réglage, la marge de gain est suffisante. Pour ce faire on peut calculer le réglage critique K_c qui rendrait la boucle juste instable:

$$\text{On résoud l'équation } \angle T(j\omega) = -180^\circ. \quad \text{La solution est la pulsation critique } \omega_c.$$

Pour la pulsation critique on règle le module à 1 : $K_c \cdot |T_k(j\omega_c)| = 1$ donc $K_c = 1 / |T_k(j\omega_c)|$.

En reprenant le résultat du paragraphe 5.3.2, pour le réglage K_0 la marge de gain est $M_G = 20 \cdot \log[1 / K_0 \cdot |T_k(j\omega_c)|]$.

Mais nous venons de voir juste au-dessus qu'on peut remplacer 1 par $K_c \cdot |T_k(j\omega_c)|$

$$\text{donc} \quad M_G = 20 \cdot \log[K_c / K_0]$$

5.4 Abaque de Black

L'abaque de Black et Nichols permet de déterminer graphiquement la transmittance harmonique $W(j\omega)$ en boucle fermée à partir de la représentation du lieu de Black de $T(j\omega)$ en boucle ouverte.

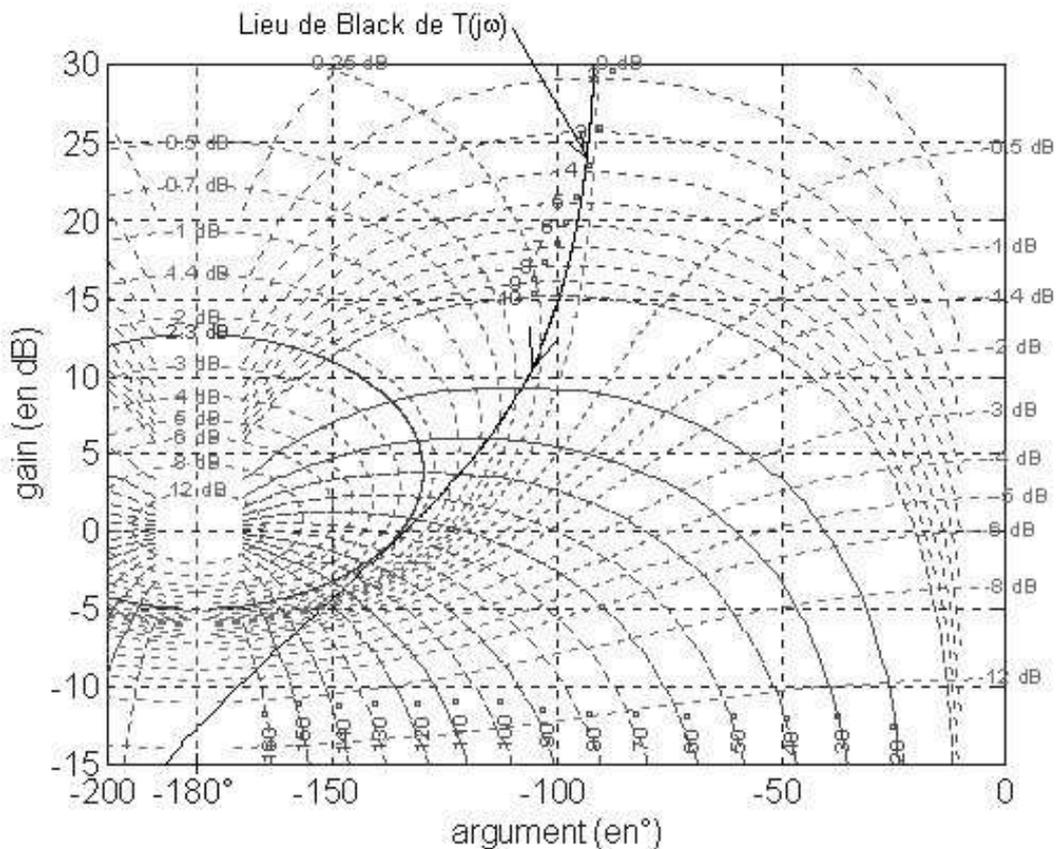
La méthode consiste notamment à fixer la résonance en boucle fermée.

La modification d'un gain K en boucle ouverte s'interprète simplement par une translation "verticale" du lieu de Black de $T(j\omega)$, vers le haut si on augmente le gain K , vers le bas si on diminue ce gain K .

Il suffit de glisser le lieu de Black en boucle ouverte (vers le haut ou vers le bas), en gardant bien l'axe -180° comme guide, pour faire « tangenter » ce lieu avec la courbe fermée de l'abaque qui correspond à la résonance qu'on s'est fixé.

Dans l'exemple ci-dessous la résonance en boucle fermée a été réglée à 2,3 dB.

En pratique, ce réglage correspond à un amortissement un peu trop faible de l'asservissement. Nous préconisons de choisir une résonance de 1,4 dB ce qui nous obligerait dans l'exemple ci-dessous à descendre un peu le lieu de Black de $T(j\omega)$, bien sûr au détriment de la vitesse et de la précision. Mais la qualité d'amortissement d'un asservissement reste la qualité essentielle.



Le lieu de Black de $T(j\omega)$ devant être gradué en ω , une fois le réglage fait du gain optimum K_0 (lieu de Black en boucle ouverte figé), l'abaque permet de tracer point par point les lieux de Bode de $W(j\omega)$ (lieux de Bode de l'asservissement). En effet par un point du lieu de Black en boucle ouverte (qui correspond à une pulsation particulière ω_i) passent deux courbes de l'abaque de Black et Nichols: l'une qui donne le module $20\log |W(j\omega_i)|$ en dB, et l'autre qui donne l'argument $\angle W(j\omega_i)$. Cette méthode graphique était dans le passé la meilleure méthode de réglage du gain de boucle car il n'existait pas de moyens de calculs algébriques comme aujourd'hui (ne seraient-ce que nos calculettes scientifiques).

5.5 Précision des asservissements

La qualité précision est la plus facile à étudier. En effet il s'agit d'étudier la valeur de l'erreur $\varepsilon(t)$ en régime permanent.

Grâce au théorème de la valeur finale (chapitre 1 paragraphe 1.6) il sera aisé de calculer l'erreur permanente en réponse à une consigne donnée. De plus c'est grâce à ce théorème qu'on peut généraliser les résultats.

Nous allons déterminer cette erreur finale en réponse aux trois fonctions canoniques: échelons de position, de vitesse et d'accélération.

Cette fois nous nous intéressons à l'erreur $\varepsilon(t)$ dont l'image est $\mathcal{E}(p)$. Voir le graphe en bas de la page 54.

La fonction de transfert $\mathcal{E}(p) / V_e(p)$ est (application de la règle de Mason):

$\mathcal{E} / V_e = 1 / [1 + T(p)]$ avec $T(p) = n(p) / d(p)$ donc:

$\mathcal{E} / V_e = d(p) / [n(p) + d(p)]$ d'où:

$\mathcal{E}(p) = [V_e(p).d(p)] / [n(p) + d(p)]$.

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{E}(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p.\mathcal{E}(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{[p.V_e(p).d(p)] / [n(p) + d(p)]\} .$$

Pour une consigne donnée, l'erreur finale dépend essentiellement de la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$. Il nous faut donc examiner 9 cas: 3 classes d'asservissement pour 3 types de consigne.

5.5.1 Précision des asservissements de classe 0

$$T(p) = K_0.[1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m] / [1 + \beta_1 p + \dots + \beta_n p^n]$$

Cette fonction de transfert est essentiellement caractérisée par son gain en position K_0 .

Erreur de position ε_0 : la consigne est un échelon de position $v_e(t) = a_0.u(t)$ donc $V_e(p) = a_0/p$.

$$\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{E}(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{[p.(a_0/p).(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_0(1 + \alpha_1 p + \dots) + (1 + \beta_1 p + \dots)]\} = a_0 / (K_0 + 1) .$$

Un asservissement de classe 0 présente une erreur de position importante car pour assurer la stabilité de la boucle le gain K_0 ne vaut que quelques unités

$$\varepsilon_0 = a_0 / (K_0 + 1) .$$

Par exemple si $K_0 = 7$, l'erreur de position est de 12,5% de la consigne.

Erreur de traînage en vitesse ε_1 : la consigne est un échelon de vitesse $v_e(t) = a_1.t.u(t)$ donc $V_e(p) = a_1/p^2$.

$$\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{E}(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{[p.(a_1/p^2).(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_0(1 + \alpha_1 p + \dots) + (1 + \beta_1 p + \dots)]\} \rightarrow \infty .$$

Un asservissement de classe 0 ne peut pas suivre un échelon de vitesse de consigne: l'erreur ne fait qu'augmenter.

Erreur de traînage en accélération ε_2 : la consigne est un échelon d'accélération $v_e(t) = a_2.(t^2/2).u(t)$ donc $V_e(p) = a_2/p^3$.

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathcal{E}(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{[p.(a_2/p^3).(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_0(1 + \alpha_1 p + \dots) + (1 + \beta_1 p + \dots)]\} \rightarrow \infty .$$

Un asservissement de classe 0 ne peut déjà pas suivre un échelon de vitesse de consigne, alors un échelon d'accélération ...!!

5.5.2 Précision des asservissements de classe 1

$$T(p) = K_1.[1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m] / [p(1 + \beta_1 p + \dots + \beta_{n-1} p^{n-1})]$$

Cette fonction de transfert est essentiellement caractérisée par son gain en vitesse K_1 .

Erreur de position ε_0 : la consigne est un échelon de position $v_e(t) = a_0.u(t)$ donc $V_e(p) = a_0/p$.

$$\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_0/p) \cdot p(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_1(1 + \alpha_1 p + \dots) + p(1 + \beta_1 p + \dots)] \} = 0 .$$

Un asservissement de classe 1 présente une *erreur de position nulle* quelle que soit la consigne et quelles que soient les perturbations. C'est évidemment un avantage énorme par rapport aux asservissements de classe 0. Il a suffi pour cela de mettre un intégrateur dans la boucle (par exemple: action intégrale du correcteur P.I.D.) .

Erreur de traînage en vitesse ε_1 : la consigne est un échelon de vitesse $v_e(t) = a_1 \cdot t \cdot u(t)$ donc $V_e(p) = a_1/p^2$.

$$\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_1/p^2) \cdot p(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_1(1 + \alpha_1 p + \dots) + p(1 + \beta_1 p + \dots)] \} = a_1 / K_1 .$$

Un asservissement de classe 1 peut suivre un échelon de vitesse de consigne mais avec une erreur de traînage inversement proportionnelle au gain en vitesse en boucle ouverte.

Erreur de traînage en accélération ε_2 : la consigne est un échelon d'accélération $v_e(t) = a_2 \cdot (t^2/2) \cdot u(t)$ donc $V_e(p) = a_2/p^3$.

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_2/p^3) \cdot p(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_1(1 + \alpha_1 p + \dots) + p(1 + \beta_1 p + \dots)] \} \rightarrow \infty .$$

Un asservissement de classe 1 ne peut pas suivre un échelon d'accélération, l'erreur ne fait qu'augmenter.

