



**Génie Electrique et Informatique Industrielle**

**Module Complémentaire semestre 3 ou 4**

**AS21 : Modélisation et commande des systèmes  
linéaires numériques**

Jean Duplaix

## 1. Numérisation des régulateurs analogiques

### 1.1. Introduction

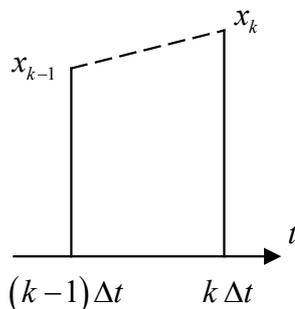
La structure interne d'un régulateur peut être électronique, cela impose au niveau du PID l'utilisation de circuits à base d'amplificateurs opérationnels avec des montages en courant pour être compatible avec l'échelle industrielle généralement retenue et standard 4-20 mA. Avec les interfaces convertisseur courant-tension, convertisseur analogique-numérique, microprocesseur, convertisseur numérique-analogique et convertisseur tension-courant, nous pouvons utiliser le développement numérique d'un PID sous la forme d'un algorithme de calcul simple avec un pas de calcul très petit devant la dynamique du système. Nous réalisons alors la numérisation du régulateur analogique. Les réglages des actions ne tiennent pas compte de la technologie numérique en particulier du pas de calcul. Le fonctionnement est approximativement continu.

### 1.2. Numérisation d'un régulateur PID

Forme du PID mixte non filtré avec un talon de réglage  $u_{m0}$  :

$$u(t) = u_{m0} + K_r \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Numérisation des actions avec un pas de calcul  $\Delta t$  :



**Notation :**  $x(k\Delta t) = x_k$

**Dérivation :** 
$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}$$

**Intégration :**

*Différence avant* 
$$I_k = \int_0^{k\Delta t} x(\tau) d\tau \approx I_k = I_{k-1} + \Delta t x_{k-1}$$

*Différence arrière* 
$$I_k = \int_0^{k\Delta t} x(\tau) d\tau \approx I_k = I_{k-1} + \Delta t x_k$$

*Trapèze* 
$$I_k = \int_0^{k\Delta t} x(\tau) d\tau \approx I_k = I_{k-1} + \Delta t \left( \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \right)$$

*Approximation d'Euler (intégration par différence avant) :*

$$u_k = u_{m0} + K_r \left( \varepsilon_k + \frac{\Delta t}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i + \frac{T_d}{\Delta t} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \right)$$

*Détermination d'une forme incrémentale ou récurrente :*

$$u_0 = u_{m0} + K_r \left( 1 + \frac{T_d}{\Delta t} \right) \varepsilon_0$$

$$u_1 = u_0 + K_r \left( 1 + \frac{T_d}{\Delta t} \right) \varepsilon_1 + K_r \left( \frac{\Delta t}{T_i} - 2 \frac{T_d}{\Delta t} - 1 \right) \varepsilon_0$$

$$u_2 = u_1 + K_r \left( 1 + \frac{T_d}{\Delta t} \right) \varepsilon_2 + K_r \left( \frac{\Delta t}{T_i} - 2 \frac{T_d}{\Delta t} - 1 \right) \varepsilon_1 + K_r \frac{T_d}{\Delta t} \varepsilon_0$$

⋮

$$u_k = u_{k-1} + K_r \left( 1 + \frac{T_d}{\Delta t} \right) \varepsilon_k + K_r \left( \frac{\Delta t}{T_i} - 2 \frac{T_d}{\Delta t} - 1 \right) \varepsilon_{k-1} + K_r \frac{T_d}{\Delta t} \varepsilon_{k-2}$$

*Conclusion :* La programmation de cette équation récurrente est très simple, la détermination des réglages du PID peut être faite à partir des solutions exposées dans le module AU3. La seule chose fondamentale est d'avoir une identité parfaite entre le pas de calcul matériel (timer qui cadence le programme) et la valeur numérique du pas de calcul intervenant dans la définition des coefficients de l'algorithme.

