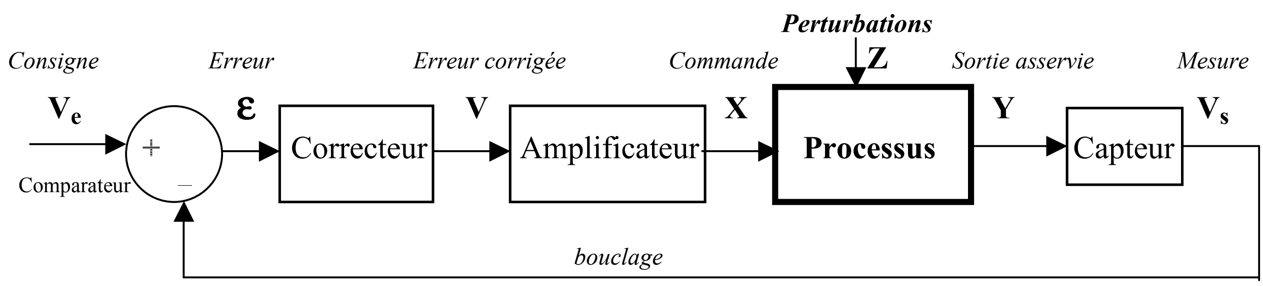
IUT de Montluçon
Département GEII

TD.AU.



Asservissements

Michel VERBEKEN

Sommaire

Afnor *Le Système International d'unités (SI)* NF X 02-004

REGLES D'ECRITURE DES SYMBOLES D'UNITES

Les symboles d'unités ne s'emploient qu'après un nombre exprimé en chiffres. Ils sont imprimés en caractères droits, sont invariables au pluriel, s'écrivent sans point final et sont placés après les valeurs numériques complètes, en laissant un espace entre la valeur numérique et le symbole.
Ils s'écrivent en lettres minuscules; toutefois, la première lettre est une majuscule lorsque le nom de l'unité dérive d'un nom propre.
On ne doit pas faire figurer plus d'une barre de fraction sur la même ligne pour représenter une unité composée qui est le quotient de deux unités, à moins d'utiliser des parenthèses pour éviter toute ambiguïté.

UNITES DE BASE

Grandeur	unité	symbole
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
intensité de courant électrique	ampère	A
température thermodynamique	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

La température Celsius θ est liée à la température thermodynamique Θ par la relation $\theta = \Theta - 273{,}15$.
Un intervalle de température peut être exprimé en kelvins ou en degrés Celsius. Dans ce cas, 1 °C = 1 K.

UNITES SUPPLEMENTAIRES (ces unités peuvent être utilisées comme unités de base)

Grandeur	unité	symbole
angle plan	radian	rad
angle solide	stéradian	sr

MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES

Multiples			Sous-multiples		
Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10^{18}	exa	E	10^{-1}	déci	d
10^{15}	péta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	téra	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	µ
10^{6}	méga	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10	déca	da	10^{-18}	atto	a

REGLES DE FORMATION DES MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES

On forme les multiples et les sous-multiples des unités SI en accolant l'un des préfixes ci-dessus au nom de l'unité. Exemple: centimètre. Toutefois, dans le cas du kilogramme, dont le nom contient déjà un préfixe, on accole le préfixe du mot gramme. Exemple: milligramme.
Le symbole d'un préfixe est considéré comme combiné avec le symbole de l'unité auquel il est directement lié, formant avec lui le symbole d'une nouvelle unité qui peut être élevé à une puissance. Exemple: 1 cm^3 = $(10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$.On ne doit pas juxtaposer plusieurs préfixes; par exemple il faut écrire nanomètre (nm) et non millimicromètre (mµm).
Dans le cas d'une unité composée, il est recommandé de n'utiliser qu'un seul préfixe: par exemple, on écrira millinewton-mètre et non décinewton-centimètre.Les multiples sont généralement choisis de sorte que la valeur numérique soit comprise entre 0,1 et 1000.

UNITES DERIVEES POUR LES GRANDEURS LES PLUS USUELLES

Grandeur	Nom de l'unité	symbole	en unités de base
ESPACE ET TEMPS			
aire, superficie	mètre carré	m^2	m^2
volume	mètre cube	m^3	m^3
vitesse angulaire	radian par seconde	rad/s	$s^{-1}.rad$
vitesse	mètre par seconde	m/s	$m.s^{-1}$
accélération	mètre par seconde carrée	m/s^2	$m.s^{-2}$
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
fréquence de rotation	seconde à la puissance moins un	s^{-1}	s^{-1}
MECANIQUE (et hydraulique)			
masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3	$m^{-3}.kg$
débit-masse	kilogramme par seconde	kg/s	$kg.s^{-1}$
débit-volume	mètre cube par seconde	m^3/s	$m^3.s^{-1}$
quantité de mouvement	kilogramme-mètre par seconde	kg.m/s	$m.kg.s^{-1}$
moment cinétique	kilogramme-mètre carré par seconde	$kg.m^2/s$	$m^2.kg.s^{-1}$
moment d'inertie	kilogramme-mètre carré	$kg.m^2$	$m^2.kg$
force	newton	N	$m.kg.s^{-2}$
moment d'une force	newton-mètre	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
pression, contrainte	pascal	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
viscosité (dynamique)	pascal-seconde	Pa.s	$m^{-1}.kg.s^{-1}$
viscosité cinématique	mètre carré par seconde	m^2/s	$m^2.s^{-1}$
tension superficielle	newton par mètre	N/m	$kg.s^{-2}$
énergie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$m^2.kg.s^{-2}$
puissance, flux énergétique	watt	W	$m^2.kg.s^{-3}$
THERMODYNAMIQUE			
coefficient de dilatation linéique	kelvin à la puissance moins un	K^{-1}	K^{-1}
conductivité thermique	watt par mètre-kelvin	W/(m.K)	$m.kg.s^{-3}.K^{-1}$
capacité thermique massique	joule par kilogramme-kelvin	J/(kg.K)	$m^2.s^{-2}.K^{-1}$
entropie	joule par kelvin	J/K	$m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}$
énergie interne, enthalpie	joule	J	$m^2.kg.s^{-2}$
OPTIQUE			
flux lumineux	lumen	lm	cd.sr
luminance (lumineuse)	candela par mètre carré	cd/m^2	$m^{-2}.cd$
exitance (lumineuse)	lumen par mètre carré	lm/m^2	$m^{-2}.cd.sr$
éclairement	lux	lx	$m^{-2}.cd.sr$
exposition lumineuse	lux-seconde	lx.s	$m^{-2}.s.cd.sr$
efficacité lumineuse	lumen par watt	lm/W	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.cd.sr$
ELECTRICITE (et magnétisme)			
charge électrique, quantité d'électricité	coulomb	C	s.A
champ électrique	volt par mètre	V/m	$m.kg.s^{-3}.A^{-1}$
potentiel électrique, tension, différence de potentiel, force électromotrice	volt	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
capacité	farad	F	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
champ magnétique	ampère par mètre	A/m	$m^{-1}.A$
induction magnétique	tesla	T	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
flux d'induction magnétique	weber	Wb	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
inductance, perméance	henry	H	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
réluctance	henry à la puissance moins un	H^{-1}	$m^{-2}.kg^{-1}.s^2.A^2$
résistance, impédance, réactance	ohm	Ω	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
conductance, admittance, susceptance	siemens	S	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
résistivité	ohm-mètre	Ω.m	$m^3.kg.s^{-3}.A^{-2}$
conductivité	siemens par mètre	S/m	$m^{-3}.kg^{-1}.s^3.A^2$
CHIMIE, PHYSIQUE MOLECULAIRE			
masse molaire	kilogramme par mole	kg/mol	$kg.mol^{-1}$
volume molaire	mètre cube par mole	m^3/mol	$m^3.mol^{-1}$
concentration	kilogramme par mètre cube	kg/m^3	$m^{-3}.kg$
concentration molaire	mole par mètre cube	mol/m^3	$m^{-3}.mol$
molalité	mole par kilogramme	mol/kg	$kg^{-1}.mol$

TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

(à utiliser pour l'étude des asservissements continus)

F(p)	**f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[F(p)]**	**F(p)**	**f(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[F(p)]**
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac	$\dfrac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\dfrac{1}{p}$	$u(t)$ Echelon unitaire	$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
e^{-Tp}	$\delta(t - T)$ impulsion retardée	$\dfrac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1-\dfrac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}$
$\dfrac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t - T)$ Echelon retardé	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\dfrac{1}{p^2}$	$t.u(t)$ rampe unitaire	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\dfrac{1}{p^n}$ n entier	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{p\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t+\varphi)$
$\dfrac{1}{1+\tau p}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{p\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t+\varphi)$
$\dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\dfrac{1}{\tau^2}t e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{1}{p(p^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}$
$\dfrac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\dfrac{1}{\tau^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{p+z\omega_0}{\omega_0^2+2z\omega_0 p+p^2}$	$e^{-z\omega_0 t}\cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-z^2}$
$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$	$\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_p t)$
$\dfrac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1-(1+\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{1}{p(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$	$1-\dfrac{\omega_0}{\omega_p}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_p t+\psi)$ avec $\psi = \arccos z$

Remarque: Il est sous-entendu que toutes les fonctions du temps f(t) sont multipliées par u(t), c'est-à-dire qu'elles sont nulles avant l'instant initial t = 0.