Ces résultats seront rassemblés dans un tableau récapitulatif deux pages plus loin. Mais il nous reste à étudier la précision des asservissements de classe 2.

5.5.3 Précision des asservissements de classe 2

$$T(p) = K_2 \cdot [1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m] / [p^2(1 + \beta_1 p + \dots + \beta_{n-2} p^{n-2})]$$

Cette fonction de transfert est essentiellement caractérisée par son gain en accélération K_2 .

Erreur de position ε_0 : la consigne est un échelon de position $v_e(t) = a_0 \cdot u(t)$ donc $V_e(p) = a_0/p$.

$$\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_0/p) \cdot p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_2(1 + \alpha_1 p + \dots) + p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] \} = 0 .$$

Un asservissement de classe 2 présente une *erreur de position nulle* quelle que soit la consigne et quelles que soient les perturbations comme en classe 1.

Erreur de traînage en vitesse ε_1 : la consigne est un échelon de vitesse $v_e(t) = a_1 \cdot t \cdot u(t)$ donc $V_e(p) = a_1/p^2$.

$$\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_1/p^2) \cdot p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_2(1 + \alpha_1 p + \dots) + p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] \} = 0 .$$

Un asservissement de classe 2 suit un échelon de vitesse de consigne sans erreur de traînage, quelle que soit l'amplitude de cet échelon de vitesse. C'est tout simplement remarquable!

Erreur de traînage en accélération ε_2 : la consigne est un échelon d'accélération $v_e(t) = a_2 \cdot (t^2/2) \cdot u(t)$ donc $V_e(p) = a_2/p^3$.

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \{ [p \cdot (a_2/p^3) \cdot p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] / [K_2(1 + \alpha_1 p + \dots) + p^2(1 + \beta_1 p + \dots)] \}$$

....)}} = a_2 / K_2 .

Un asservissement de classe 2 peut même suivre un échelon d'accélération, certes avec une erreur de traînage inversement proportionnelle au gain en accélération de la fonction de transfert en boucle ouverte.

On pourrait se demander pourquoi on ne réalise pas que des asservissements de classe 2 puisqu'ils ont une qualité précision excellente. Et bien tout simplement parce qu'ils sont difficiles à mettre au point en ce qui concerne l'amortissement (voire la stabilité). En effet en classe 2 il y a deux intégrateurs qui introduisent 180° de retard de phase. S'il n'y avait pas de correcteur à forte avance de phase, la boucle serait obligatoirement instable [voir le critère du revers et l'allure des lieux de Nyquist de $T(j\omega)$ en classe 2].

Ainsi on peut dire que les asservissements de classe 0 sont médiocres; ce sont uniquement des asservissements "grand public". *On peut illustrer cette classe 0 par un tireur au fusil qui ne parvient pas à atteindre la cible fixe, par exemple un petit disque d'argile située à 50 mètres (erreur de position plus ou moins grande).*

Les asservissements de classe 1 sont les plus nombreux : la majorité des asservissements industriels. En régulation l'erreur statique est nulle. *En classe 1 le tireur au fusil atteint la cible fixe à tous les coups (pas d'erreur de position).*

Les asservissements de classe 2 correspondent à des applications de laboratoire, de l'industrie de pointe, du domaine spatial et du domaine militaire. *En classe 2 le tireur au fusil atteint la cible en mouvement (ball- trap). L'erreur de traînage est nulle.*

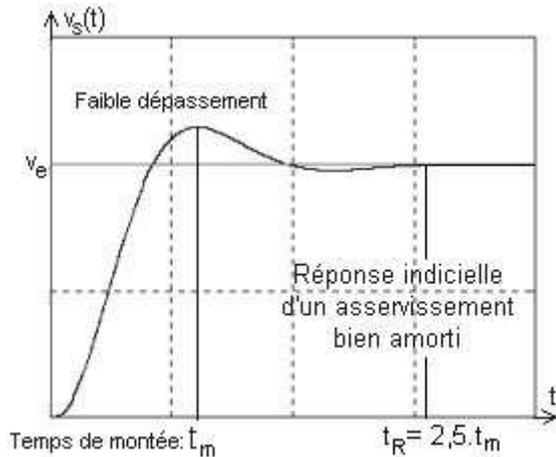
... Alors qu'en boucle ouverte, le tireur aurait les yeux fermés !!!

5.5.4 Tableau récapitulatif de la valeur finale de la tension d'erreur :

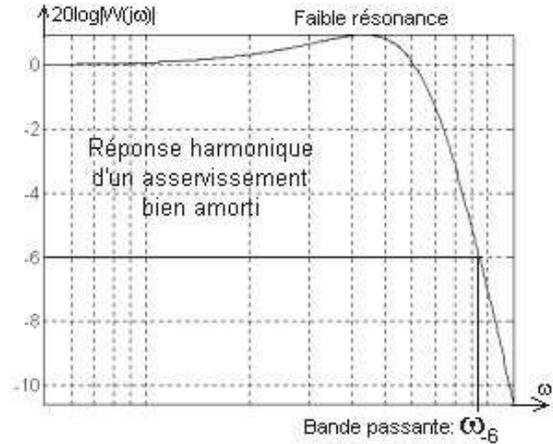
Type de consigne	Classe 0 Gain en position de $T(p) : K_0$	Classe 1 Gain en vitesse de $T(p) : K_1$	Classe 2 Gain en accélération de $T(p) : K_2$	
Echelon de position $v_e = a_0.u(t)$	$\epsilon_0 = a_0 / (K_0 + 1)$	$\epsilon_0 = 0$	$\epsilon_0 = 0$	Erreur de position
Echelon de vitesse $v_e = a_1.t.u(t)$	$\epsilon_1 \longrightarrow \infty$	$\epsilon_1 = a_1 / K_1$	$\epsilon_1 = 0$	Erreur de traînage en vitesse
Echelon d'accélération $v_e = a_2.(t^2/2).u(t)$	$\epsilon_2 \longrightarrow \infty$	$\epsilon_2 \longrightarrow \infty$	$\epsilon_2 = a_2 / K_2$	Erreur de traînage en accélération

5.6 Vélécité des asservissements

La réponse indicielle d'un asservissement bien amorti est caractérisée par son temps de montée t_m et par un faible dépassement (par exemple 15%).



La réponse harmonique d'un asservissement bien amorti est caractérisée par sa bande passante à -6 dB (ω_{-6}) et par une faible résonance (par exemple 1,4 dB).



La vélocité de l'asservissement pourra être chiffrée soit par la valeur de son temps de montée, soit par la valeur de sa bande passante, sachant que le produit $t_m \cdot \omega_{-6}$ est constant : si on double la bande passante, le temps de montée est divisé par 2.

Les réponses ci-dessus sont comparables à celles d'un système du second ordre bien amorti (par exemple $z = 0,5$). Pour un système du second ordre on a : $t_m \cdot \omega_{-6} = \pi \cdot 3^{1/2} \cong 5,44$.

Nous admettrons que pour un asservissement quelconque nous aurons sensiblement le même résultat.

Expérimentalement il est facile de mesurer le temps de montée; c'est plus délicat de mesurer la bande passante (surtout si elle est très faible comme dans le cas d'un asservissement de température).

Par la théorie c'est le contraire: il est très difficile de calculer le temps de montée, alors qu'il est facile de calculer la bande passante.

Nous nous servirons par conséquent de la relation empirique $t_m \cdot \omega_{-6} \cong 5,44$ pour chiffrer la donnée manquante.

Mais nous avons dit au début du chapitre 5 que nous allons étudier l'ensemble des qualités d'un asservissement en utilisant uniquement l'expression de sa fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.

Nous allons comparer ci-dessous la courbe de gain de $T(j\omega)$ en boucle ouverte et celle de $W(j\omega)$ en boucle fermée.

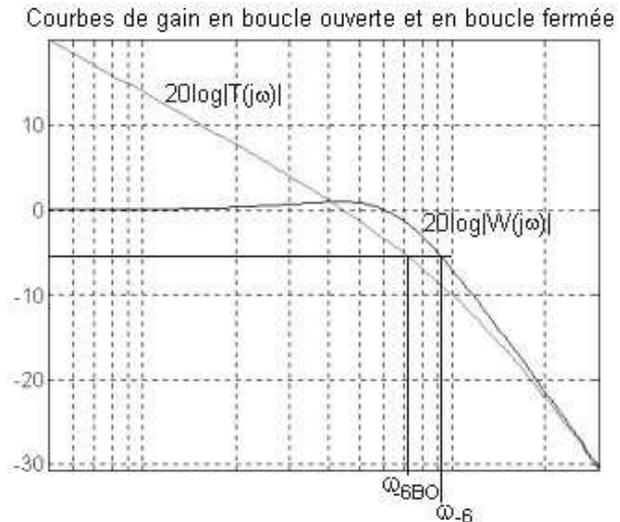
$$T(p) = n(p) / d(p) \quad \text{et} \quad W(p) = n(p) / [n(p) + d(p)] \quad \text{donc:}$$

$$T(j\omega) = n(j\omega) / d(j\omega) \quad \text{et} \quad W(j\omega) = n(j\omega) / [n(j\omega) + d(j\omega)]$$

Bien sûr le degré de $n(p)$ est inférieur au degré de $d(p)$: tous les asservissements sont des filtres passe-bas.

Donc plus la pulsation ω augmente, plus $n(j\omega)$ devient petit par rapport à $d(j\omega)$, d'où:

Pour ω grand $W(j\omega) \rightarrow T(j\omega)$



Ainsi pour ω grand par rapport à la bande passante les deux courbes de gain (en boucle ouverte et en boucle fermée) se rejoignent (ainsi que les courbes de phase évidemment).

Inversement pour ω petit, le gain en boucle ouverte est très grand (notamment s'il y a un intégrateur), et de ce fait le gain en boucle fermée est égal à 1 [cette fois c'est $d(j\omega)$ qui est négligeable par rapport à $n(j\omega)$].

Au passage à - 6 dB les deux courbes ne sont pas encore confondues, mais on peut estimer que pour un bon amortissement de la boucle il y a toujours environ un rapport 1,25 entre les deux pulsations ω_{-6BO} et ω_{-6} (cette dernière pulsation correspondant à la bande passante de l'asservissement).

Le passage des courbes de gain à - 6 dB correspond à un module égal à 0,5 [$20\log 0,5 = -6$].

L'étude théorique de la vitesse d'un asservissement consiste donc à résoudre l'équation:

$$|T(j\omega)| = 0,5 . \text{ La solution de cette équation est } \omega_{-6BO}.$$

On en déduit la bande passante de l'asservissement : $\omega_{-6} \cong 1,25 \cdot \omega_{-6BO}$ ainsi que son temps de montée $t_m \cong 5,44 / \omega_{-6}$.

De plus, si l'asservissement est bien amorti, la réponse indicielle, (voir la réponse au début du paragraphe), sera pratiquement en régime permanent au bout de 2,5 pseudo-périodes : $t_R = 2,5t_m$.

Remarque: Cette méthode ne permet pas de calculer précisément le temps de montée de l'asservissement puisqu'on fait deux approximations empiriques: d'abord le coefficient 1,25 puis le coefficient 5,44. Aussi il faut arrondir les résultats obtenus.