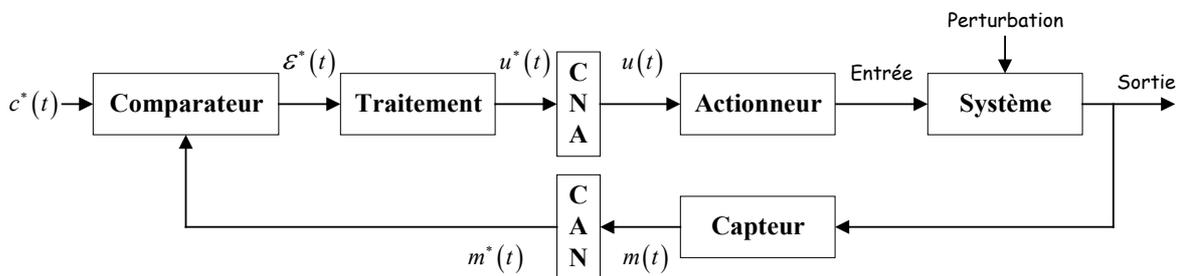
## 2. Analyse des systèmes linéaires numériques

### 2.1. Introduction

Un système linéaire numérique, contrairement à la numérisation du régulateur qui correspond à un changement de technologie locale (chapitre précédent), n'autorise plus d'approximation car le pas de calcul est un paramètre de réglage du système. Ce pas de calcul s'appelle alors la période d'échantillonnage. Nous pouvons parler de systèmes échantillonnés.

### 2.2. Structure d'un système échantillonné et problèmes à résoudre

La figure ci-dessous présente un exemple de structure de boucle échantillonnée. Nous remarquons l'introduction des interfaces CAN et CNA qui imposent le choix d'une période d'échantillonnage  $T_e$ .



Problèmes à résoudre

- **Echantillonnage d'un signal continu**

Cette opération correspond à une prise d'échantillons à la cadence de la période d'échantillonnage. Cela conduit à faire la remarque que seules les informations obtenues aux instants d'échantillonnage sont « vues » par le calculateur. Un signal continu  $s(t)$  devient un signal échantillonné  $s^*(t)$ .

- **Conversion analogique-numérique**

Les convertisseurs utilisés permettent le passage d'une grandeur analogique (le plus souvent tension) en une valeur numérique. La valeur numérique que nous utilisons sera la valeur numérique image directe de la grandeur analogique. A l'instant  $t_k = k.T_e$ , l'échantillon  $k$  est noté  $s_k = s^*(k.T_e) = s(k.T_e)$ .

- **Conversion numérique-analogique**

L'opération est l'inverse de la précédente. Nous devons alors reconstituer une continuité de signal pendant une période d'échantillonnage à partir de l'échantillon numérique fourni mais aussi dans certain cas construit en s'appuyant sur d'autres échantillons le précédent.

- **Synthèse de l'algorithme de commande**

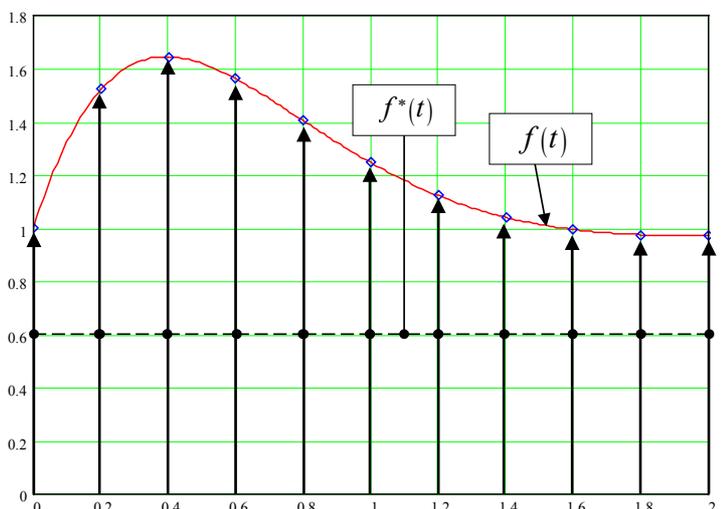
Nous devons mettre en place une théorie qui permet de définir la loi de commande au sens numérique du terme pour se substituer ou faire mieux que le correcteur ou le régulateur analogique définis dans les approches systèmes continus.