TDAU.1

TRANSFORMEES DE LAPLACE

Rappels de ce qui a été fait en cours:

$$\boldsymbol{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \textbf{\textit{image}} \text{ de } f(t)$$

1. $\boldsymbol{L}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p)$
2. $\boldsymbol{L}[k\,f(t)] = k\,F(p)$
3. $\boldsymbol{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = p\,F(p)$ avec $f(0) = 0$
4. $\boldsymbol{L}\left[\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n\,F(p)$ à partir d'un état initial de repos $f(0) = 0$
5. $\boldsymbol{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \dfrac{F(p)}{p}$
6. $\boldsymbol{L}[f(t - T)] = e^{-Tp}\,F(p)$
7. $\boldsymbol{L}[e^{-at}\,f(t)] = F(p+a)$
8. $\textbf{\textit{lim}}_{(t\to\infty)}[f(t)] = \textbf{\textit{lim}}_{(p\to 0)}[pF(p)]$
9. $\boldsymbol{L}[u(t)] = \dfrac{1}{p}$ échelon unité

Applications:

Exercice 1

Sans utiliser la définition mathématique de la transformée de Laplace d'une fonction du temps, mais en utilisant seulement ses propriétés (de 1 à 8) et l'image de l'échelon (9), déterminer l'image des fonctions suivantes:
. impulsion rectangulaire de hauteur a et de largeur T
. rampe de pente b
. dent de scie unique de hauteur a et de largeur T
. la même dent de scie de période T
. dérivée de l'échelon unité (impulsion de Dirac)
. fonction complexe $e^{j\omega t}$
. fonctions $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$
. une seule alternance de sinusoïde d'amplitude a et de durée T

Exercice 2

En utilisant la table de transformées de Laplace, déterminer les fonctions originales de:

$$F_1(p) = \frac{10}{(1+0{,}5p)(1+0{,}2p)} \qquad F_2(p) = \frac{10}{(1+0{,}4p)(1+0{,}4p)}$$

$$F_3(p) = \frac{4}{p(1+0{,}3p)}$$

$$F_4(p) = \frac{4e^{-0{,}5p}}{p(1+0{,}3p)}$$

$$F_5(p) = \frac{4}{1+0{,}25p^2}$$

$$F_6(p) = \frac{2}{p}\left(1+\frac{1}{4p}+\frac{5p}{1+0{,}8p}\right)$$

$$F_7(p) = 5\frac{1+0{,}5p}{(1+p)(1+0{,}2p)}$$

$$F_8(p) = \frac{6+10{,}5p+1{,}5p^2}{(1+2p)(1+0{,}5p)^2}$$

$$F_9(p) = \frac{1}{p(1+2p)(1+p)(1+0{,}5p)}$$

$$F_{10}(p) = \frac{5(1-p)}{(1+2p)(1+p)(1+p+p^2)}$$

Dessiner l'allure de chaque fonction du temps.

TDAU.2

RELATION EQUATION DIFFERENTIELLE
ET FONCTION DE TRANSFERT
REPONSES IMPULSIONNELLE ET INDICIELLE

Rappels de ce qui a été fait en cours:

« Monde réel »		« Monde symbolique »
x(t) → *Equation différentielle* → y(t)	⇒	X(p) → *Fonct. de transfert* T(p) → Y(p)
Travail difficile		Travail très facile: Y(p) = X(p).T(p)

Par convention, nous utiliserons systématiquement les lettres minuscules pour les fonctions du temps [ex.: h pour h(t)] et leurs correspondantes majuscules pour leurs images dans le monde symbolique [H pour H(p)].

La résolution d'une équation différentielle est longue, difficile, fastidieuse.
Le calcul symbolique basé sur les propriétés de la transformée de Laplace est très facile à mettre en oeuvre pour déterminer la réponse des systèmes à partir d'un état initial de repos. Nous nous placerons toujours dans ces conditions aussi bien en théorie qu'en expérimentation.
La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à l'impulsion de Dirac, elle peut être calculée mais ne peut pas être expérimentée correctement.
La réponse indicielle est la réponse à un échelon (pas forcément unitaire). Cette réponse peut être calculée, mais aussi facilement enregistrée de façon expérimentale. Nous la mettrons en oeuvre dans tous les T.P.

Applications:

Exercice 1

Soit un système mécanique dont le fonctionnement est régi par l'équation différentielle linéaire suivante:

$$2\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = x + 4\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2x}{dt^2}$$

où y(t) est la position instantanée (en cm) d'une masse et x(t) une force instantanée (en N) appliquée à un point du montage.
Déterminer la fonction de transfert de ce système.
La mettre sous sa forme canonique développée.
Que vaut le gain statique du système (unités ?)

Exercice 2

La fonction de transfert (forme canonique factorisée) d'un système thermique est:

$$T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{150(1+5p)}{(1+20p)(1+15p)(1+10p)}$$

où Y(p) représente l'image de la température y(t) (en °C) dans une enceinte et X(p) l'image d'une puissance électrique instantanée (en kW) dissipée dans une résistance chauffante.

Déterminer l'équation différentielle qui régit son fonctionnement.

Exercice 3

Soit $y(t) = 2e^{-\frac{t}{5}}u(t)$ l'expression de la réponse impulsionnelle d'un système électrique où y(t) est l'intensité instantanée du courant dans un composant en réponse à une commande x(t) qui est une tension appliquée.

Dessiner l'allure de cette réponse.

Déterminer la fonction de transfert du système.

Déterminer l'expression de la réponse indicielle du système (échelon de 1 V).

Dessiner l'allure de cette réponse indicielle sous la réponse précédente.

Vérifier que la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle.

Exercice 4

Soit un système lumineux dont la commande x(t) est la tension appliquée (en V) à une rampe d'éclairage et y(t) est l'éclairement (en lx) d'un plancher.

La réponse indicielle à un échelon x(t) de 150 V est:

$$y(t) = 600(1 - 2e^{-\frac{t}{0,3}} + e^{-\frac{t}{0,2}})u(t)$$

Que vaut le gain statique du système (unités ?)

Calculer sa fonction de transfert (2 méthodes).

En déduire l'équation différentielle qui régit le fonctionnement de ce système.

TDAU.3

SYSTEME ELEMENTAIRE DU PREMIER ORDRE
ETUDES TEMPORELLE ET HARMONIQUE

Rappels de ce qui a été fait en cours:

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = Ax \quad \Rightarrow \quad T(p) = \frac{Y}{X} = \frac{A}{1+\tau p}$$

Réponse impulsionnelle:

$$x = \delta(t) \;\Rightarrow\; X = 1 \;\Rightarrow\; Y = T(p) = \frac{A}{1+\tau p} \;\Rightarrow\; y_{imp} = \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Réponse indicielle:

$$x = au(t) \;\Rightarrow\; X = \frac{a}{p} \;\Rightarrow\; Y = \frac{aA}{p(1+\tau p)} \;\Rightarrow\; y_{ind} = aA(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Durée de vie de l'exponentielle: 50 % de sa valeur initiale à $0{,}69\tau$; 36,8 % de sa valeur initiale à $\approx \tau$; 5 % à 3τ ; 1 % à $4{,}6\tau$; moins de 0,1 % à 7τ

Formule de Bureau: $aA = \dfrac{y_1^{\,2}}{2y_1 - y_2}$ avec $y_1 = y_{ind}(t_1)$ et $y_2 = y_{ind}(2t_1)$

Réponse harmonique:

$$T(p) \;\Rightarrow\; T(j\omega) = \frac{A}{1+j\omega\tau} \;\Rightarrow\; G(\omega) = |T(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\text{et} \quad \varphi(\omega) = \angle T(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Si on applique une sinusoïde de commande d'amplitude E et de pulsation ω, en régime établi la sinusoïde y de sortie aura une amplitude E.G et sera déphasée par rapport à x de φ . Pour $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$ le déphasage est de $-45°$.

Applications:

Exercice 1

On veut mesurer la constante de temps d'un thermomètre à dilatation de mercure. Le thermomètre est initialement à la température ambiante de 22 °C. On le plonge rapidement dans un bain dont on a préalablement mesuré la température de 86 °C, et au même instant on déclenche un chronomètre. On observe l'évolution de l'indication du thermomètre.
A quelle indication doit-on arrêter le chronomètre pour mesurer le temps t* à 50 % de la variation ?

Le chronomètre indique 17,6 s mais on peut estimer l'incertitude due à la manipulation d'environ ± 0,5 s. En déduire la constante de temps du thermomètre, son temps de réponse à 5 % de la variation, sa durée totale de réponse avant d'obtenir l'indication définitive de la température mesurée.

Exercice 2

Pour mesurer la constante de temps d'un four (qu'on suppose se comporter comme un système du premier ordre retardé), ne disposant pas d'un temps de manipulation très important, on se contente d'enregistrer le début de la réponse indicielle. La température dans le four étant initialement au repos à 23 °C, on applique la tension du secteur (230 V) sur la résistance chauffante dont on connaît la valeur ohmique (42 Ω). On enregistre la température: pendant 14 s elle reste à 23 °C puis elle monte rapidement. Au bout de 1 min 14 s, la température est de 137 °C et au bout de 2 min 14 s elle est de 189 °C.
Déterminer la valeur finale de la température dans le four si on laissait sous tension suffisamment longtemps.
Déterminer ensuite la température θ* correspondant à 50 % de la variation.
On suppose que cette température θ* a été obtenue lors de l'enregistrement à l'instant 1 min 07 s.
Donner l'expression θ(t) de l'évolution de la température.
Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Theta(p)}{P_r(p)}$ entre la puissance électrique appliquée à la résistance chauffante (en W) et la température mesurée dans le four (en °C). Remarque: en variation 1 °C = 1 K.

Exercice 3

En utilisant le théorème de la valeur finale (relation 8 des rappels de cours du TDAU.1), déterminer l'erreur de traînage d'un système du premier ordre de gain statique unitaire en réponse à une rampe de commande de pente a.
Application: soit un thermomètre très précis (il s'agit de la précision statique) et de constante de temps égale à celle du thermomètre de l'exercice 1.
On le plonge dans un bain dont la température s'élève de 16,8 °C par minute.
Quelle erreur de traînage existe-t-il entre la température du bain et l'indication du thermomètre ?

Exercice 4

Faire l'étude harmonique d'un système élémentaire du premier ordre de gain statique égal à 2,9 et de constante de temps égale à 0,53 s.
Faire un tableau pour exprimer, en fonction de la fréquence de la sinusoïde de commande, le déphasage φ, le gain réel G, le gain en décibel $G_{dB} = 20\log G$.
Tracer les lieux de NYQUIST, BODE, BLACK.
Tracer le diagramme asymptotique dans le plan de Bode.