5.7 Sensibilité aux perturbations

La boucle d'asservissement a été créée notamment pour réagir aux perturbations.

Prenons le cas d'une perturbation $p_e(t)$ dont l'image est $P_e(p)$.

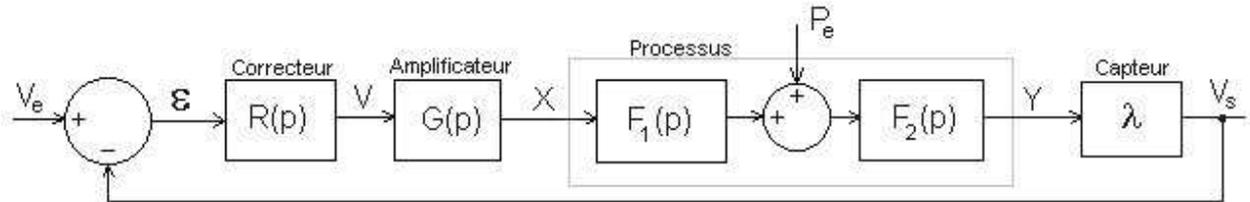
Sans boucle d'asservissement, nous pouvons exprimer la sortie du processus Y en fonction de la commande X et de la perturbation P_e :

$$Y = F.X + F_2.P_e \text{ avec } F = F_1.F_2 .$$

Bien sûr P_e peut être positif ou négatif.

Exemple d'un moteur: X = image de la tension d'induit, Y = image de la vitesse, P_e = image du couple résistant.

En boucle fermée nous aurons:



$$\text{Posons } T(p) = R(p).G(p).F_1(p).F_2(p).\lambda .$$

D'autre part nous savons que V_e représente la consigne physique : $V_e = \lambda.Y_e$.

En boucle fermée nous obtenons (utilisation de la règle de Mason):

$$Y = [T / (1+T)].Y_e + [F_2 / (1+T)].P_e$$

Si nous comparons les relations de Y en boucle ouverte et en boucle fermée, nous voyons que l'influence de la perturbation en boucle fermée est divisée par $(1 + T)$ par rapport à l'influence en boucle ouverte.

Examinons notamment l'influence de la perturbation en régime permanent: la fonction de transfert $F_2(p)$ peut alors être remplacée par son gain statique B_0 . De même on peut remplacer $F(p) = F_1.F_2$ par son gain statique C_0 .

Supposons que la perturbation reste constante: $p_e(t) = p_e = \text{constante}$.

En boucle ouverte $x(t)$ reste constant $x = x_e$.

$$\text{Nous aurons: } y_\infty = C_0.x_e + B_0.p_e .$$

La perturbation a une influence permanente donnée par le gain B_0 .

En boucle fermée de classe 0 nous pouvons remplacer $T(p)$ par son gain en position A_0 (pour assurer l'amortissement de la boucle ce gain en position ne vaut que quelques unités). Supposons une consigne constante y_e .

$$\text{Nous aurons } y_\infty = [A_0/(1+A_0)].y_e + [B_0/(1+A_0)].p_e .$$

L'influence permanente de la perturbation est divisée par $(1+A_0)$.

En boucle fermée de classe 1 $T(p)$ comporte un intégrateur (ce qui correspondrait à un gain statique A_0 infini).

$$\text{Nous aurons } y_\infty = y_e .$$

L'influence permanente de la perturbation est nulle: par exemple la vitesse du moteur en charge est égale à la vitesse à vide puisque, toutes deux, égales à la vitesse de consigne.

Fin du chapitre 5

Dans le chapitre 6 (le dernier mais le plus long), nous allons montrer comment améliorer les performances des asservissements par la mise en place de correcteurs adaptés.

Chapitre 6

Améliorations des Performances des Asservissements.

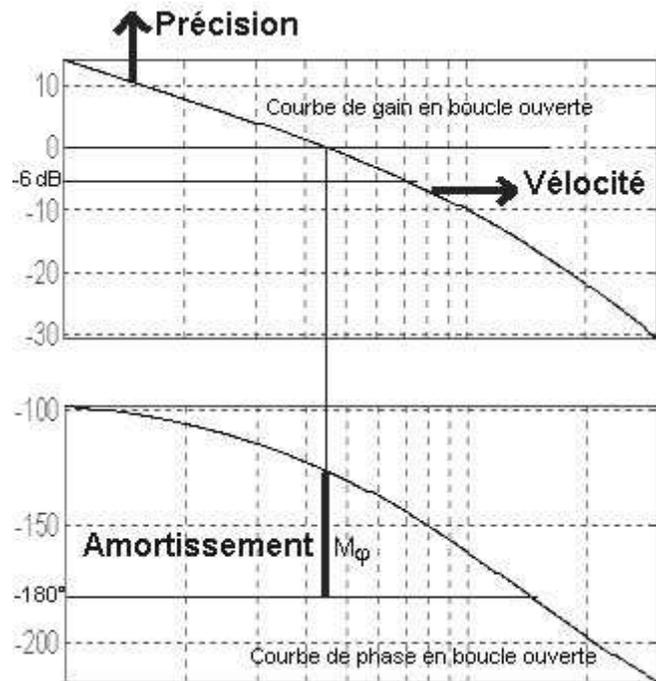
Correcteurs PI, PD, PID, PIR, spécifiques.

6.1 Rappels. But de la correction

Les trois qualités d'un asservissement sont: la précision, la vélocité et l'amortissement. Les lieux de Bode de $T(j\omega)$ en boucle ouverte (ci-contre) permettent de bien comprendre le but de la correction:

. Pour améliorer la précision (voir tableau des erreurs statiques au paragraphe 5.5.4) il faut, pour une classe donnée, remonter la courbe de gain dans le domaine des basses pulsations (augmenter le gain en position ou en vitesse).

. Pour améliorer la vélocité (voir le paragraphe 5.6) il faut augmenter la pulsation ω_{6BO} donc tirer la courbe de gain vers la droite.



Nous voyons bien qu'il n'y a aucune incompatibilité entre ces deux premières qualités car si on relève l'ensemble de la courbe de gain on améliore ensemble la précision et la vélocité. Malheureusement il y a l'amortissement de la boucle qui est une qualité essentielle.

Pour avoir un bon amortissement il faut une bonne marge de phase M_ϕ (voir les lieux de Bode du paragraphe 5.3).

Et là nous voyons bien que c'est incompatible avec une translation vers le haut de la courbe de gain en boucle ouverte. Il y a donc toujours dans une boucle d'asservissement un dilemme entre le couple de qualités précision-vélocité et la qualité amortissement (qualité indispensable).

On peut donc en déduire que le but de la correction est de remonter la courbe de gain (en boucle ouverte) dans le domaine des basses pulsations et de tirer cette courbe de gain vers la droite dans le domaine des hautes pulsations, tout en conservant des marges de stabilité satisfaisantes (c'est là qu'intervient la courbe de phase!).

Nous allons, dans les paragraphes suivants, étudier la fonction de transfert des principaux correcteurs et la modification des lieux de Bode en boucle ouverte apportée par la mise en place du correcteur.

6.2 Amélioration de la précision: Correcteur P.I. et correcteur à retard de phase

6.2.1 Correcteur P.I. (actions proportionnelle et intégrale)

Ce correcteur permet un changement de classe de l'asservissement (de la classe 0 à la classe 1) donc permet une amélioration très sensible de la précision (plus d'erreur de position). Par contre, le retard de phase apporté par ce correcteur ne peut en aucune façon améliorer la qualité vélocité de l'asservissement, au contraire!

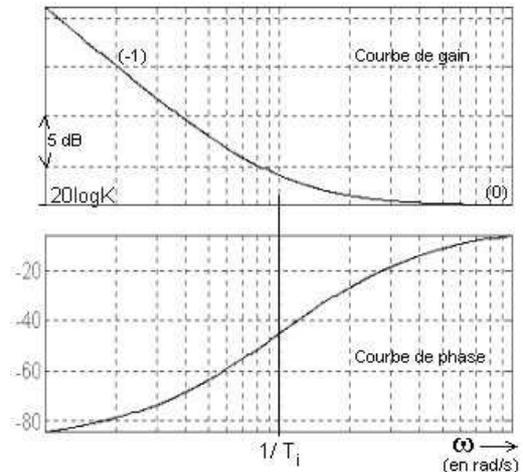
Fonction de transfert du correcteur P.I.:

$$R(p) = K[1 + 1/(T_i p)] = K(1 + T_i p) / (T_i p)$$

Transmittance harmonique: $R(j\omega) = K(1 + j\omega T_i) / (j\omega T_i)$

$$|R(j\omega)| = [K(1 + \omega^2 T_i^2)^{1/2}] / \omega T_i \quad \angle R(j\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega T_i)$$

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre.

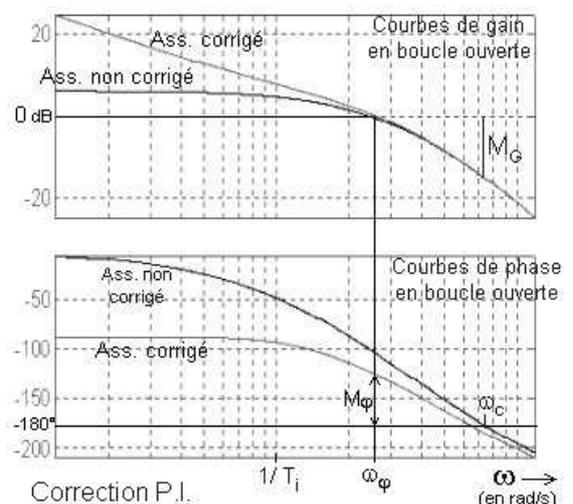


Critère de réglage:

Si on suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°), on peut introduire le correcteur P.I. en gardant le même réglage de gain (action proportionnelle). Afin de conserver un bon amortissement il faut que la pulsation $1/T_i$ soit très inférieure à la pulsation critique de l'asservissement non corrigé, de façon à ne pas trop diminuer la marge de phase. Mais en classe 1 la marge de phase nécessaire est plus petite qu'en classe 0. Pratiquement, on règle:

$$T_i = (7,5 / \omega_c)$$

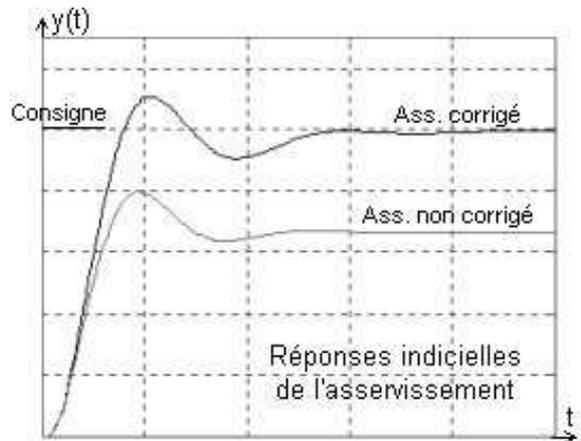
Comparez ci-contre les lieux de Bode en boucle ouverte avec et sans correcteur. Avec le critère de réglage énoncé, on constate que la pulsation ω_ϕ , à l'intersection de la courbe de gain avec l'axe 0 dB, est pratiquement inchangée après correction.