### 2.3. Bases théoriques du traitement des systèmes linéaires numériques

- **Description d'un signal échantillonné**

A partir d'un signal continu causal  $f(t)$  ( $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ ), son signal échantillonné  $f^*(t)$  peut être représenté avec nos conventions comme une suite d'échantillons  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$ . Cette suite n'indique pas le calage temporel de ces échantillons, ce qui conduit à introduire une fonction de distribution de Dirac représentée par l'ensemble des flèches ci-dessous :

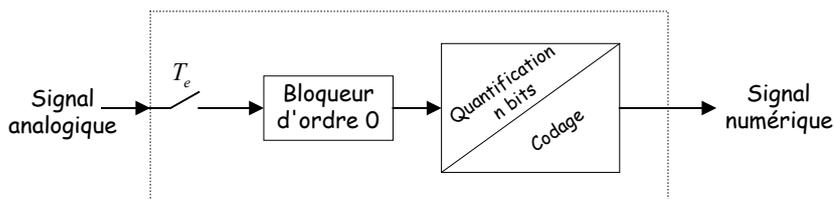
$$\text{d'où } f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(k.T_e)$$



*Signaux causaux continu et échantillonné*

Nous pouvons théoriquement parler considérer que l'échantillonnage et la conversion sont instantanés : soit une durée d'échantillonnage par blocage de la tension + un temps de conversion très petit devant la période d'échantillonnage.

#### Modélisation du CAN

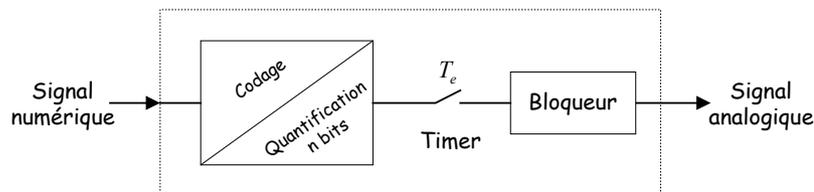


*Schématisation d'un convertisseur analogique-numérique (CAN)*

La rapidité de l'ensemble échantillonnage-numérisation nous conduit à simplifier ce schéma pour l'intégrer à nos schémas fonctionnels sous la forme d'un simple échantillonneur.

$$f(t) \xrightarrow{T_e} f^*(t)$$

• **Modélisation du CNA**



**Schématisme d'un convertisseur numérique-analogique (CNA)**

La symbolisation de cette interface peut se simplifier par le choix d'un simple bloqueur.

$$f^*(t) \xrightarrow{B} f(t)$$

• **Outil mathématique : transformée en z**

*Définition et notations :*

Signal échantillonné  $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(k.T_e)$

Transformée de Laplace échantillonnée  $F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot e^{-k.T_e \cdot p}$

Transformée en z  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$  avec  $z = e^{T_e \cdot p}$

*Propriétés et résultats principaux :*

Translation temporelle

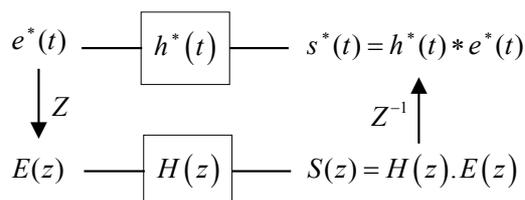
$$Tz(f(t - n.T_e)) = z^{-n} \cdot F(z) \text{ avec } n \text{ entier}$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n.T_e)) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot F(z)$$

Fonction de transfert en z

Comme pour les systèmes continus, nous « échappons » à la convolution discrète.



Transformation inverse

Dans le domaine continu, la fonction de transfert associée aux transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie permet d'écrire une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Dans le domaine discret, nous écrivons l'équation récurrente reliant les échantillons d'entrée et de sortie à partir du transfert en  $z$ .

Supposons avoir la forme de transfert canonique causale suivante :  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$ .