TDAU.4

ANALOGIES ENTRE LES SYSTEMES ELECTRIQUES ET MECANIQUES
FONCTION DE TRANSFERT DU MOTEUR A COURANT CONTINU

Rappels de ce qui a été fait en cours:

Il faut tout d'abord bien assimiler la notion de cause à effet: une action sur la commande x (c'est la cause) crée une réponse de la sortie y (c'est l'effet).

Systèmes électriques: Composants R (en Ω), L (en H), C (en F). La commande est la valeur instantanée du courant i (en A) appliqué, la sortie est la tension instantanée v (en V) apparaissant aux bornes du composant.

Composant	Equation temporelle	Equation symbolique	Fonction de transfert	Graphe de transfert
Résistance R	$v = R.i$	$V = R.I$	$\frac{V}{I} = R$	$I \xrightarrow{R} V$
Inductance L	$v = L.\frac{di}{dt}$	$V = L.pI$	$\frac{V}{I} = Lp$	$I \xrightarrow{Lp} V$
Capacité C	$v = \frac{1}{C}\int_0^t i.dt$	$V = \frac{1}{C}\cdot\frac{I}{p}$	$\frac{V}{I} = \frac{1}{Cp}$	$I \xrightarrow{\frac{1}{Cp}} V$

Remarque importante: le produit i.v est une puissance instantanée en W.

Systèmes mécaniques en translation: Composants f_v (en kg/s), M (en kg), r (en kg/s^2). La commande est la valeur instantanée d'une vitesse de déplacement v (en m/s) appliquée, la sortie est la valeur instantanée de la force f (en N) engendrée.

Composant	Equation temporelle	Equation symbolique	Fonction de transfert	Graphe de transfert
Frottement visqueux f_v	$f = f_v.v$	$F = f_v.V$	$\frac{F}{V} = f_v$	$V \xrightarrow{f_v} F$
Masse M	$f = M.\frac{dv}{dt}$	$F = M.pV$	$\frac{F}{V} = Mp$	$V \xrightarrow{Mp} F$
Ressort de raideur r	$f = r.\int_0^t v.dt$	$F = r\,\frac{V}{p}$	$\frac{F}{V} = \frac{r}{p}$	$V \xrightarrow{\frac{r}{p}} F$

Remarque importante: le produit v.f est une puissance instantanée en W.

Applications:

Exercice 1

Faire le même travail que ci-dessus pour les systèmes mécaniques en rotation.

Les trois composants sont le frottement visqueux f, le moment d'inertie J et le ressort spirale de raideur r. On suppose que la grandeur de commande est la vitesse angulaire $\omega(t)$ et que la sortie est un couple $\gamma(t)$ engendré.

Donner les unités de ω et γ, ainsi que des composants f, J et r.

Remarque importante: le produit $\omega.\gamma$ est une puissance instantanée en W.

Exercice 2

Soit un arbre de moment d'inertie J et soumis à un frottement visqueux f. On applique un couple $\gamma(t)$ qui crée une vitesse angulaire $\omega(t)$. Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Omega}{\Gamma}$ de ce système. A.N.: $J = 1,5\ kg.m^2$ et $f = 0,5\ kg.m^2/s$.

Faire l'analogie électrique. A.N.: $L = 1,5\ H$ et $R = 0,5\ \Omega$.

Etudier maintenant l'influence d'un réducteur placé en amont de la charge mécanique (rapport de réduction = 1/N)

Exercice 3

Soit un moteur à courant continu et à excitation constante. Son induit, constitué d'une résistance R et d'une inductance L, est alimenté par une tension v(t).

L'arbre rotorique a un moment d'inertie J et est soumis à un frottement visqueux f.

Les coefficients de couple et de force contre-électromotrice sont respectivement a_c et a_e. Montrer que dans un système d'unités cohérent, les valeurs de a_c et de a_e sont les mêmes.

La vitesse angulaire de l'arbre rotorique est $\omega(t)$.

Faire le graphe de transfert donnant le fonctionnement de ce moteur afin de relier l'image de la vitesse engendrée ω à l'image de la tension appliquée v.

En déduire l'expression de la fonction de transfert $\frac{\Omega}{V}$ du moteur.

A.N.: $a_c = 0,4\ N.m/A$ $a_e = 0,4\ V.s/rad$ $R = 0,1\ \Omega$ $L = 20\ mH$
$f = 0,4\ kg.m^2/s$ $J = 1,6\ kg.m^2$.

Donner l'expression de l'évolution de la vitesse $\omega(t)$ en réponse à un échelon de tension d'induit de 100 V (table de transformées de Laplace).

Exercice 4

Refaire rapidement la même étude que dans l'exercice 3 mais en supposant négligeables le frottement mécanique f et l'inductance d'induit L. Le moteur se comporte ainsi comme un système du premier ordre. Exprimer son gain statique et sa constante de temps (mécanique) sous la forme du rapport J/f_i (f_i représentant le « frottement interne » du moteur).

A.N.: petit moteur d'asservissement Birotax type V (données constructeur !)
$J = 46\ g.cm^2$ $R = 18\ \Omega$ $a_e = 1/695\ V/(t/min)$ $a_c = 0,140\ g.cm/mA$.

TDAU.5

SYSTEME APERIODIQUE D'ORDRE ELEVE
MODELE DE STREJC

Rappels de ce qui a été fait en cours:

La fonction de transfert d'un système apériodique d'ordre élevé est caractérisée par la valeur du gain statique et par les différentes valeurs de plusieurs constantes de temps. La réponse indicielle ne permet pas d'identifier la valeur de chaque constante de temps.
On utilise alors un modèle plus simple (modèle de STREJC) qui est caractérisé par des constantes de temps identiques.

Le modèle de STREJC est: $F(p) = \dfrac{A}{(1+\tau p)^n} e^{-Tp}$

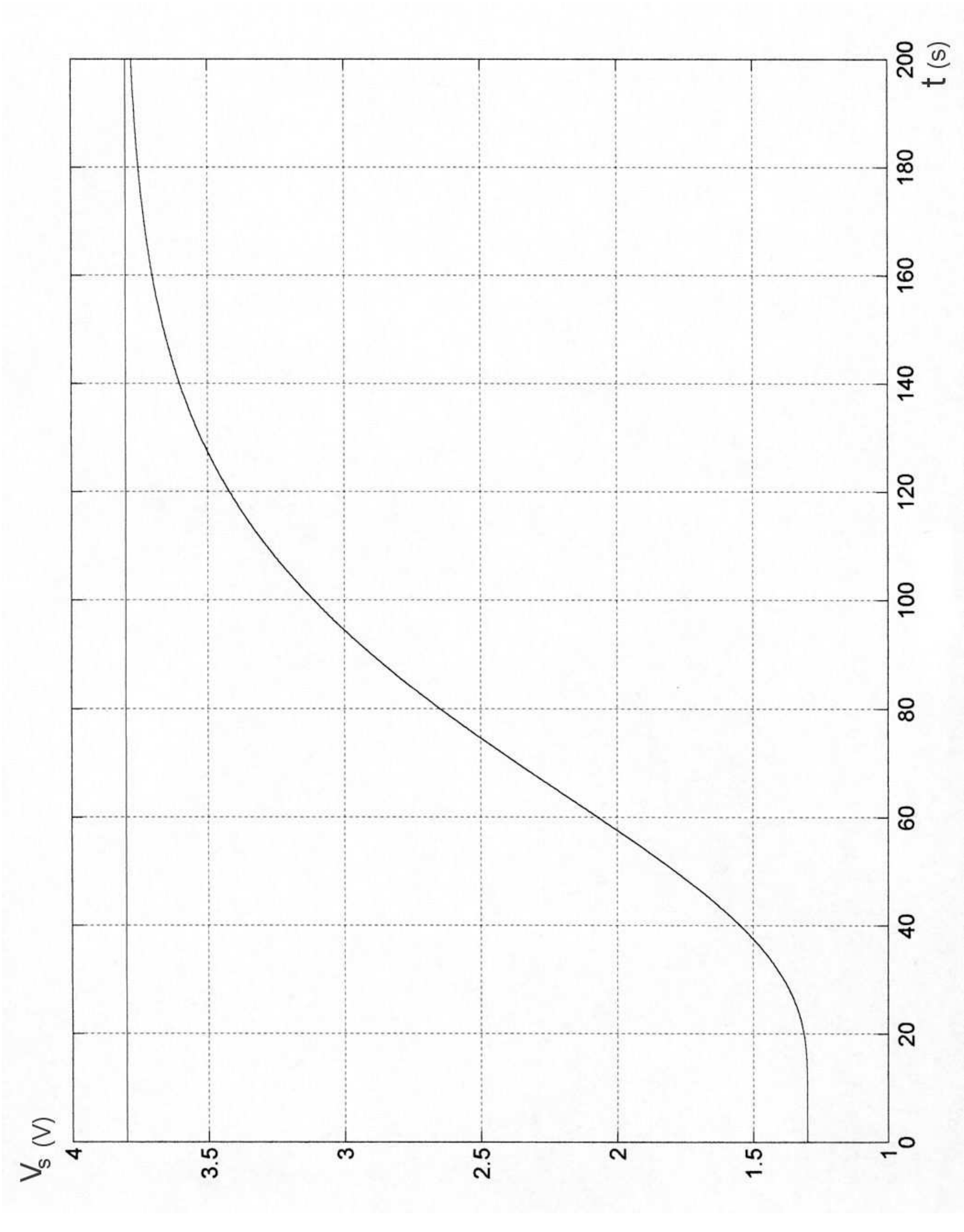
La méthode d'identification consiste à tracer la tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle y(t).
Cette tangente coupe l'axe $y = y(0)$ en un instant T_u et l'axe $y = y(t_\infty)$ en un instant $T_u + T_a$.
Faire le rapport T_u / T_a . Prendre dans le tableau la valeur T_u'/ T_a immédiatement inférieure et en déduire la valeur de n.
Pour cette valeur de n déterminer τ (proportionnelle à T_a).
Enfin pour compenser la petite différence entre les valeurs mesurée T_u / T_a et choisie T_u'/ T_a , il suffit de déterminer la valeur d'un retard T, telle que:

$$\frac{T_u}{T_a} = \frac{T_u' + T}{T_a} \Rightarrow T = T_a.(\underbrace{\frac{T_u}{T_a}}_{\text{mesure}} - \underbrace{\frac{T_u'}{T_a}}_{\text{tableau}})$$

T_u'/T_a	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493	0,570	0,642
n	2	3	4	5	6	7	8
T_a / τ	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699	6,226	6,711

Application:

A partir de la réponse indicielle donnée au verso, déterminer un modèle de Strejc de la fonction de transfert du système en supposant que cette réponse a été obtenue pour une commande passant de 0,3 V à 0,8 V (échelon). La valeur initiale de la tension de sortie enregistrée est de 1,3 V et sa valeur finale est de 3,8 V.