On constate sur les courbes de phase une diminution de la marge de phase d'environ 20° à 25° après correction, ce qui donne une marge de phase M_ϕ optimale en classe 1. On constate aussi que la pulsation critique, après correction, est très légèrement inférieure, mais ceci n'affecte en rien la marge de gain qui reste largement suffisante.

Les réponses indicielles de l'asservissement (en boucle fermée bien entendu) non corrigé puis corrigé par correcteur P.I. sont données ci-contre:

Sans correction l'erreur de position est très importante car pour assurer un bon amortissement le gain de boucle est faible (ici seulement 2 unités donc erreur de 33%). Grâce à l'action intégrale la réponse de l'asservissement corrigé présente une erreur de position nulle. Par contre le temps de montée est plus grand.



6.2.2 Correcteur à retard de phase

Ce correcteur ne change pas la classe de l'asservissement mais remonte la courbe de gain en boucle ouverte dans le domaine des basses pulsations, ce qui permet de diminuer soit l'erreur de position en classe 0 soit l'erreur de traînage en classe 1.

Fonction de transfert du correcteur à retard de phase:

$$R(p) = K(1 + b.T_i p) / (1 + T_i p) \quad \text{avec } b < 1.$$

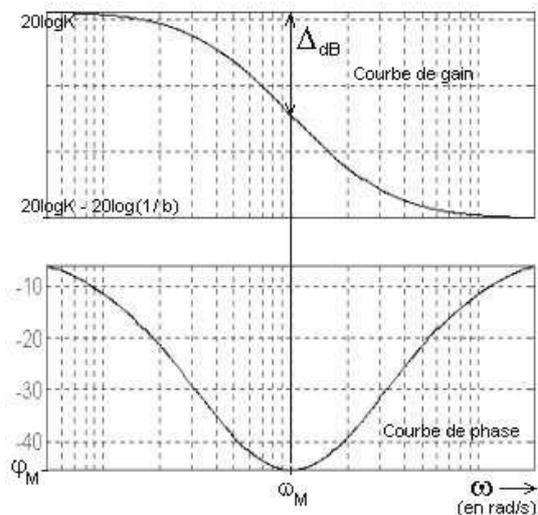
Transmittance harmonique: $R(j\omega) = K(1 + j\omega b T_i) / (1 + j\omega T_i)$

$$|R(j\omega)| = [K(1 + \omega^2 b^2 T_i^2)^{1/2}] / (1 + \omega^2 T_i^2)^{1/2}$$

$$\angle R(j\omega) = \arctan(\omega b T_i) - \arctan(\omega T_i)$$

b étant inférieur à 1, l'argument est toujours négatif.

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre:



La courbe de phase présente un axe de symétrie pour une pulsation ω_M qui est la moyenne géométrique des deux pulsations $1/(bT_i)$ au numérateur et $1/T_i$ au dénominateur: $\omega_M = 1/(T_i \cdot b^{1/2})$

Pour cette pulsation le retard de phase maximum est:

$$\varphi_M = \arctan(b^{1/2}) - \arctan(b^{-1/2}) = -\arcsin[(1-b)/(1+b)].$$

Pour cette pulsation ω_M , la diminution du gain par rapport à $20\log K$ est:

$\Delta_{dB} = -10\log(1/b)$. A la page suivante sont données les valeurs de φ_M et de Δ_{dB} pour quelques valeurs de b.

b	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
φ_M	- 19,5°	- 25,4°	- 32,6°	- 41,8°	- 54,9°	- 64,8°
Δ_{dB}	- 3 dB	- 4 dB	- 5,2 dB	- 7 dB	- 10 dB	- 13 dB

Nous allons montrer comment ce type de correction améliore la précision de l'asservissement en prenant un exemple en classe 0. Dans ce cas c'est l'erreur de position qui est plus petite. En classe 1 ce serait l'erreur de traînage qui serait plus petite.

On suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°) mais son erreur de position est beaucoup trop grande. On souhaite augmenter le gain de boucle dans un rapport k (en pratique: maximum 5). Dans notre exemple nous avons choisi $k = 3,75$. L'erreur de position de l'asservissement non corrigé est de 33,3% (gain de boucle = 2 pour avoir un bon amortissement). Après correction l'erreur de position sera réduite à 11,7%.

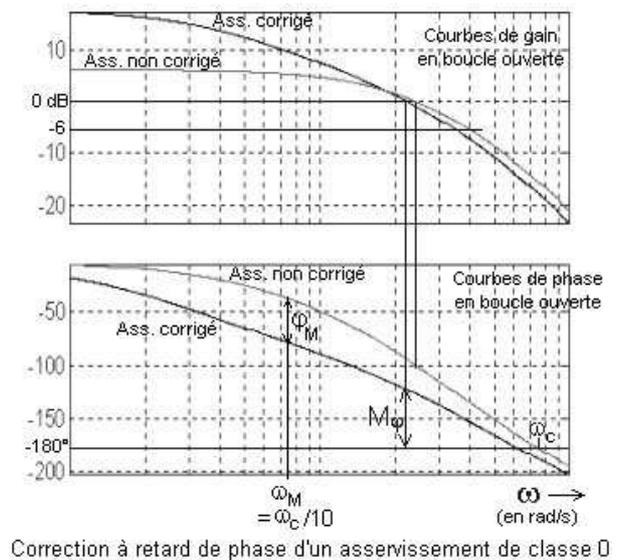
Critère de réglage:

On règle $b = 0,75 / k$ donc $b = 0,2$ pour notre exemple.

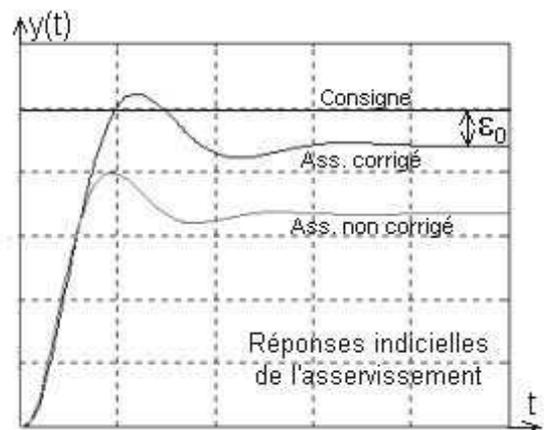
Puis nous calons la pulsation centrale du correcteur à une décade en dessous de la pulsation critique de l'asservissement non corrigé, afin de ne pas trop diminuer la marge de phase:

$$\omega_M = \omega_c / 10 \text{ donc } T_i = 10 / (\omega_c \cdot b^{1/2}) .$$

Avec ces réglages les marges de stabilité restent suffisantes. Par contre la bande passante de l'asservissement diminue un peu, donc l'amélioration de la précision se fait au détriment de la vélocité avec un correcteur à retard de phase. Les réponses indicielles (en boucle fermée bien entendu) sont données ci-contre:



Correction à retard de phase d'un asservissement de classe 0



Si l'on faisait un exemple en classe 1 (erreur de position nulle), nous aurions les mêmes résultats avec le même critère de réglage, simplement ce serait l'erreur de traînage qui serait divisée par k .

En fait ce type de correction est très peu utilisé, car avec les mêmes composants on peut réaliser un correcteur à avance de phase qui donnent des résultats beaucoup plus intéressants.

6.3 Amélioration de la vitesse et de la précision: Correcteur P.D. ou à avance de phase

Ce correcteur ne change pas la classe de l'asservissement mais permet de remonter la courbe de gain en boucle ouverte dans le domaine des basses pulsations, ce qui diminue soit l'erreur de position en classe 0 soit l'erreur de traînage en classe 1. Mais surtout ce correcteur décale la courbe de gain en boucle ouverte vers la droite (hautes pulsations) ce qui permet une augmentation importante de la bande passante de l'asservissement, donc une amélioration sensible de la vitesse.

Fonction de transfert du correcteur P.D ou à avance de phase:

$$R(p) = K[1 + (T_d p)/(1 + \tau_d p)] = K(1 + T_a p) / (1 + b.T_a p) \text{ avec } b < 1.$$

La première écriture de $R(p)$ correspond à la fonction de transfert du correcteur P.D. et la seconde à la fonction de transfert du correcteur à avance de phase. Mais ces deux fonctions de transfert sont égales avec:

$$\tau_d = b.T_a \text{ et } T_a = T_d + \tau_d.$$

Nous allons travailler avec la seconde expression, qui est sous une forme canonique.

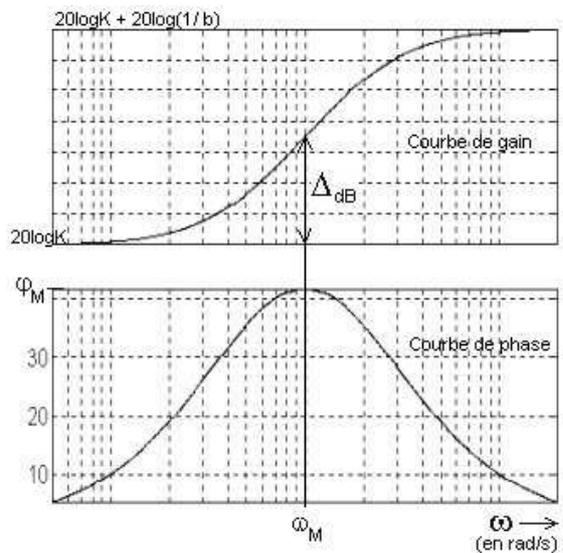
Transmittance harmonique: $R(j\omega) = K(1 + j\omega T_a) / (1 + j\omega b T_a)$

$$|R(j\omega)| = [K(1 + \omega^2 T_a^2)^{1/2}] / (1 + \omega^2 b^2 T_a^2)^{1/2}$$

$$\angle R(j\omega) = \arctan(\omega T_a) - \arctan(\omega b T_a)$$

b étant inférieur à 1, l'argument est toujours positif.

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ sont représentés ci-contre:



La courbe de phase présente un axe de symétrie pour une pulsation ω_M qui est la moyenne géométrique des deux pulsations $1/(T_a)$ au numérateur et $1/bT_a$ au dénominateur: $\omega_M = 1/(T_a \cdot b^{1/2})$.

Pour cette pulsation l'avance de phase maximum est: $\phi_M = \arctan(b^{-1/2}) - \arctan(b^{1/2}) = \arcsin[(1-b)/(1+b)]$.

Pour cette pulsation ω_M , l'augmentation du gain par rapport à $20\log K$ est: $\Delta_{dB} = 10\log(1/b)$.

b	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
ϕ_M	+ 19,5°	+ 25,4°	+ 32,6°	+ 41,8°	+ 54,9°	+ 64,8°
Δ_{dB}	+ 3 dB	+ 4 dB	+ 5,2 dB	+ 7 dB	+ 10 dB	+ 13 dB

On suppose que l'asservissement non corrigé, de classe 0, est très bien amorti (par exemple avec une marge de phase de 75°) mais son erreur de position est grande et son temps de montée trop important. On souhaite réduire l'erreur de position et le temps de montée grâce au correcteur à avance de phase. Plus on choisira b faible, plus on améliorera les qualités précision et vitesse. Mais en pratique on se limite à $b = 0,05$.