En écrivant les transformées en  $z$  des signaux d'entrée et sortie  $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot z^{-k}$  et  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot z^{-k}$ , en faisant le produit en croix et en identifiant dans les deux membres les coefficients multiplicateurs de la même puissance de  $z$  (même instant d'échantillonnage), nous trouvons l'équation récurrente de ce système numérique à l'instant  $kT_e$  :

$$s_k = b_1 s_{k-1} + b_2 s_{k-2} + a_0 e_k + a_1 e_{k-1} + a_2 e_{k-2}$$

avec deux équations pour l'initialisation :

$$s_0 = a_0 e_0 \text{ et } s_1 = b_1 s_0 + a_0 e_1 + a_1 e_0$$

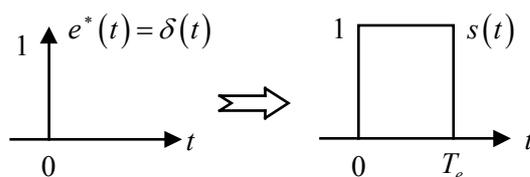
**Remarques : L'initialisation peut permettre l'introduction de conditions initiales. Nous pouvons noter aussi que la transformation inverse contrairement au domaine continu est indépendante de la nature du signal d'entrée. Pour trouver les échantillons de sortie, il suffit de connaître les échantillons d'entrée qui peuvent correspondre à un signal échantillonné quelconque.**

• **Bloqueur**

Définition : Le rôle d'un bloqueur est de définir un signal continu entre deux échantillons successifs pendant la durée d'une période d'échantillonnage. Le type de bloqueur est fonction soit du nombre d'échantillons (les plus courants ordre 0 ou ordre 1) ou de la forme du signal continu reconstitué (exponentielle par exemple). Nous utilisons pour la suite que des bloqueurs d'ordre 0.

Transfert d'un bloqueur d'ordre 0 :

L'entrée est un train d'impulsions, sa réponse impulsionnelle peut donc être tracée :

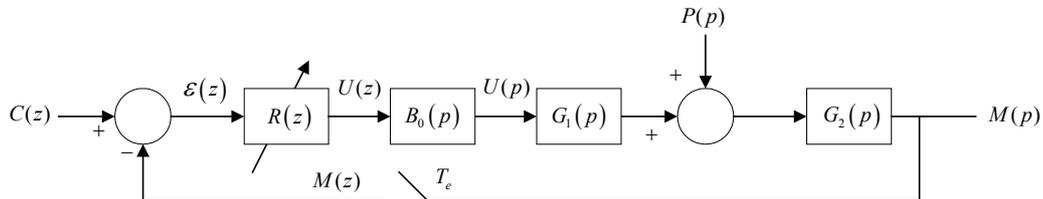


$$s(t) = v(t) - v(t - T_e) \Rightarrow \frac{S(p)}{E^*(p)} = B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

## 2.4. Structure et analyse d'une boucle échantillonnée

### • Exemple de boucle

Nous prenons comme modèle de boucle celui présenté au paragraphe 2 qui correspond au contexte de base de la régulation industrielle.



Toutes les transformées en  $z$  sont en réalité des transformées de Laplace échantillonnées où le changement de variable  $z = e^{T_e \cdot p}$  a été fait. La synthèse de ce type de boucle n'est pas simple vu le mélange des variables  $p$  et  $e^{T_e \cdot p}$ .

*Mise en équation :*

avant l'échantillonneur :

$$M(p) = G_2(p)P(p) + R(z)B_0(p)G_1(p)G_2(p)(C(z) - M(z))$$

après l'échantillonneur :

$$M(z) = \overline{G_2(p)P(p)}^{(z)} + R(z)\overline{B_0(p)G_1(p)G_2(p)}^{(z)}(C(z) - M(z))$$

d'où le bilan suivant :

$$M(z) = \frac{\overline{G_2(p)P(p)}^{(z)}}{1 + R(z)\overline{B_0(p)G_1(p)G_2(p)}^{(z)}} + \frac{R(z)\overline{B_0(p)G_1(p)G_2(p)}^{(z)}}{1 + R(z)\overline{B_0(p)G_1(p)G_2(p)}^{(z)}} \cdot C(z)$$