V_s (V)
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
t (s)

TDAU.6

SYSTEME ELEMENTAIRE DU SECOND ORDRE

Rappels de ce qui a été fait en cours:

$$\beta\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + y = Ax \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{X} = \frac{A}{1 + \alpha p + \beta p^2}$$

Les valeurs des paramètres α et β prises séparément ne nous renseignent absolument en rien sur le comportement du système.
On choisit deux autres paramètres qui l'un nous renseigne parfaitement sur la forme de la réponse et l'autre sur la vélocité du système:

$$\beta = \frac{1}{{\omega_0}^2} \text{ et } \alpha = \frac{2z}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ et } z = \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}$$

z = coefficient d'amortissement (sans dimension)
ω_0 = pulsation naturelle (en rad/s)

. Si $z \geq 1$, le dénominateur de la fonction de transfert se factorise en deux facteurs du premier degré, et la réponse temporelle du système est alors une somme de deux réponses élémentaires du premier ordre (2 constantes de temps):

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0(z - \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

. Si $z < 1$, il s'agit alors d'un système élémentaire du second ordre (les réponses temporelles sont pseudo-périodiques).
Les expressions des réponses impulsionnelle et indicielle sont dans la table de transformée de Laplace (les deux dernières cases de droite).
Caractéristiques de la réponse indicielle:
. Les enveloppes de la réponse sont des exponentielles de constante de temps équivalente $\tau = \dfrac{1}{z\omega_0}$ d'où $t_{r5\%} \approx 3\tau$ et $t_\infty \approx 7\tau$
. Premier dépassement relatif à la variation totale:
La durée T_1 du premier dépassement est égale au temps de montée (entre l'instant initial et l'instant du premier maximum), tous deux égaux à une demie pseudo-période. Le premier dépassement est d'autant plus important que z est faible:

$$D_1\% = 100e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \cos\left(\arctan\frac{\pi}{\ln\frac{100}{D_1\%}}\right)}$$

$$T_1 = t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1 - z^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{t_m\sqrt{1 - z^2}}}$$

Dépassements successifs: $|D_k| = (D_1)^k$.

<u>Caractéristiques de la réponse harmonique:</u>
On ne réécrit pas ici le module et l'argument du nombre complexe $T(j\omega)$, mais on rappelle les principales caractéristiques de ces deux fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

1. Si $z < 0{,}707$ il y a résonance , c'est-à-dire que le gain passe par un maximum pour la pulsation ω_R et on peut chiffrer le coefficient de résonance Q (> 1); le gain repasse alors par la valeur du gain statique pour une pulsation ω^*:

$$G_{max} = \frac{A}{2z\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow Q = \frac{G_{max}}{A} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{Q}\right)}$$

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \quad \text{et} \quad \omega^* = \omega_R\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{\omega^*}{\sqrt{2(1-2z^2)}}}$$

2. Quelle que soit la valeur de z on peut facilement exploiter φ :
Soient ω_1 et ω_2 les pulsations correspondant aux déphasages respectifs de $-45°$ et $-135°$:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0\left(\sqrt{1+z^2} - z\right)\\ \omega_2 &= \omega_0\left(\sqrt{1+z^2} + z\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\omega_1\omega_2}\\ z &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}\end{aligned}}$$

3. Quelle que soit la valeur de z la sinusoïde de sortie est toujours en parfaite quadrature ($\varphi = -90°$) pour une pulsation égale à la pulsation naturelle du système, la valeur du gain à cette pulsation a une expression très simple:

$$G(\omega_0) = \frac{A}{2z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \omega_{-90°} \quad z = \frac{A}{2G(\omega_0)}}$$

<u>Applications:</u>

<u>Exercice 1</u>

Soit un système mécanique élémentaire en translation du second ordre (montage de l'exercice 6 du TDAU.7). La masse est au repos initial et on repère sa position sur un réglet: 11,5 cm. On applique un échelon de commande x de 20 cm. La masse passe par une position maximale de 37 cm à l'instant 0,85 s après l'application de l'échelon. Quand la masse ne bouge plus, elle occupe la position 27,5 cm. Déterminer la fonction de transfert numérique du système.
A l'instant 1,7 s à quelle position se trouve la masse ?
Au bout d'environ combien de temps la masse s'est arrêtée de bouger ?

Le même système est maintenant entraîné par une bielle fixée sur une roue tournant à une vitesse ajustable. Le point d'ancrage de la bielle est à 7 cm du centre de la roue. La roue est entraînée par un moteur par l'intermédiaire d'un réducteur 1/10. A quelle vitesse faut-il faire tourner le moteur pour que la masse entre en résonance (maximum d'amplitude) ?
Que vaut alors l'amplitude crête à crête du déplacement de la masse ?

Exercice 2

Soit le montage électrique de l'exercice 1 du TDAU.7
On dispose d'un générateur sinusoïdal pour commander l'entrée du montage. On règle l'amplitude de la sortie du générateur à 5 V crête à crête. Grâce à la méthode du balayage triangulaire, on règle alternativement la fréquence pour avoir un déphasage de – 45° puis – 135°: soient 3,25 Hz puis 7,12 Hz.
On se met ensuite à une fréquence très basse pour le système ($< f_0/10$), par exemple 0,3 Hz. On mesure l'amplitude crête à crête de v_s soit 4,2 V.
Déterminer la fonction de transfert numérique expérimentale de ce quadripôle.
Ecrire les expressions numériques du gain et du déphasage en régime harmonique. Faire un tableau pour donner les valeurs du déphasage, du gain réel et du gain en décibel en fonction de la fréquence de la sinusoïde.
Tracer les lieux de NYQUIST, BODE, BLACK.
Tracer le diagramme asymptotique puis pseudo-asymptotique dans le plan de Bode en repérant les fréquences $f_a = f_0/2z$ et $f_b = 2z\,f_0$ (f_a suffit pour tracer la pseudo-asymptote de pente -1).

Exercice 3

En utilisant le théorème de la valeur finale (relation 8 des rappels de cours du TDAU.1), calculer l'erreur de traînage introduite par un système du second ordre de gain statique unitaire en réponse à une rampe de pente b.
A.N.: $\omega_0 = 4$ rad/s ; $z = 0,35$; $b = 2$ V/s .

TDAU.7

APPLICATION DE LA REGLE DE MASON
ETUDE DE SYSTEMES DU SECOND ORDRE
FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE
ETUDE DE SYSTEMES MECANIQUE, HYDRAULIQUE ET THERMIQUE

Rappels de ce qui a été fait en cours:

Règle de MASON: lorsque l'on a établi un graphe de transfert correspondant à un système compliqué obtenu en associant des relations simples (et en faisant bien attention à la relation de cause à effet), la règle de Mason permet la résolution graphique du système de nombreuses équations (beaucoup plus difficile à résoudre algébriquement).
Le graphe est constitué de nœuds (un pour chaque variable) et de chemins reliant ces nœuds (les transmittances des chemins faisant intervenir les paramètres constants constituant le système).

$T(p) = \dfrac{\sum T_k\, \Delta_k}{\Delta}$ où Δ est le déterminant du graphe, T_k est la transmittance d'un chemin direct et Δ_k le déterminant mineur relatif à ce chemin.

$\Delta = 1 - \Sigma\, b_i + \Sigma\, b_i.b_j - \Sigma\, b_i.b_j.b_k + \ldots$

b_i est la transmittance d'une boucle (il convient de dénombrer <u>toutes</u> les boucles)

$b_i.b_j$ est le produit des transmittances de 2 boucles <u>disjointes</u>

Δ_k se calcule comme Δ mais après avoir éliminé tous les nœuds empruntés par le chemin T_k.

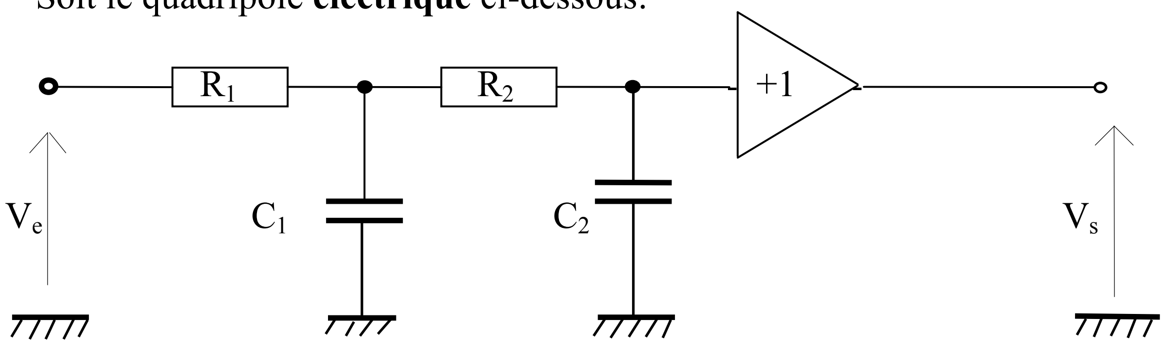
Fonction de transfert en boucle fermée (retour unitaire):

$$T(p) = \frac{n(p)}{d(p)} \quad \Rightarrow \quad W(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{n(p)}{n(p) + d(p)}$$

Applications:

Exercice 1

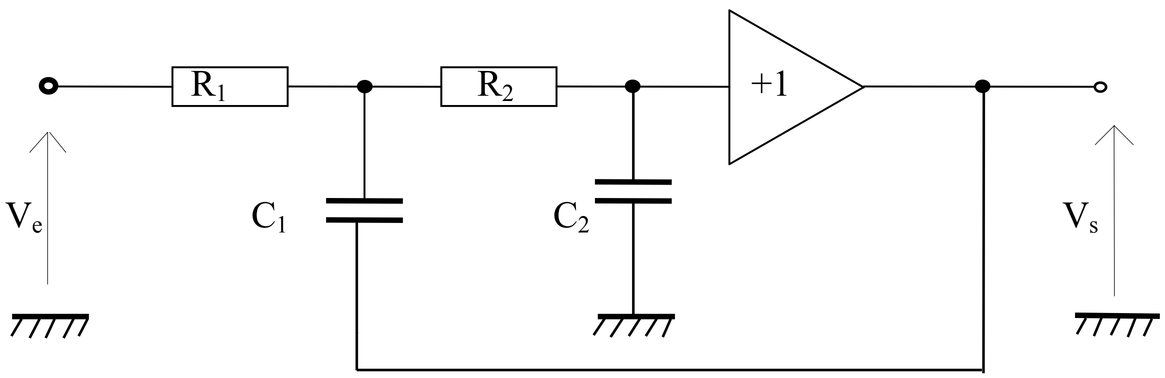
Soit le quadripôle **électrique** ci-dessous:



Etablir le graphe de transfert représentant le système d'équations de fonctionnement du quadripôle.