Critère de réglage:

On règle b en fonction de l'objectif fixé (dans un correcteur P.D. on prend généralement $b = 0,1$).

Pour notre exemple nous choisissons $b = 0,2$. La pulsation centrale du correcteur est alors réglée à environ une octave à droite de la pulsation critique de l'asservissement non corrigé:

$$\omega_M = \omega_c / (1,25 \cdot b^{1/2}) \quad \text{donc } T_a = 1,25 / \omega_c$$

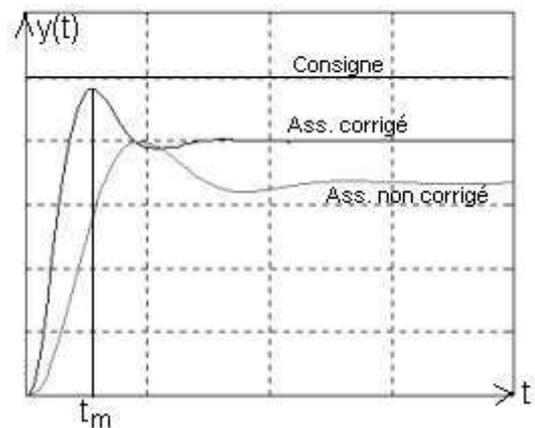
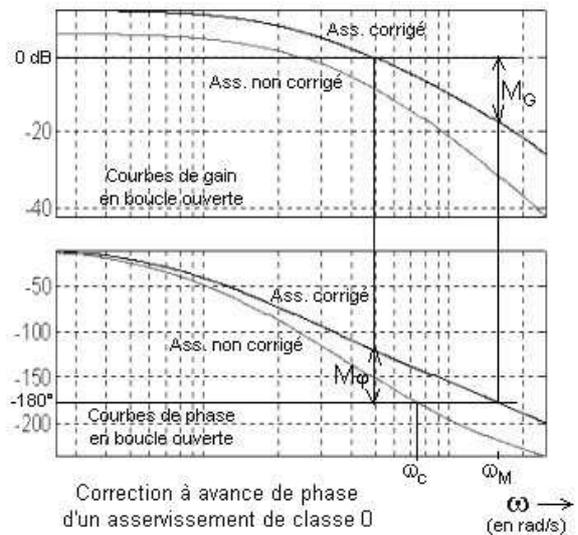
Avec ces réglages les marges de stabilité seront satisfaisantes en adoptant un gain K compris entre 2 et 2,5.

Pour notre exemple nous avons pris $K = 2$.

Les lieux de Bode ci-contre montrent qu'avec ces réglages les objectifs décrits au paragraphe 6.1 sont atteints.

Pratiquement, en classe 0 on peut sans difficulté avec le correcteur à avance de phase diviser l'erreur de position par 2, et diviser le temps de montée par 2. On a alors un asservissement beaucoup plus performant que sans correction, nous pourrions dire "4 fois" plus performant.

Les réponses indicielles (en boucle fermée bien entendu) sont données ci-contre:



Nous allons maintenant examiner la correction P.D. d'un asservissement de classe 1.

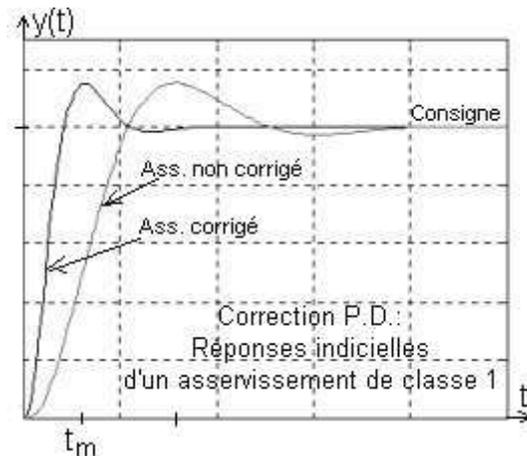
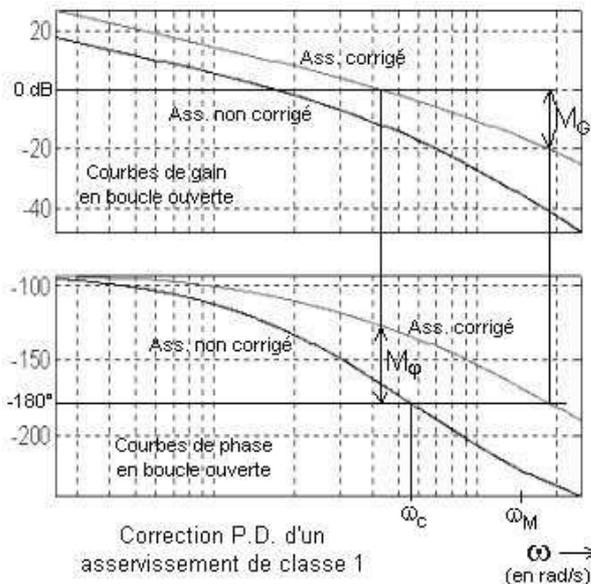
Critère de réglage:

$$b = 0,1 \quad T_d = 0,9T_a = 1,125 / \omega_c \quad \text{donc } T_d = 0,18T_c \quad \text{puisque } T_c = 2\pi / \omega_c$$

Rappel: ω_c est la pulsation critique avant correction.

La valeur de K permettant de retrouver de bonnes marges de stabilité est alors comprise entre 2,5 et 3 (dans l'exemple présenté à la page suivante: $K = 2,8$). Ainsi l'erreur de traînage de l'asservissement est divisée par K , divisée par 2,8 dans l'exemple qui suit. Bien sûr la bande passante sera aussi sensiblement augmentée (dans un rapport de l'ordre de 2,5).

Lieux de Bode en boucle ouverte:



L'asservissement corrigé est 2,8 fois plus précis (erreur de traînage 2,8 fois plus petite), et environ 2,5 fois plus vélocité (temps de montée divisé par 2,5). On peut dire que l'asservissement corrigé est "7 fois" plus performant. De plus, sur les lieux de Bode en boucle ouverte, on constate que les marges de stabilité sont les mêmes avec correction que sans correction (amortissement identique de la boucle).

6.4 Correction tachymétrique

Ce type de correction est utilisé lorsque la *dérivée de la grandeur asservie* est une autre grandeur physique que l'on peut mesurer grâce à un second capteur. Disons que ce type de correction se prête bien aux processus de classe 1: s'il y a un intégrateur dans le processus, nous pouvons mesurer la grandeur d'entrée de cet intégrateur.

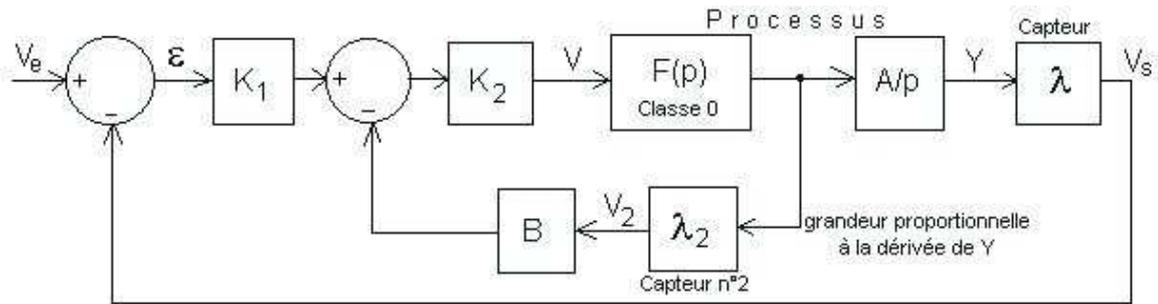
Exemples: Dans un asservissement de position (en translation ou en rotation) on pourra également mesurer la vitesse (qui est la dérivée de la position).

Dans un asservissement de niveau (hauteur de liquide dans une cuve, équivalent à une pression), on pourra également mesurer la résultante des débits (qui est proportionnelle à la dérivée de la pression donc du niveau). S'il y a un débit entrant et un débit sortant, on pourra utiliser un capteur de débit différentiel.

Dans un asservissement d'exposition lumineuse, on pourra également mesurer l'éclairement (qui est la dérivée de l'exposition).

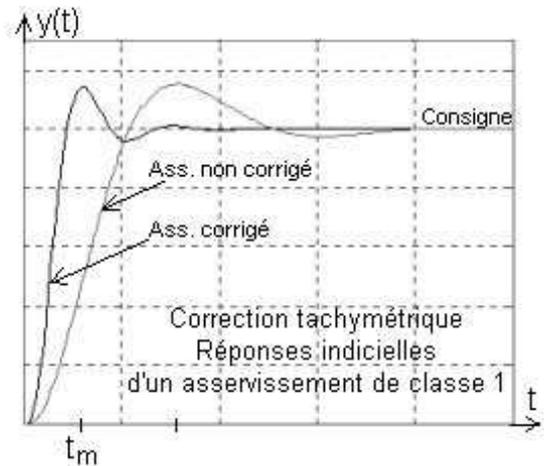
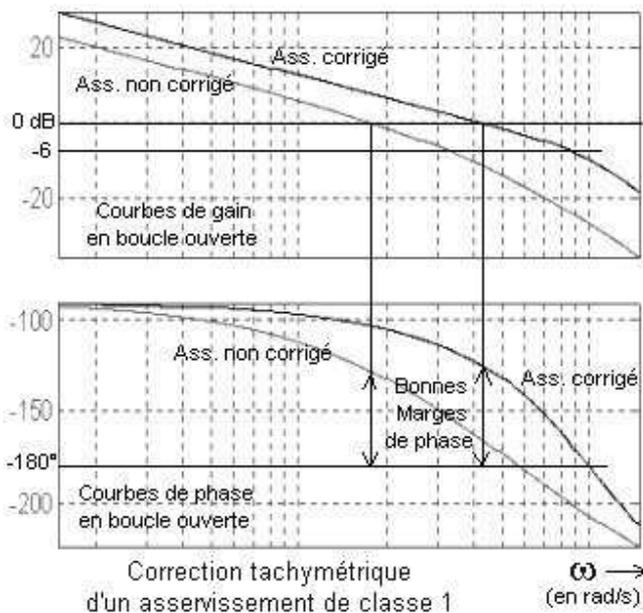
Mais dans la majorité des asservissements nous ne pouvons pas "capter" la dérivée de la grandeur asservie. La correction tachymétrique n'est donc pas un type de correction généralisable. Cependant elle donne d'excellents résultats.

La correction tachymétrique consiste à créer, à l'intérieur de la boucle d'asservissement, une boucle secondaire à partir de la tension de mesure de la *grandeur dérivée* (par exemple on crée une boucle d'asservissement de vitesse dans la boucle d'asservissement de position), selon le schéma fonctionnel ci-dessous:



Tout d'abord, sans correction tachymétrique, donc avec $B = 0$, on règle $K_2 = 1$, puis on recherche la valeur optimale du gain K_1 pour avoir un bon amortissement de la boucle (marge de phase de 50°).