Nous constatons :

- ❑ que seule la connaissance de la transformée en  $z$  de la mesure ne nous permettra pas de savoir ce qui se passe entre les instants d'échantillonnage (une parade peut être la simulation ou la visualisation du signal de commande derrière le bloqueur)
- ❑ la fonction de transfert en  $z$  de la boucle fermée peut s'écrire seulement vis à vis de la consigne qui est échantillonnée (consigne numérique de la boucle)
- ❑ nous pouvons voir l'influence de la perturbation qui est analogique sur les échantillons de mesure, il faut alors choisir la nature analogique de cette perturbation
- ❑ il existe comme dans le cas continu une équation caractéristique en  $z$  qui pourra servir notamment dans l'étude de la stabilité
- ❑ deux problèmes théoriques restent à résoudre :

$$\text{évaluer } \overline{G_2(p)P(p)}^{(z)} \text{ et } \overline{B_0(p)G_1(p)G_2(p)}^{(z)}$$

Passage d'un transfert en  $p$  à sa forme échantillonnée :

$\overline{G(p)}^{(z)}$  : décomposer  $G(p)$  en éléments simples, en utilisant le tableau distribué  
remplacer les éléments simples en  $p$  par leurs homologues en  $z$

Passage d'un ensemble bloqueur d'ordre 0 et transfert en  $p$  à sa forme échantillonnée :

$\overline{B_0(p)G(p)}^{(z)}$  : en remplaçant le bloqueur par sa fonction de transfert en  $p$ , nous obtenons  
l'expression  $\frac{1 - e^{-T_e \cdot p}}{p} \cdot G(p) = \frac{G(p)}{p} - e^{-T_e \cdot p} \cdot \frac{G(p)}{p}$  ; puis en utilisant la linéarité, le  
changement de variable en  $z$  et le théorème du retard, nous nous ramenons au cas précédent  
avec le résultat fondamental suivant :

$$\overline{B_0(p)G(p)}^{(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{\overline{G(p)}^{(z)}}{p}$$

Ce transfert peut être interprété comme étant l'image du processus vue par la partie  
numérique de la boucle au travers de ses interfaces CNA et CAN.

## 2.5. Stabilité

### • Introduction :

La définition de la stabilité est la même que celle utilisée pour les systèmes continus : un  
système est stable si écarté de sa position d'équilibre, il revient à cette position en régime  
permanent.

Une conclusion dans le domaine continu, nous a conduit à dire qu'un système est stable si tous  
ses pôles sont à partie réelle strictement négative d'où la région stable qui correspond au demi-  
plan complexe de gauche strictement.

Soit un pôle  $p = \sigma \pm j\omega$  dans le domaine continu, le changement de variable pour les systèmes  
échantillonnés est  $z = e^{T_e \cdot p}$  d'où  $z = e^{\sigma T_e} \cdot e^{\pm j\omega T_e}$ . La condition à respecter ne porte que sur le  
module :  $\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1$ .

**Conclusion : un système échantillonné est stable si tous ses pôles sont strictement à  
l'intérieur du cercle unité du plan complexe ( $\text{Re}(p\text{ôles}), \text{Im}(p\text{ôles})$ ), c'est le domaine de  
stabilité absolue pour un système échantillonné.**