Déterminer sa fonction de transfert V_s / V_e en considérant l'ampli-suiveur parfait (impédance d'entrée infinie et impédance de sortie nulle).

On modifie le montage comme ci-dessous:



Modifier le graphe de transfert en conséquence.

Déterminer sa fonction de transfert V_s / V_e en considérant l'ampli-suiveur parfait (impédance d'entrée infinie et impédance de sortie nulle).

Donner le montage de l'ampli-suiveur utilisant un amplificateur opérationnel.

Exprimer A, ω_0 et z en fonction de R_1, R_2, C_1, C_2.

<u>A.N.</u>: $R_1 = R_2 = 40$ kΩ; $C_1 = 22$ µF; $C_2 = 2{,}2$ µF.

Faire le calcul d'incertitude sur les valeurs de ω_0 et de z en fonction des incertitudes sur les valeurs des composants. A.N.: Chaque résistance est connue à 2 % près, et chaque capacité est connue à 5 % près.

<u>Exercice 2</u>

Dans l'exercice 4 du TDAU.4, nous avons étudié la fonction de transfert Ω(p)/V(p) d'un petit moteur à courant continu: Ω = image de la vitesse angulaire instantanée de l'arbre rotorique, V = image de la tension instantanée appliquée aux bornes de l'induit. Cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{A}{1+\tau p} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{a_e} \quad \tau = \frac{J}{f_i} \quad f_i = \frac{a_e . a_c}{R}$$

a_e = coeff. de f.c.e.m = 0,0137 V/(rad/s)

a_c= coeff. de couple = 0,0137 N.m/A

J = moment d'inertie total sur l'arbre = $4{,}6.10^{-6}$ kg.m^2

R = résistance du circuit d'induit = 18 Ω.

Nous allons utiliser ce moteur pour asservir la position angulaire d'un arbre portant une petite antenne parabolique.
Le processus en boucle ouverte comprend:

. un préamplificateur de gain en tension réglable $\alpha.K_m$
. un amplificateur de puissance de gain en tension unitaire
. le moteur
. un réducteur (ampli. de couple) de rapport de réduction de la vitesse $1/N$
. un capteur potentiométrique de gain C

$0 < \alpha < 1 \quad K_m = 10 \quad N = 18 \quad C = 1{,}59$ V/rad ($\cong 0{,}028$ V/degré)

On peut schématiser l'ensemble en boucle ouverte par le graphe ci-dessous:

$$\varepsilon \xrightarrow[\text{préampli. + ampli.}]{} V \xrightarrow[\text{moteur}]{} \Omega \xrightarrow[\text{réducteu}]{} \Theta_s \xrightarrow[\text{capteur}]{} V_s$$

ε est l'image du signal d'erreur: $\varepsilon = V_e - V_s = L(v_e - v_s)$
Θ_s est l'image de la grandeur physique asservie (θ_s = position angulaire).
On rappelle que la tension de consigne représente la grandeur physique de consigne: $V_e = C.\Theta_e$, C étant le coefficient de conversion du capteur.

Quelle tension de consigne v_e représentera une position de la consigne θ_e perpendiculaire à la position zéro ?
Quelle est la fonction de transfert Θ_s/Ω du réducteur ? Justifier.

Mettre la fonction de transfert en boucle ouverte T(p) sous la forme:

$$T(p) = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{\alpha k}{\tau p(1+\tau p)}$$

Exprimer k en fonction des paramètres du processus.
Calculer les valeurs numériques de τ et k.

Déterminer l'expression de la fonction de transfert de l'asservissement (système en boucle fermée): $W(p) = \dfrac{\Theta_s}{\Theta_e} = \dfrac{V_s}{V_e}$ avec $V_e - V_s = \varepsilon$

Mettre cette fonction de transfert sous la forme canonique. W(p) étant du second ordre, exprimer la pulsation naturelle ω_0 et le coefficient d'amortissement z en fonction de α, τ et k.
Remplacer τ et k par leurs valeurs numériques.

Pourquoi le gain statique de l'asservissement est égal à l'unité quel que soit le réglage α ?

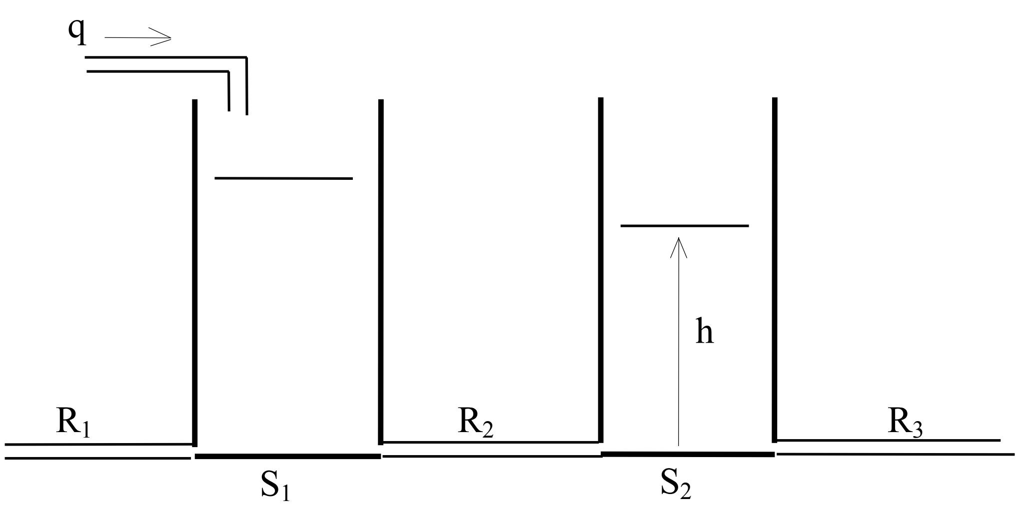
On dit que l'asservissement est de classe 1 car la fonction de transfert en boucle ouverte comporte une intégration.
Quelle est l'erreur de position ε_0 pour une position de consigne constante ?

W(p) étant une fonction de transfert élémentaire du second ordre, pour n'importe quelle valeur de α, il est facile de déterminer les caractéristiques des réponses temporelle et harmonique (voir exercices TDAU.6)

Exercice 3

Mise en équations d'un système **hydraulique**.
Donner la relation entre la hauteur d'eau dans un réservoir et la pression qui s'exerce au fond.
Les pressions étant faibles, l'écoulement dans les tuyaux (résistances hydrauliques) sera laminaire (par opposition à turbulent pour de fortes pressions).
Si l'écoulement est laminaire, il y a proportionnalité entre le débit et la différence de pression (donc la différence de niveau d'eau). Dans le cas d'un écoulement turbulent le débit est proportionnel à la racine carrée de la différence de pression (ou la chute de pression dans la restriction est proportionnelle au carré du débit).
Nous supposerons ici que la valeur de la résistance hydraulique est donnée comme le rapport entre la différence de niveau (en cm) et le débit volumique (en cm^3/s) donc en s/cm^2.
Déterminer le graphe de transfert permettant d'établir la fonction de transfert H/Q du système représenté ci-dessous.
AN.: Réservoirs $S_1 = 90\ cm^2$ $S_2 = 75\ cm^2$
Les résistances hydrauliques des tuyaux peuvent être calculées par la relation

$R = \dfrac{\rho L}{S}$ avec $\rho = 0{,}02$ s/cm $S = 2\ cm^2$ $L_1 = L_3 = 45$ cm $L_2 = 35$ cm



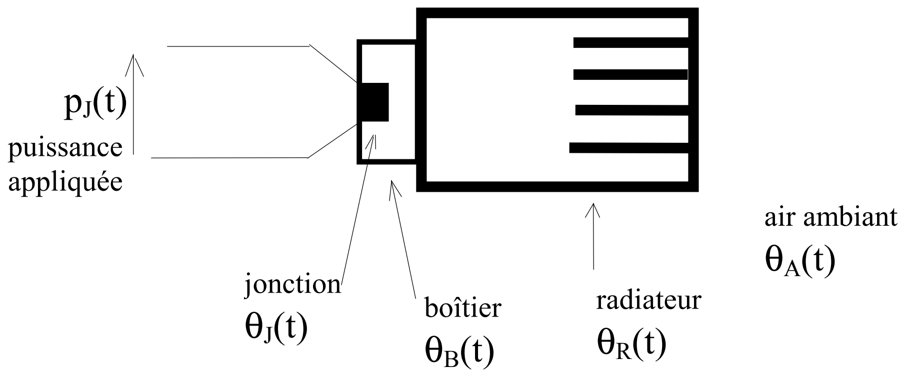
Factoriser le dénominateur de la fonction de transfert pour faire apparaître les deux constantes de temps.

Exercice 4

Proposer un montage électrique analogue au montage hydraulique ci-dessus. Proposer un graphe de transfert plus simple en utilisant les sommes d'admittances pour deux composants en parallèle. Vérifier qu'on obtient une fonction de transfert V/I analogue à H/Q. Proposer des valeurs numériques des composants pour avoir exactement la même fonction de transfert.