Puis on augmente nettement le gain K_2 (par exemple $K_2 = 6,25$). Il existe alors une valeur optimale du gain B (dans la chaîne de réaction de la boucle secondaire), qui permet de retrouver un bon amortissement de la boucle principale.



L'asservissement ainsi corrigé aura une erreur de traînage $K_2^{1/2}$ fois plus petite et une bande passante $K_2^{1/2}$ fois plus grande.

Avec $K_2 = 6,25$ l'asservissement corrigé sera 2,5 fois plus précis et 2,5 fois plus vélocé.

6.5 Correction P.I.D.

La correction P.I.D. est l'association d'une correction P.I. et d'une correction P.D. D'ailleurs, la fonction de transfert du correcteur P.I.D. de type série correspond au produit des fonctions de transfert du correcteur P.I. et du correcteur P.D.:

$$R(p) = K[1 + 1/(T_{ip})][1 + (T_{dp})/(1 + \tau_{dp})]$$

$$= [K(1 + T_{ip})(1 + T_{ap})] / [T_{ip}(1 + bT_{ap})]$$

avec $\tau_d = b.T_a$ et $T_a = T_d + \tau_d$.

Transmittance harmonique: $R(j\omega) = [K(1 + j\omega T_i)(1 + j\omega T_a)] / [(j\omega T_i)(1 + j\omega T_a)]$

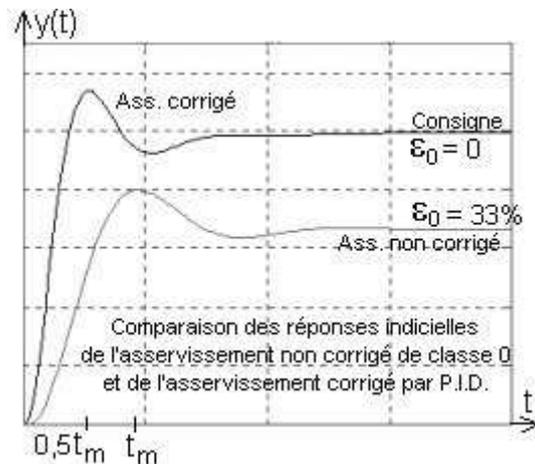
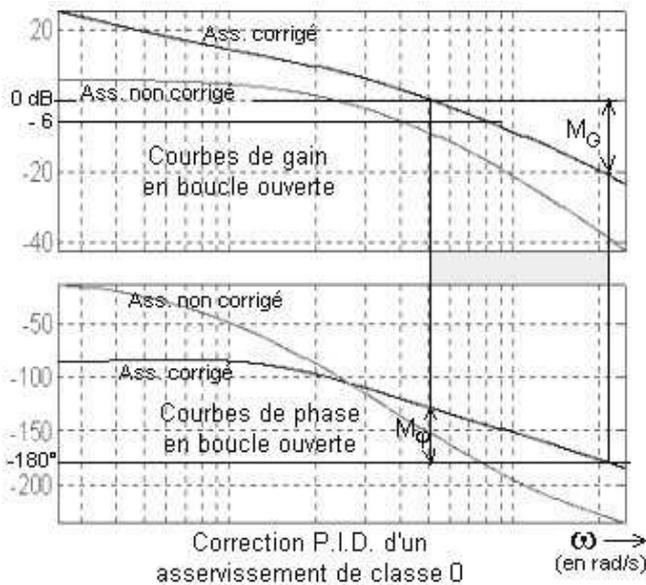
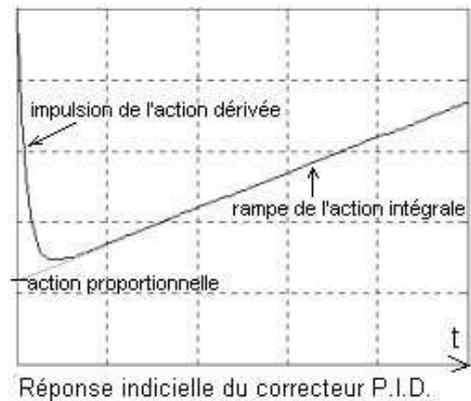
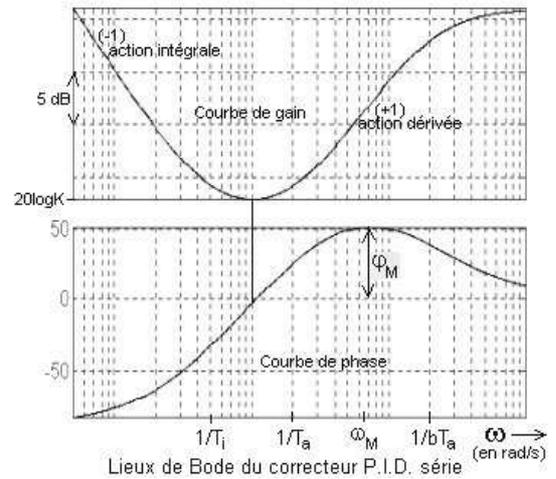
$$|R(j\omega)| = [K(1 + \omega^2 T_i^2)^{1/2} (1 + \omega^2 T_a^2)^{1/2}] / [\omega T_i (1 + \omega^2 T_a^2)^{1/2}]$$

$$\angle R(j\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega T_i) + \arctan(\omega T_a) - \arctan(\omega T_a)$$

Les lieux de Bode de $R(j\omega)$ et la réponse indicielle du correcteur seul sont représentés ci-contre:

Si on associe les deux critères de réglage vus précédemment, on obtient les améliorations cumulées des deux corrections P.I. et P.D.

Exemple d'un asservissement non corrigé de classe 0, puis corrigé par P.I.D. de type série: L'asservissement non corrigé a une précision statique très mauvaise (erreur de position de 33%) et une vitesse médiocre. Grâce au correcteur P.I.D. l'erreur de position de l'asservissement corrigé est nulle (quelles que soient les perturbations), et la vitesse est deux fois meilleure (temps de montée divisé par 2). Les lieux de Bode en boucle ouverte d'une part, et les réponses indicielles en boucle fermée d'autre part sont représentés ci-dessous.



Le correcteur P.I.D. de type parallèle a une fonction de transfert différente mais qui, après factorisation, peut se ramener à la forme du P.I.D. série. Les conclusions sont donc identiques. Nous étudierons, dans les paragraphes suivants, plus spécialement le correcteur P.I.D. de type parallèle qui est le plus utilisé.

6.6 Critère de réglage de Ziegler-Nichols

C'est un critère de réglage très facile à mettre en œuvre et qui donne de bons résultats. Il ne peut être utilisé que pour le réglage d'un correcteur P.I., P.D. ou P.I.D.

Afin de privilégier la qualité d'amortissement de l'asservissement, nous proposerons des réglages différents que ceux que préconisaient Ziegler et Nichols (notamment une action proportionnelle K plus faible). Ainsi nous appliquerons le critère de Z.N.M. (M comme modifié).

L'avantage incontestable de ce critère de réglage est qu'il peut s'appliquer aussi bien sur le modèle théorique qu'expérimentalement sur l'asservissement réalisé.

La démarche est simple: déterminer les conditions du régime critique de la boucle non corrigée (avec uniquement le réglage d'un gain K): voir le paragraphe 5.2.5. Nous obtenons deux valeurs: ω_c et K_c .

ω_c est la pulsation de la sinusoïde engendrée par la boucle "juste instable".

On en déduit la période de cette sinusoïde: $T_c = 2\pi / \omega_c$.

Si nous faisons l'étude expérimentale du régime critique de la boucle non corrigée, après avoir trouvé le réglage critique K_c qui rend la boucle juste instable, nous mesurons directement la période T_c de la sinusoïde engendrée.

Les réglages de Z.N.M. sont les suivants:

Type de correcteur --> Paramètres réglables	P.	P.I.	P.D.	P.I.D série	P.I.D parallèle
K (valeurs indicatives)	$0,2K_c$	$0,25K_c$	$0,35K_c$	$0,18K_c$	$0,3K_c$
T_i		$0,9T_c$		$0,3T_c$	$0,5T_c$
T_d			$0,2T_c$	$0,2T_c$	$0,12T_c$

La fonction de transfert du correcteur P.I.D. série est:

$$R(p) = K[1 + 1/T_i p][1 + T_d p / (1 + 0,1T_d p)]$$

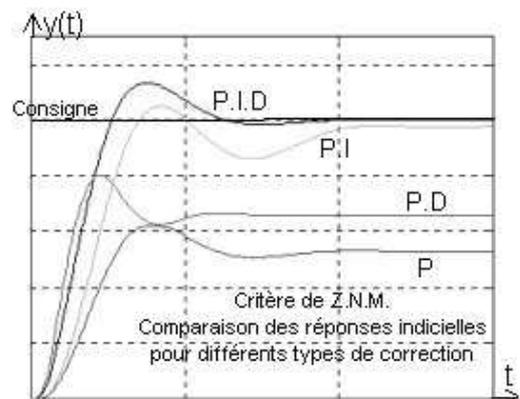
La fonction de transfert du correcteur P.I.D. parallèle est:

$$R(p) = K[1 + 1/T_i p + T_d p / (1 + 0,1T_d p)]$$

Les valeurs de T_i et de T_d étant données, on doit ajuster l'action proportionnelle K pour obtenir un amortissement satisfaisant.

Les valeurs de K données dans le tableau sont donc indicatives.

Les réponses indicielles ci-contre permettent de comparer, sur un exemple, les performances d'un asservissement en classe 0 sans correction (P), puis avec correction P.D., et en classe 1, correction P.I. puis correction P.I.D.



Les quatre réponses étant bien amorties, on peut comparer les qualités précision et vitesse: Classement du plus précis au moins précis: P.I.D., P.I., P.D., P.

Classement du plus véloce au moins véloce: P.D., P.I.D., P., P.I.

6.7 Critère de Naslin

Ce critère donne des résultats excellents, mais il a deux inconvénients: c'est un critère purement algébrique, donc qui nécessite pas mal de calculs, et aussi pour que les résultats soient "excellents", il faut que la fonction de transfert du processus, à partir de laquelle on applique le critère de Naslin, reflète avec précision le comportement réel du système.

Ce critère peut s'appliquer quel que soit le type de correcteur, pas seulement les correcteurs classiques vus pour le critère de Z.N.M. mais pour n'importe quel autre correcteur.

Il faut connaître la fonction de transfert $F(p)$ de l'ensemble ampli-processus-capteur.

Soit $R(p)$ la fonction de transfert du correcteur (avec ses paramètres réglables).

On exprime la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte: $T(p) = R(p).F(p) = n(p)/d(p)$.

Le critère de Naslin consiste à régler les "rapports caractéristiques" du dénominateur de la fonction de transfert $W(p)$ en boucle fermée.

On sait que $W(p) = T(p) / [1 + T(p)] = n(p) / [n(p) + d(p)]$.

Donc il suffit d'ordonner le polynôme $n(p) + d(p)$.

Ce polynôme peut s'écrire: $n(p) + d(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots + a_np^n$.

Ce polynôme comporte (n-1) rapports caractéristiques:

$$r_1 = a_1^2/(a_0.a_2) \quad r_2 = a_2^2/(a_1.a_3) \quad \dots \quad r_k = a_k^2/(a_{k-1}.a_{k+1}) \quad \dots \quad r_{n-1} = a_{n-1}^2/(a_{n-2}.a_n)$$

La valeur de chaque rapport caractéristique dépend de la valeur des paramètres de réglage du correcteur de fonction de transfert $R(p)$.

Le critère de Naslin consiste à régler les premiers rapports caractéristiques à **2**.

Par exemple, avec un correcteur P.I.D. on a 3 paramètres de réglage (K , T_i et T_d), on pourra régler : $r_1 = r_2 = r_3 = 2$.

Dans ce cas il s'agit donc de résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Il convient ensuite de vérifier que les rapports caractéristiques suivants (non réglables) sont supérieurs à 2. Dans le cas contraire il faut légèrement majorer la valeur des premiers (jusque 2,2).

Il y a une très grande sensibilité entre la valeur des premiers rapports caractéristiques du dénominateur de $W(p)$ et l'amortissement de ce système bouclé. Si on augmente la valeur de ces rapports caractéristiques (par exemple 2,3) l'asservissement sera trop amorti (réponse apériodique); si on les diminue (par exemple 1,7) l'asservissement sera trop faiblement amorti (réponse avec des oscillations).

6.8 Exemple de réalisation des correcteurs P.I., P.D., P.I.D. série, P.I.D. parallèle

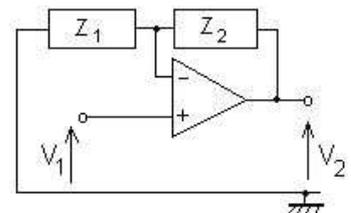
Nous proposons dans ce paragraphe des schémas de réalisation de correcteurs en utilisant comme composants de base des amplificateurs opérationnels, des résistances, et des condensateurs.

L'un des deux montages de base utilisé est représenté ci-contre:

La fonction de transfert V_2 / V_1 de ce montage est :

$$V_2 / V_1 = 1 + Z_2 / Z_1$$

D'autre part, on rappelle que l'impédance symbolique d'un condensateur est $1/Cp$ (voir le paragraphe 1.3.4).



Matérialisation des correcteurs classiques:

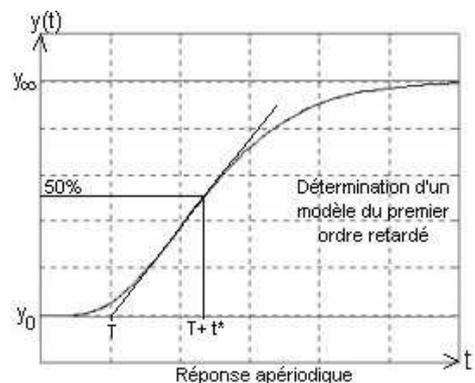
Correcteur P.I.	$R(p) = V(p)/\varepsilon(p) = K(1 + 1/T_i p)$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_i = R_3 C$	
Correcteur à retard de phase	$R(p) = K(1+bT_a p)/(1+T_a p)$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_a = R_4 C$ $b = R_3/(R_3+R_4)$	
Correcteur P.D. ou à avance de phase	$R(p) = K[1 + T_d p/(1 + dT_d p)]$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_d = R_4 C$ $d = R_3/R_4$	
Correcteur P.I.D. série	$R(p) = K(1 + 1/T_i p)[1 + T_d p/(1 + dT_d p)]$ $K = 1 + R_2/R_1$ $T_i = R_3 C_1$ $T_d = R_5 C_2$ $d = R_4/R_5$	
Correcteur P.I.D. parallèle	$R(p) = K[1 + 1/T_i p + T_d p/(1 + dT_d p)]$ $K = R_2/R_1$ $T_i = R_3 C_1$ $T_d = R_5 C_2$ $d = R_4/R_5$	

6.9 Correcteur P.I.R.

Ce correcteur est intéressant lorsque le processus comporte un retard important.

En fait il peut être utilisé pour n'importe quel processus en faisant une identification la plus simple possible: on suppose que le processus se comporte comme un premier ordre retardé. La tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle permet de déterminer un retard important T .

A 50% de la variation on mesure le temps $T+t^*$ et



on en déduit la valeur de la constante de temps du modèle: $\tau = t^*/\ln 2$.

Tout système apériodique pourra donc être identifié par ce modèle simplifié (et bien sûr pas rigoureux):

$$T(p) = A \cdot e^{-Tp} / (1 + \tau p)$$

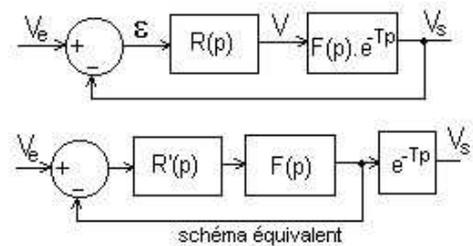
Le retard dans la boucle est très nocif, il diminue considérablement les performances de l'asservissement. En effet il apporte un retard de phase proportionnel à la pulsation et diminue fortement la marge de phase. Pour retrouver une marge de phase satisfaisante il faut diminuer fortement le gain de boucle, et par conséquent la précision et la vélocité deviennent médiocres.

Le principe du correcteur P.I.R. est de *rejeter l'effet du retard à l'extérieur de la boucle*. Nous allons déterminer la fonction de transfert $R(p)$ de ce correcteur.

Nous supposons avoir identifié l'ensemble ampli-processus-capteur sous la forme d'un premier ordre retardé:

$$V_s / V = B \cdot e^{-Tp} / (1 + \tau p) = F(p) \cdot e^{-Tp} \quad \text{et} \quad R(p) = V/\mathcal{E}$$

V est l'image de l'erreur corrigée.



Donc la fonction de transfert en boucle ouverte est: $T(p) = R(p) \cdot F(p) \cdot e^{-Tp}$.

En boucle fermée: $W(p) = V_s / V_e = [R \cdot F \cdot e^{-Tp}] / [1 + R \cdot F \cdot e^{-Tp}]$.

Dans le schéma équivalent le retard est rejeté à l'extérieur de la boucle et le correcteur P.I. de fonction de transfert $R'(p)$ corrige la boucle du premier ordre sans retard:

$$W(p) = V_s / V_e = [R' \cdot F / (1 + R' \cdot F)] \cdot e^{-Tp}$$

L'égalité des deux expressions de la fonction de transfert $W(p)$ donne:

$$R / (1 + R \cdot F \cdot e^{-Tp}) = R' / (1 + R' \cdot F) \quad \text{D'où} \quad R = R' / [1 + R' \cdot F(1 - e^{-Tp})]$$

$R'(p)$ correspond à la fonction de transfert d'un correcteur P.I.: $R'(p) = K(1 + T_i p) / T_i p$.

$F(p)$ est la fonction de transfert d'un système du premier ordre: $F(p) = B / (1 + \tau p)$.

Réglage du correcteur P.I. de fonction de transfert $R'(p)$ dans la boucle équivalente où seul subsiste le système du premier ordre de fonction de transfert $F(p)$:

$$T(p) = K \cdot B(1 + T_i p) / [T_i p(1 + \tau p)]$$

Il est évident qu'il faut régler $T_i = \tau$ et de cette façon l'asservissement se comportera comme un intégrateur bouclé suivi d'un retard (voir schéma équivalent page précédente).

Si on pose $K = \alpha/B$, la fonction de transfert de l'asservissement devient:

$$W(p) = e^{-Tp} / (1 + \tau p / \alpha)$$

Alors qu'en boucle ouverte le processus est caractérisé par une constante de temps τ importante et un retard T , l'asservissement (de classe 1, donc avec une erreur de position nulle), se comporte comme un système du premier ordre retardé (même retard qu'en boucle ouverte), mais avec une constante de temps τ/α beaucoup plus faible (en pratique on peut régler α à 10 voire 15).

En réalité le processus n'étant pas vraiment un premier ordre avec retard, la réponse indicielle de l'asservissement présentera un dépassement, mais la vitesse de l'asservissement ainsi corrigé est spectaculaire (bien meilleure qu'avec un correcteur P.I.D.).

Malheureusement ceci n'est vrai que pour les variations de la consigne.

Vis-à-vis des perturbations, cette correction n'est pas bonne: seule la correction P.I.

intervient alors. Et comme on a réglé $T_i = \tau$ le temps de réaction à une perturbation est grand (même temps de réponse qu'en boucle ouverte).

En conclusion, le correcteur P.I.R. donne des réponses excellentes à des variations de consigne mais n'est pas efficace en réponse aux perturbations. Il peut donc être choisi dans des applications où la consigne varie très souvent, mais où le processus est peu perturbé.

6.10 Modèle imposé

On en arrive à la correction spécifique pour obtenir des performances optimales. Cette technique nécessite la connaissance précise de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-capteur. Soit $F(p)$ cette fonction de transfert. Grâce au critère de Naslin, nous avons pu obtenir des modèles de fonctions de transfert avec une qualité amortissement parfaite.

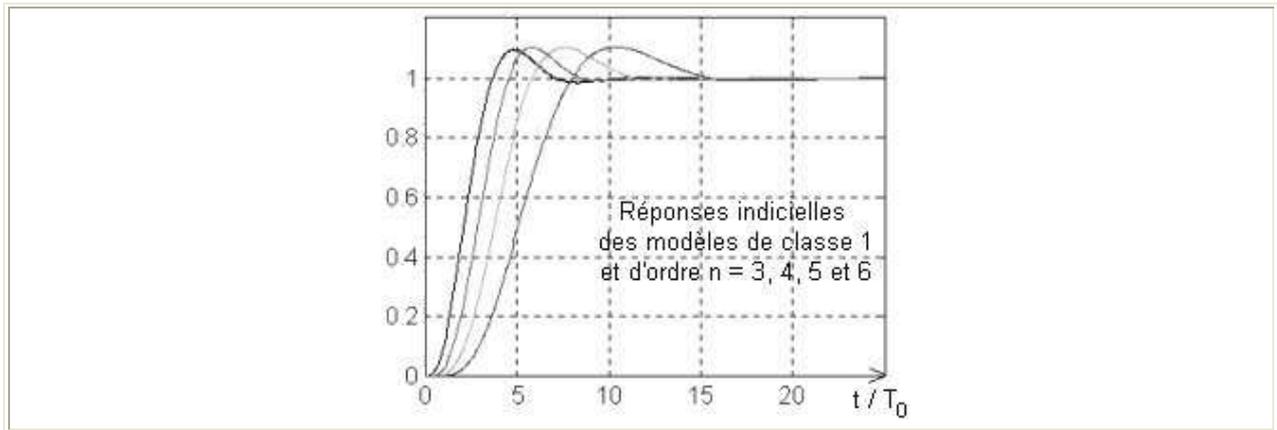
Les modèles sont donnés à la page suivante.