Exercice 5

Etude du processus **thermique** constitué d'un transistor de puissance dont la *jonction* est chauffée par la puissance électrique instantanée p_J appliquée, et refroidie par les liaisons thermiques au *boîtier*, au *radiateur* et à l'*air ambiant*.



Soient θ_J la température instantanée de la jonction, θ_B la température du boîtier, θ_R la température du radiateur et θ_A la température ambiante. Chaque élément (jonction, boîtier, radiateur) se comporte comme une capacité thermique (en J/K) fonction directe de son volume et aussi du type de matériau. Les contacts entre les différents éléments correspondent à des résistances thermiques (en K/W). Une capacité thermique est un intégrateur de puissance (analogie électrique avec le condensateur qui est un intégrateur de courant). Une résistance thermique dissipe une puissance proportionnelle à la différence de température (analogie à la résistance électrique qui engendre un courant proportionnel à la différence de potentiel). Le produit R.C est évidemment homogène à un temps (en s): vérifier.

Etablir le schéma électrique équivalent, puis le graphe de transfert correspondant au fonctionnement du système thermique proposé, avec les données suivantes:

R_{JB} = résistance thermique entre la jonction et le boîtier = 0,75 K/W
R_{BR} = résistance thermique entre le boîtier et le radiateur = 0,2 K/W
R_{BA} = résistance thermique entre le boîtier et l'air ambiant = 4 K/W
R_{RA} = résistance thermique entre le radiateur et l'air ambiant = 1,2 K/W

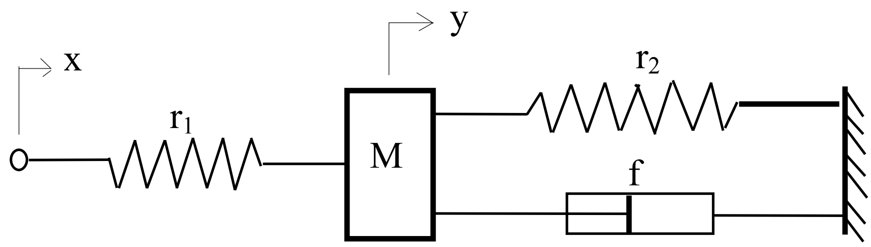
C_J = capacité thermique de la jonction = 1,5 J/K
C_B = capacité thermique du boîtier = 12 J/K
C_R = capacité thermique du radiateur = 60 J/K
Dans le graphe de transfert, remplacer les paramètres par leurs valeurs numériques pour faciliter l'écriture des fonctions de transfert.

Exprimer les trois fonctions de transfert $\frac{\Theta_J}{P_J}$, $\frac{\Theta_B}{P_J}$ et $\frac{\Theta_R}{P_J}$.

La température ambiante est de 24 °C. La jonction, le boîtier et le radiateur sont à la température ambiante (aucune puissance appliquée).
A l'instant t = 0, le transistor devient conducteur: on mesure un courant de 7,5 A et une chute de tension de 9 V. Déterminer les températures de la jonction, du boîtier et du radiateur en régime thermique établi. Evaluer le temps de stabilisation des températures.

Exercice 6

Etude d'un montage **mécanique** utilisant une masse M, deux ressorts de raideur r_1 et r_2, et un amortisseur de frottement visqueux f, dont la grandeur de commande est une position x(t) et la grandeur de sortie la position y(t) de la masse.



Déterminer le graphe de transfert puis la fonction de transfert Y/X du système (en faisant une mise en équations directe des grandeurs mécaniques).
Remarque: la fonction de transfert en vitesse de déplacement est identique; justifier.
Proposer des valeurs numériques des composants pour avoir un gain statique unitaire, un coefficient d'amortissement de 0,25 et une pulsation naturelle de 10 rad/s (on choisira la valeur de la masse).
Faire un schéma équivalent électrique en utilisant les analogies rappelées au début du TDAU.4 (attention: la raideur d'un ressort correspond à l'inverse d'une capacité).
Remarque: ce schéma équivalent n'est pas évident à établir car la grandeur analogue de la force est la tension; or pour ajouter des forces on dispose les composants mécaniques en parallèle, alors que pour ajouter des tensions on dispose les composants électriques en série.
Déterminer le graphe de transfert donnant le fonctionnement du montage électrique et vérifier qu'on obtient la même fonction de transfert.

TDAU.8

STABILITE DES ASSERVISSEMENTS

<u>Rappels de ce qui a été fait en cours:</u>

La stabilité de la boucle d'asservissement s'étudie très facilement à partir de l'expression de la fonction de transfert T(p) en <u>boucle ouverte</u>.

Méthode:

équation à résoudre

$T(p) \;\Rightarrow\; T(j\omega)$ | $\Rightarrow\; \angle T(j\omega) \;\Rightarrow\; \angle T(j\omega) = -180° \;\Rightarrow\; \omega_c$ (pulsation critique)

| $\Rightarrow\; |T(j\omega)| \;\Rightarrow\; |T(j\omega_c)|$ | si $> 1 \;\Rightarrow$ boucle instable

si $< 1 \;\Rightarrow$ boucle stable

si $= 1 \;\Rightarrow$ oscillateur sinusoïdal

Remarque: si le résultat est inférieur mais proche de l'unité, la boucle est stable mais très peu amortie. Au contraire, si le résultat est inférieur à 0,25 la boucle est non seulement stable, mais elle est bien amortie (c'est ce qu'il faut pour un asservissement).

Calcul de la valeur critique d'un gain K réglable dans la boucle d'asservissement:

Méthode:

équation à résoudre

$T(p) \;\Rightarrow\; T(j\omega)$ | $\Rightarrow\; \angle T(j\omega) \;\Rightarrow\; \angle T(j\omega) = -180° \;\Rightarrow\; \omega_c$ (pulsation critique)

| $\Rightarrow\; \underbrace{|T(j\omega)|}_{\text{proportionnel à K}} \;\Rightarrow\; |T(j\omega_c)| = 1 \;\Rightarrow\; K_c$ (et $T_c = 2\pi/\omega_c$)

Si on règle $K < K_c$ la boucle est stable.

Si on règle $K > K_c$ la boucle est instable (elle engendre une oscillation d'amplitude divergente jusqu'à une limitation due aux saturations des amplificateurs: on observe alors une oscillation définitive appelée « pompage »).

Remarque: pour qu'une boucle d'asservissement devienne instable, il faut que la pulsation critique soit définie, donc que le système en boucle ouverte puisse donner une <u>opposition de phase</u>. Ceci n'est pas le cas ni pour le premier ordre, ni pour le second ordre. Il faut donc au moins trois constantes de temps en boucle ouverte pour que l'asservissement puisse devenir instable. Par contre avec une seule constante de temps associée à un retard pur, l'instabilité sera également obtenue.

La représentation du lieu de Nyquist de T(jω) permet de connaître la stabilité en boucle fermée en étudiant ce lieu par rapport au point critique (– 1) en utilisant le critère du revers.

<u>Applications:</u>

<u>Exercice 1</u>

Etudier la stabilité des boucles d'asservissements dont les fonctions de transfert en boucle ouverte sont:

$$T_1(p) = \frac{5}{(1+0{,}4p)^4} \qquad T_2(p) = \frac{0{,}2}{p(1+2p)^3}$$

$$T_3(p) = \frac{2(1+0{,}5p)}{p(1+2p)(1+p)(1+0{,}2p)^2}$$

<u>Exercice 2</u>

Calculer la valeur critique du gain K rendant la boucle « juste instable » pour les deux fonctions de transfert en boucle ouverte ci-dessous. Donner alors la période de la sinusoïde qui sera engendrée pour ce réglage.

$$T_4(p) = \frac{0{,}8K e^{-0{,}3p}}{(1+1{,}5p)^3} \qquad T_5(p) = \frac{0{,}25K\, e^{-15{,}5p}}{(1+72p)(1+11p)}$$

Remarque: le calcul à partir de la fonction $T_5(p)$ permet de vérifier si votre calculette permet le calcul précis d'une solution ω_c faible par rapport à l'unité. Sinon, il suffit de poser p = 0,1*p* (ou même p = 0,01*p*) et ensuite de diviser le résultat ω_c obtenu par 10 (ou 100).

TDAU.9

PRECISION DES ASSERVISSEMENTS
(erreurs de position et de traînage)

Rappels de ce qui a été fait en cours:

La précision est la qualité de l'asservissement la plus facile à étudier car on ne s'intéresse à la valeur du signal d'erreur qu'en régime établi. La précision est tout d'abord fonction de la classe k (0, 1 ou 2) de la fonction de transfert T(p) en boucle ouverte, c'est-à-dire du nombre d'intégrateurs. Pour une classe donnée, la précision est d'autant meilleure que le gain A_k (gain en position pour k = 0, gain en vitesse pour k = 1 et gain en accélération pour k = 2) de T(p) est grand. On peut simplement récapituler ce qu'il faut savoir sur la qualité précision en présentant le tableau ci-dessous qui donne la valeur finale de la tension d'erreur ε après avoir présenté la fonction de transfert T(p) en boucle ouverte sous sa forme canonique:

$$T(p) = \frac{A_k\,(1 + a_1p + a_2p^2 + ...)}{p^k\,(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + ...)}$$

consigne \ k	0	1	2
$x = \alpha_0$	$\varepsilon_0 = \dfrac{\alpha_0}{1 + A_0}$	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0$
$x = \alpha_1 t$	∞	$\varepsilon_1 = \dfrac{\alpha_1}{A_1}$	$\varepsilon_1 = 0$
$x = \dfrac{\alpha_2 t^2}{2}$	∞	∞	$\varepsilon_2 = \dfrac{\alpha_2}{A_2}$

Le symbole ∞ signifie que l'asservissement ne permet pas de répondre à ce type de consigne: la grandeur asservie s'écarte de plus en plus de la consigne.

ε_0 (en V) est l'erreur de position en réponse à un échelon de position α_0 (en V) de la consigne.