En classe 1 (erreur de position nulle) le dépassement de la réponse indicielle est de 10 %, le temps de réponse est égal à 2,5 fois le temps de montée. En classe 2 (erreurs de position et de traînage nulles), bien que le dépassement soit de 33%, il n'y a pas d'oscillation, le temps de réponse est aussi de 2,5 fois le temps de montée.

Le principe de cette correction est simple: Connaissant la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-capteur, il consiste à calculer la fonction de transfert d'un correcteur réalisable telle que l'asservissement en boucle fermée se comporte comme un modèle choisi (d'où le titre du paragraphe).

On choisit une variable symbolique réduite en posant $q = p/\omega_0 = T_{0p}$.

Modèles d'asservissement en classe 1		
$D_1 = 10\%$, D_2 négligeable, $t_R = 2,5t_m$.		
<u>Ordre 3</u>	$W(q) = \frac{1}{1+1,95q+1,95q^2+q^3}$	$\frac{t_m}{T_0} = t_m \omega_0 = 4,7$
<u>Ordre 4</u>	$W(q) = \frac{1}{1+2,62q+3,61q^2+2,62q^3+q^4}$	5,7
<u>Ordre 5</u>	$W(q) = \frac{1}{1+3,42q+6,33q^2+6,33q^3+3,42q^4+q^5}$	7,5
<u>Ordre 6</u>	$W(q) = \frac{1}{1+4,65q+11,7q^2+15,93q^3+11,7q^4+4,65q^5+q^6}$	10



Modèles d'asservissement en classe 2

$D_1 = 33\%$, D_2 négligeable, $t_R = 2,5t_m$.

Ordre 3

$$W(q) = \frac{1+2,5q}{1+2,5q+2,5q^2+q^3} \quad 2,9$$

Ordre 4

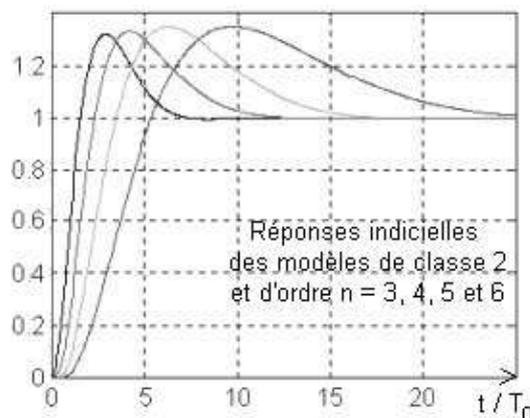
$$W(q) = \frac{1+3,95q}{1+3,95q+6,25q^2+3,95q^3+q^4} \quad 4,2$$

Ordre 5

$$W(q) = \frac{1+5,76q}{1+5,76q+13,82q^2+13,82q^3+5,76q^4+q^5} \quad 6,3$$

Ordre 6

$$W(q) = \frac{1+8,92q}{1+8,92q+33,17q^2+51,4q^3+33,17q^4+8,92q^5+q^6} \quad 9,7$$



Si F est la fonction de transfert en boucle ouverte de l'ensemble ampli-processus-capteur, et R la fonction de transfert du correcteur, en boucle fermée l'asservissement a une fonction de transfert $W = R.F/(1 + R.F)$.

Si on impose W , on peut alors déterminer R : $R.F(1 - W) = W$ d'où:

$R = W/[F(1 - W)]$. En posant $F = n/d$ et $W = N/D$ on obtient:

$$R = N.d / [n(D - N)] .$$

La dernière question qui se pose est : quel modèle choisir ?

Il faut choisir un modèle pour W de telle manière que le correcteur R soit réalisable. Il faut donc que le degré du numérateur de R soit au plus égal à celui du dénominateur.

La solution optimale est telle que numérateur et dénominateur de R aient le même degré.

$R = N.d / [n(D - N)]$ donc: degré de N + degré de d = degré de n + degré de D (puisque le degré de N est toujours très inférieur au degré de D) .

On en déduit : degré de D = degré de d - degré de n + degré de N .

Les degrés de n et de d sont connus (on connaît la fonction de transfert F). Le degré de N est déterminé en fonction de la classe d'asservissement qu'on souhaite réaliser : (degré de N) = 0 en classe1 et = 1 en classe 2 (voir les modèles à la page précédente) .

Le degré de D correspond à l'ordre de la fonction de transfert W.

Enfin il reste à choisir le paramètre T_0 qui détermine la vitesse de l'asservissement corrigé. En pratique, il faut que ce choix aboutisse à un correcteur où chacun des coefficients qui apparaît au numérateur de la fonction de transfert $R(q)$ ne dépasse pas 20 à 25. Chacun de ces coefficients est matérialisé par un gain dans la réalisation.

La marche à suivre est la suivante:

Après avoir choisi la classe de l'asservissement on en déduit l'ordre du modèle. Le choix du paramètre T_0 ne doit pas être utopique (un asservissement ne peut pas être 20 fois plus vélocité que le processus en boucle ouverte!).

On transforme alors $T(p)$ en $T(q)$ avec $p = q / T_0$.

Il est alors très facile de trouver la fonction de transfert $R(q)$.

Ce correcteur sera réalisé avec n intégrateurs ($1/q = 1/ T_0 p$), des gains et des sommateurs, selon l'un des deux montages vus au chapitre 4, à partir de l'un des deux graphes canoniques.

Dans le schéma de réalisation, si le correcteur est de classe 1, un des intégrateurs ne sera pas bouclé, et s'il est de classe 2, deux des intégrateurs ne seront pas bouclés.

6.11 Correcteur P.I.D. programmé. Equation de récurrence

Dans ce dernier paragraphe nous allons aborder les équations de récurrence qui sont le point de départ de l'étude des systèmes échantillonnés.

Lorsqu'une fonction continue $v(t)$ est échantillonnée, on s'intéresse à sa valeur à des instants séparés par une période d'échantillonnage T_e : $v_{k-1} = v(t_{k-1})$ $v_k = v(t_k)$ et

$$T_e = t_k - t_{k-1} .$$

La dérivée $dv(t)/dt$ à l'instant t_k est donc: $(dv/dt)_{tk} = (v_k - v_{k-1}) / T_e$.

De même on peut exprimer la dérivée seconde: $(d^2v/dt^2)_{tk} = [(dv/dt)_{tk} - (dv/dt)_{tk-1}] / T_e = [(v_k - v_{k-1}) / T_e - (v_{k-1} - v_{k-2}) / T_e] / T_e$

$$(d^2v/dt^2)_{tk} = (v_k - 2.v_{k-1} + v_{k-2}) / T_e^2 .$$

Application au correcteur P.I.D. de type parallèle de fonction de transfert: $R(p) = K[1 + 1/ T_i p + T_d p / (1 + T_d p / K_d)]$.

Cette fonction de transfert mise sous forme d'un rapport de deux polynômes est : $R(p) = (K + ap + bp^2) / (cp + dp^2)$ avec:

$$\text{relations (1): } a = K(T_i + T_d/K_d) \quad b = K.T_i.T_d(1 + 1/K_d) \quad c = T_i \quad d = T_i.T_d/K_d .$$

La fonction de transfert du correcteur est donc: $R(p) = V(p)/\mathcal{E}(p) = (K + ap + bp^2) / (cp + dp^2)$

+ dp²) .

On en déduit l'équation différentielle: $d.v'' + c.v' = K.\varepsilon + a.\varepsilon' + b.\varepsilon''$

Remplaçons les dérivées par les relations vues au début du paragraphe:

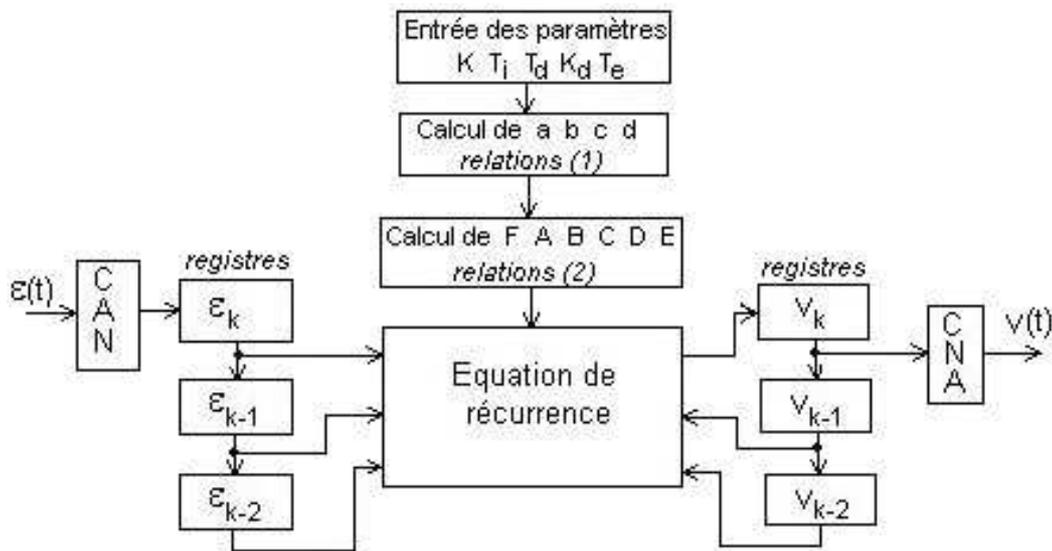
$$d.(v_k - 2.v_{k-1} + v_{k-2}) / T_e^2 + c.(v_k - v_{k-1}) / T_e = K.\varepsilon_k + a.(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) / T_e + b.(\varepsilon_k - 2.\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2}) / T_e^2$$

On en déduit l'équation de récurrence qui donne v_k en fonction des 2 valeurs antérieures de v et de ε_k et des 2 valeurs antérieures de ε :

$$v_k = A.v_{k-1} + B.v_{k-2} + C.\varepsilon_k + D.\varepsilon_{k-1} + E.\varepsilon_{k-2} \quad \text{avec:}$$

$$\text{relations (2): } A = (2.d+c.T_e)/F \quad B = -d/F \quad C = (K.T_e^2+a.T_e+b)/F \quad D = -(a.T_e+2.b)/F \\ E = b/F \quad F = (d+cT_e) .$$

La conception du correcteur P.I.D. programmé est donc la suivante:



Fin du cours

Annexe

Réponses d'un asservissement (corrigé par un correcteur P.I.D.) à un échelon de consigne, puis à un échelon de perturbation.

On peut prendre l'exemple d'un asservissement de vitesse angulaire. Le processus est essentiellement constitué d'un moteur à courant continu. La perturbation est un couple résistant. En boucle ouverte cet échelon de couple résistant créerait une chute de vitesse de 25% par rapport à la vitesse à vide (une division en dessous sur le chronogramme de la grandeur asservie). Grâce à l'action intégrale du correcteur, en régime permanent la vitesse en charge est égale à la vitesse à vide, puisque toutes deux égales à la vitesse de consigne. Le correcteur P.I.D. a été réglé (lors de la simulation Matlab-Simulink) grâce au critère de ZNM. On constate que les réponses sont très bien amorties. Le chronogramme de l'erreur corrigée montre bien, lors d'un changement de consigne, le pic de l'action dérivée.