ε_1 (en V) est l'erreur de traînage (en vitesse) en réponse à un échelon de vitesse α_1 (en V/s) de la consigne.

ε_2 (en V) est l'erreur de traînage (en accélération) en réponse à un échelon d'accélération α_2 (en V/s^2) de la consigne.

La tension d'erreur peut être convertie en une erreur physique en la divisant par le gain du capteur. Exemple: pour un asservissement de température utilisant un capteur de gain 0,05 V/°C une tension d'erreur de 0,4 V correspond à une erreur de 8 °C par rapport à la consigne qu'on s'est fixé.

On rappelle que la tension de consigne appliquée sur l'entrée + du comparateur de l'asservissement correspond à une consigne physique qu'on obtient en la divisant par le gain du capteur. Exemple: pour le capteur précédent, une tension $v_e = 7,5$ V correspond à une consigne de 150 °C.

Applications:

Exercice 1

Soit un asservissement de niveau d'eau utilisant un capteur de niveau de gain 2 V/m. La fonction de transfert du processus est:

$$F(p) = \frac{0,128}{(2 + 100p)(1 + 20p)(1 + 5p)} \qquad (m/V)$$

L'amplificateur de puissance a un gain en tension de 15.
Le correcteur est de type à avance de phase:

$$R(p)=4,5\frac{1+20p}{1+2p}.$$

Mettre T(p) sous sa forme canonique.
On souhaite une consigne constante de 3,2 m d'eau. Quelle est la tension de consigne qu'il faut appliquer ?
Déterminer quelle sera l'erreur de position en V puis en cm en absence de perturbation.

Exercice 2

Le même asservissement de niveau est maintenant corrigé par un correcteur P.I.D. de type parallèle:

$$R(p) = 3,5(1 + \frac{1}{50p} + \frac{12p}{1 + p}).$$

Mettre T(p) sous forme canonique.
Pour la même consigne de 3,2 m d'eau, quelle sera l'erreur de position ?
Comment réagira l'asservissement en cas d'une perturbation ?

On veut maintenant que le niveau monte de 2,5 cm/s. Quelle fonction v_e doit-on appliquer ? Quelle sera l'erreur de traînage en V puis en cm qui apparaîtra lors de cette montée du niveau ?
Qu'est-ce qu'on constaterait dans le cas de la correction P.D. précédente ?

TDAU.10

VELOCITE DES ASSERVISSEMENTS
(Bande passante et temps de montée)

<u>Rappels de ce qui a été fait en cours:</u>

Pour un système élémentaire du second ordre bien amorti ($0{,}4 < z < 0{,}5$), il existe une relation simple reliant le temps de montée t_m et la bande passante ω_{-6} :

$t_m.\omega_{-6} = \pi\sqrt{3}$ ou $t_m.f_{-6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Nous allons utiliser cette relation pour chiffrer le temps de montée d'un asservissement en faisant l'approximation suivante: dans sa bande passante le comportement harmonique d'un asservissement est très proche de celui d'un système du second ordre, et sa réponse indicielle peut également être identifiée comme celle d'un système du second ordre.
Pour déterminer la valeur du temps de montée d'un asservissement il suffit donc de calculer sa bande passante. Mais il faudrait ainsi exprimer la fonction de transfert W(p) en boucle fermée et travailler sur le nombre complexe W(jω). Pour simplifier la méthode on calculera la pulsation à − 6 dB sur l'expression en boucle ouverte et on majorera ce résultat de 25 % pour déterminer ω_{-6} en boucle fermée.
Bien sûr cette méthode est empirique et il faudra arrondir la valeur de t_m obtenue.
Résumé de la méthode:

Résoudre $|T(j\omega)| = 0{,}5 \Rightarrow \omega_{-6BO} \Rightarrow \omega_{-6} = 1{,}25\,\omega_{-6BO} \Rightarrow t_m = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{\omega_{-6}} \Rightarrow$ arrondir.

<u>Applications:</u>

<u>Exercice 1</u>

Soit $T(p) = \dfrac{0{,}8}{p(1 + 0{,}5p)(1 + 0{,}3p)(1 + 0{,}2p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement bien amorti (nous vérifierons cette hypothèse dans l'exercice 1 TDAU.11).
Déterminer la valeur approximative du temps de montée de l'asservissement.
Evaluer son temps de réponse.

<u>Exercice 2</u>

Faire la même étude en reprenant les données de l'exercice 2 TDAU.9 concernant un asservissement de niveau (la même hypothèse de bon amortissement sera vérifiée dans l'exercice 2 TDAU.11).

TDAU.11

AMORTISSEMENT
DES BOUCLES D'ASSERVISSEMENTS
(Marge de phase, marge de gain, abaque de Black)

<u>Rappels de ce qui a été fait en cours:</u>

De même que pour les qualités précision et vélocité on peut étudier la qualité amortissement d'un asservissement sans exprimer la fonction de transfert en boucle fermée mais en travaillant sur l'expression en boucle ouverte. Il suffit par rapport au régime critique (vu au TDAU.8) de chiffrer la « marge de stabilité » qui correspond dans le plan de Nyquist à la distance du lieu de $T(j\omega)$ par rapport au point critique -1. Cette distance sera chiffrée par deux valeurs: la marge de phase M_φ et la marge de gain M_G.
On rappelle ce qu'il faut observer pour que l'asservissement soit bien amorti (limitation du dépassement de sa réponse indicielle à 20 % et limitation de sa résonance à 2,5 dB):

En classe 0: $M_\varphi \approx 65°$ et $M_G > 6$ dB En classe 1 et 2: $M_\varphi \approx 50°$ et $M_G > 6$ dB

Calcul de M_φ : résoudre $|T(j\omega)| = 1 \Rightarrow$ solution $\omega_\varphi \Rightarrow M_\varphi = 180° + \angle T(j\omega_\varphi)$

Calcul de M_G : résoudre $\angle T(j\omega) = -180° \Rightarrow$ solution $\omega_c \Rightarrow M_G = -20\log|T(j\omega_c)|$

Calcul du réglage optimal d'un gain K pour assurer une bonne marge de stabilité:

résoudre $\angle T(j\omega) = -180° + M_\varphi \Rightarrow$ solution $\omega_G \Rightarrow |T(j\omega_G)| = 1 \Rightarrow K_0$

Si on a préalablement calculé la valeur critique K_c on aura: $M_G = 20\log(K_c/K_0)$.

L'abaque de Black permet d'imposer la résonance de l'asservissement en boucle fermée (méthode graphique). On adopte généralement un coefficient de résonance de 1,3 (c'est-à-dire 2,3 dB).

<u>Applications:</u>

<u>Exercice 1</u>

Soit l'asservissement étudié dans l'exercice 1 TDAU.10.
Calculer les marges de stabilité. Conclusions.

<u>Exercice 2</u>

Soit l'asservissement étudié dans les exercices 2 TDAU.9 et TDAU.10.
Calculer les marges de stabilité. Conclusions.

Exercice 3

Soit T(p) la fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement à retour unitaire: $T(p) = \dfrac{0{,}1K(1+p)e^{-0{,}25p}}{p(1+1{,}5p)^2(1+0{,}5p)}$

1. Calculer les marges de stabilité pour K = 8. Sont-elles satisfaisantes ?
2. Calculer la valeur critique de K qui rend la boucle juste instable. Que vaut alors la période de la sinusoïde engendrée ?
3. Calculer la valeur optimale de K qui permet d'avoir un bon amortissement de la boucle d'asservissement (on impose la marge de phase puis on vérifie la valeur de la marge de gain).

Conserver en mémoire de la calculette les expressions du module et de l'argument du nombre complexe T(jω) pour traiter l'exercice 5.

Exercice 4

Soit un asservissement de force sur une « grosse machine » constitué des quatre éléments suivants (voir le schéma fonctionnel sur la couverture):

. le processus de classe 0 constitué d'un gain statique de 10^3 N/A, d'un retard de 0,4 s, de deux éléments identiques du premier ordre de constante de temps 2,5 s, et d'un élément du second ordre de pulsation naturelle 1 rad/s et de coefficient d'amortissement 0,5.

. l'amplificateur de puissance délivrant un courant de commande proportionnel à la tension d'entrée de 0,5 A/V

. le capteur de force de gain 10^{-3} V/N

. le correcteur PID de type série dont l'action intégrale est réglée à 3 s et l'action dérivée à 0,8 s (avec une constante de temps de filtrage de 0,08 s)

Ecrire l'expression de la fonction de transfert T(p) sous forme canonique factorisée et ordonnée.

Calculer les valeurs critique K_c et optimale K_0 de K.

Calculer l'erreur de traînage pour $K = K_0$ et pour une rampe de consigne de pente 1 N/s. Estimer les temps t_m et t_r de l'asservissement.

Exercice 5

Méthode graphique avec l'abaque de Black en reprenant T(p) de l'exercice 3.

On adopte une valeur arbitraire de K, par exemple $K_{arb} = 8$.

Tracer le lieu de Black de T(jω) sur une feuille de calque avec les échelles suivantes: 2 dB/cm et 10 °/cm. Graduer le lieu (en rad/s).

Placer la feuille de calque sur l'abaque de Black pour configurer le réglage arbitraire K = 8. Conclusion ?

Modifier le réglage de K pour obtenir une résonance de 2,3 dB. En déduire la valeur optimale $K_0 = K_{arb}.10^{(x/20)}$ x représentant la translation opérée en dB (positive vers le haut et négative vers le bas). Pour ce réglage, tracer les lieux de Bode de l'asservissement. Calculer son temps de montée en l'assimilant à un système du second ordre.

TDAU.12

CORRECTION
DES BOUCLES D'ASSERVISSEMENTS
Correction tachymétrique
Correction P.D., P.I., P.I.D.,P.I.R
Modèle imposé

Rappels de ce qui a été fait en cours:

1. Lire les généralités du TP10 (paragraphes 0.1 0.2 0.3 0.4 1.2 et 1.3).

2. **Modèle imposé**: soient $G(p) = \frac{n}{d}$ la fonction de transfert d'un ensemble ampli.-processus-capteur et $W(p) = \frac{N}{D}$ la fonction de transfert souhaitée en boucle fermée.

Ce résultat sera obtenu avec un correcteur de fonction de transfert:
$R(p) = \frac{N.d}{n(D-N)}$. Pour choisir l'ordre du modèle afin que le correcteur soit réalisable, il faut: (degré de N.d) = (degré de n.D).
Les degrés de n et d sont connus (processus), ainsi que le degré de N (classe choisie); on en déduit le degré de D c'est-à-dire l'ordre de W(p).
Le correcteur peut ainsi être réalisé avec des intégrateurs, des sommateurs et des gains (graphe de transfert canonique).

Applications:

Exercice 1

Correction tachymétrique d'un asservissement de position.
Nous allons reprendre l'étude de l'asservissement de position angulaire vu dans l'exercice 2 TDAU.7 et aussi étudié dans le TP7.
Reprendre toutes les données de ce TD.
La correction tachymétrique consiste à réaliser, à l'intérieur de la boucle d'asservissement, une boucle secondaire à partir de l'information fournie par un second capteur qui convertit la dérivée de la grandeur physique asservie. Ce type de correction s'adresse en particulier aux processus de classe 1, c'est-à-dire possédant une intégration naturelle.
Pour notre application, la grandeur physique asservie étant une position angulaire, nous réaliserons donc une boucle secondaire (imbriquée dans la boucle principale) en captant la vitesse angulaire (représentant la dérivée de la grandeur asservie) à l'aide d'une génératrice tachymétrique.
Le taux de réaction tachymétrique sera réglable par un gain β.

Représenter le schéma fonctionnel complet de cet asservissement et exprimer les fonctions de transfert en boucles ouvertes: $\frac{V_s}{\varepsilon}$ et $\frac{V_g}{\varepsilon}$ en fonctions de tous les paramètres du système.
Mettre ces fonctions de transfert sous une forme réduite:

$$\frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{\alpha k}{\tau p(1+\tau p)} \quad \text{et} \quad \frac{V_g}{\varepsilon} = \frac{\alpha k \lambda}{(1+\tau p)} .$$

Exprimer k et λ en fonction de $K_m = 10$ (ampli) ; N = 18 (réducteur) ; A=73 (rad/s)/V et $\tau = 0{,}44$ s (moteur) ; $a'_e = 0{,}01$ V.s/rad (génératrice) ; C = 1,59 V/rad (capteur).
Calculer la fonction de transfert de l'asservissement $\frac{V_s}{V_e} = \frac{\Theta_s}{\Theta_e}$ en fonction des trois paramètres constants k, τ, λ et des deux paramètres réglables α et β.
Mettre cette fonction de transfert W(p) sous forme canonique du second ordre.
On rappelle en outre que l'erreur de traînage d'un système du second ordre de gain statique unitaire est égale à $2zb/\omega_0$ (voir exercice 3 TDAU.6), b étant la pente de la rampe appliquée.
Nous pouvons étudier en détails les performances de l'asservissement sans puis avec correction tachymétrique. Les trois qualités précision, vélocité et amortissement seront chiffrées respectivement par les valeurs de l'erreur de traînage, de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement.
Montrer qu'à amortissement identique, si on adopte un réglage de gain α plus grand d'un facteur G par rapport à l'asservissement non corrigé, après avoir réglé le taux β de réaction tachymétrique (pour retrouver le même z), l'erreur de traînage est $\sqrt{G}$ fois plus petite et la pulsation naturelle est $\sqrt{G}$ fois plus grande. Les performances globales sont donc G fois meilleures.
Discuter de la limitation pratique du facteur G.

Exercice 2

Correction à avance de phase (P.D.).

Reprendre l'étude de l'asservissement de position précédent (sans correction tachymétrique) en introduisant devant l'amplificateur un correcteur de fonction de transfert $R(p) = \frac{(1 + 0{,}44p)}{(1 + 0{,}147p)}$.
Proposer un montage simple de réalisation de ce correcteur en donnant la valeur des composants.
Exprimer de nouveau T(p) sous la forme réduite vue dans l'exercice précédent: calculer la nouvelle valeur numérique de k' permettant de mettre T(p) sous la forme: $T(p) = \frac{\alpha k'}{\tau' p(1+\tau' p)}$ avec $\tau' = 0{,}147$ s.

Comparer les performances de l'asservissement corrigé et de l'asservissement non corrigé (avec z constant). Quels sont les deux avantages de ce type de correction par rapport à la correction tachymétrique ?

Exercice 3

Critères de réglage des actions d'un correcteur P.I.D.

Reprendre l'exposé des deux critères dans le TP10.

Exercice d'application: déterminer les réglages K, T_i et T_d d'un correcteur P.I.D de type parallèle pilotant un processus (ensemble ampli.-processus-capteur) caractérisé par un gain statique de 0,3 V/V, deux constantes de temps de 0,6 s et d'une autre constante de temps de 0,4 s. Utiliser d'abord le critère de ZNM puis le critère de Naslin.

Comparer les performances pour les deux séries de réglage après avoir calculé le gain en vitesse de T(p), la marge de phase et la bande passante.

Exercice 4

Correction P.I.R. pour les processus du premier ordre retardé.

L'idée du correcteur P.I.R. est d'associer à un correcteur P.I. une action « R » qui permettra de rejeter à l'extérieur de la boucle l'influence du retard.

Après avoir étudié l'équivalence énoncée ci-dessus, montrer que pour un processus du premier ordre retardé, la fonction de transfert du correcteur est:

$\frac{V}{\varepsilon} = K(1+\frac{1}{T_i p})\left[\frac{\alpha}{1+\alpha(1-e^{-Tp})(1/T_i p)}\right]$ et qu'il suffit de régler K à la valeur inverse du gain statique de l'ensemble ampli.-processus-capteur et T_i à la valeur de la constante de temps du processus pour obtenir un asservissement de classe 1 (erreur de position nulle) caractérisé par le même retard qu'en boucle ouverte mais par une constante de temps α fois plus faible (on peut régler α = 10) et donc obtenir une excellente vélocité de l'asservissement en réponse à un échelon de consigne.

Proposer un schéma fonctionnel de matérialisation de ce correcteur.

A.N.: asservissement de température utilisant un ampli. de puissance de gain 75 W/V , un capteur de gain 0,1 °C/V, et un processus thermique comportant un retard de 12 s , une constante de temps de 100 s et dont le gain statique est de 0,08 °C/W. Donner les réglages du correcteur et l'expression W(p) de la fonction de transfert obtenue en boucle fermée.

Exercice 5

Correction P.D.D^2 d'un processus de classe 2.

Dans un premier temps, nous allons pendant la séance de TD faire la description précise du fonctionnement d'un processus de classe 2:

la commande de la profondeur d'immersion d'un sous-marin propulsion arrêtée.

Soit, comme l'exemple concret décrit précédemment, un ensemble ampli.-processus-capteur de classe 2 et d'ordre 4 (gain en accélération de 10^{-3} s^{-2} et deux constantes de temps de 5 s et 3 s.
Calculer un « double correcteur P.D » pour avoir une marge de phase de 50° (vérifier la marge de gain). Dessiner les allures des lieux de Nyquist de $T(j\omega)$ <u>sans et avec correcteur</u>. Pour avoir une avance de phase suffisante, on adoptera un rapport 4 entre les actions dérivées et les constantes de temps.

Etudier maintenant la **correction P.I.D. d'un processus de classe 1** (gain en vitesse de 0,02 s^{-1} et 3 constantes de temps de 5 s, 3 s et 1,8 s). Conclusion.

<u>Exercice 6</u>

Etude d'un correcteur spécifique permettant d'imposer la fonction de transfert de l'asservissement (**modèle imposé**).
Soit G(p) la fonction de transfert de l'ensemble ampli.-processus-capteur:

$$G(p) = \frac{4}{(1+1{,}5p)(1+p)(1+0{,}5p)}.$$

On veut réaliser un asservissement de classe 2 ayant un temps de réponse d'environ 5 s.
Calculer la fonction de transfert du correcteur après avoir bien choisi le modèle de W(p). Les valeurs des gains obtenus sont-ils compatibles avec un fonctionnement correct ?
Proposer un schéma complet de réalisation de ce correcteur.

Modèles donnant des réponses excellentes:

On pose $q = \dfrac{p}{\omega_0} = T_0\, p$.

ASSERVISSEMENTS DE CLASSE 1 (D_1 = 10 % et D_2 négligeable).

Ordre 3

$$W(q) = \frac{1}{1+1{,}95q+1{,}95q^2+q^3} \qquad \frac{t_m}{T_0} = t_m\,\omega_0 = 4{,}7$$

Ordre 4

$$W(q) = \frac{1}{1+2{,}62q+3{,}61q^2+2{,}62q^3+q^4} \qquad 5{,}7$$

Ordre 5

$$W(q) = \frac{1}{1+3{,}42q+6{,}33q^2+6{,}33q^3+3{,}42q^4+q^5} \qquad 7{,}5$$

Ordre 6

$$W(q) = \frac{1}{1+4{,}65q+11{,}7q^2+15{,}93q^3+11{,}7q^4+4{,}65q^5+q^6} \qquad 10$$

ASSERVISSEMENTS DE CLASSE 2 (D_1 = 30 % et D_2 négligeables).

Ordre 3

$$W(q) = \frac{1+2{,}5q}{1+2{,}5q+2{,}5q^2+q^3} \qquad 2{,}9$$

Ordre 4

$$W(q) = \frac{1+3{,}95q}{1+3{,}95q+6{,}25q^2+3{,}95q^3+q^4} \qquad 4{,}2$$

Ordre 5

$$W(q) = \frac{1+5{,}76q}{1+5{,}76q+13{,}82q^2+13{,}82q^3+5{,}76q^4+q^5} \qquad 6{,}3$$

Ordre 6

$$W(q) = \frac{1+8{,}92q}{1+8{,}92q+33{,}17q^2+51{,}4q^3+33{,}17q^4+8{,}92q^5+q^6} \qquad 9{,}7$$

Dans tous les cas, le temps de réponse est à peu près égal à 2,5 fois le temps de montée. Le temps de montée est donné à droite des modèles.