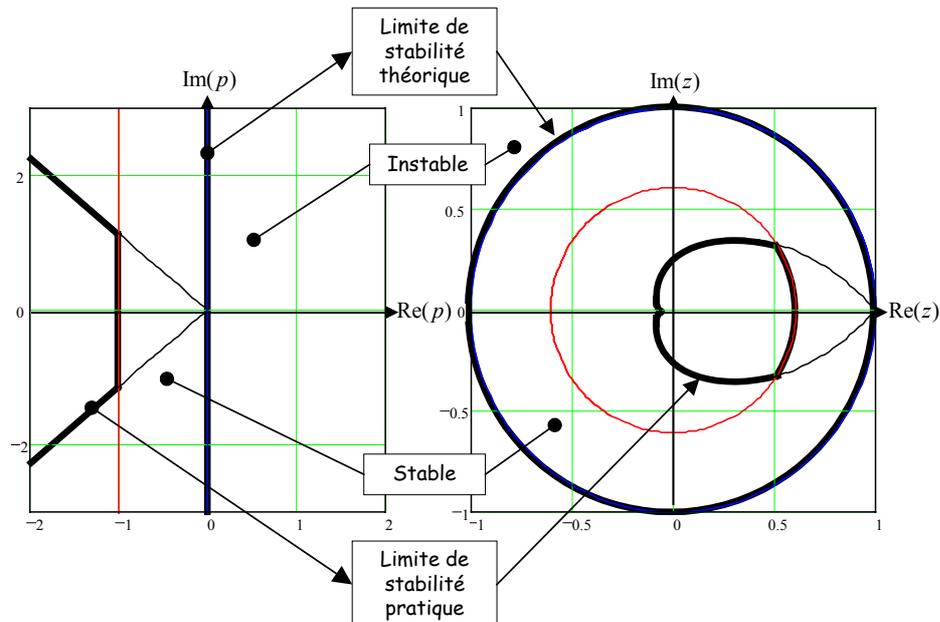
Pour définir un domaine de stabilité relative, nous imposons une certaine qualité  
d'amortissement :

➤ pôles réels continus: forme canonique  $1 + \tau p = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\tau} \geq \sigma_0 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{1}{\sigma_0}$

d'où la transformation de la droite  $p = -\sigma_0 \pm j\omega$  du plan complexe en  $p$  en un cercle de rayon  
 $R_0 = e^{-\sigma_0 T_e}$  du plan complexe en  $z$  ( $z = e^{-\sigma_0 T_e} \cdot e^{\pm j\omega T_e}$ ).

- pôles complexes : forme canonique  $p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 \Rightarrow p = -\alpha\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$  les pôles se situent alors sur des droites passant par l'origine et faisant un angle  $\pm\beta$  avec l'axe des imaginaires avec  $\sin(\beta) = \alpha \Rightarrow \alpha \geq \alpha_0 \Leftrightarrow \beta \geq \beta_0 = \arcsin(\alpha_0)$

d'où la transformation des deux demi-droites  $p = \rho \cdot (-\cos\beta_0 \pm j\sin\beta_0)$  avec  $\rho > 0$  en deux demi-spirales (cardioïde) du plan complexe  $z$  définies à partir de  $(z = e^{-\rho T_e \cdot \cos\beta_0} \cdot e^{\pm j \cdot \rho T_e \cdot \sin\beta_0})$



### Domaines de stabilité : passage des plans complexes $p$ en $z$

Nous pouvons après ce parallélisme développer ou adapter les méthodes présentées pour le continu à des équivalents dans le domaine échantillonné : lieux des racines ou d'Evans (test module des racines inférieur à l'unité), critère algébrique adaptation du critère de Routh en imposant les conditions qui conduisent à des racines de l'équation caractéristique en  $z$  à un module inférieur à l'unité (critère de Jury).

Ces critères existent et conduisent à des calculs un peu plus délicats vu le test sur le module. Nous présentons le changement de variable qui permet de se ramener aux critères algébrique (Routh) et géométrique (Nyquist simplifié ou du revers) du domaine continu. L'intérêt de ce changement de variable n'est pas limité à l'analyse mais aussi à la synthèse des systèmes échantillonnés afin d'appliquer les méthodes utilisées pour les systèmes continus.

#### • Transformation bilinéaire

Le changement de variable permet de travailler avec la transformée en  $w$  : nous posons

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \text{ Nous allons préciser ce que représente } w = \frac{z-1}{z+1} \text{ soit } w = \frac{e^{T_e \cdot p} - 1}{e^{T_e \cdot p} + 1}$$

Pour faire une analyse harmonique, nous remplaçons  $p$  par  $j\omega$ , d'où  $w = \frac{e^{jT_e \omega} - 1}{e^{jT_e \omega} + 1}$ .

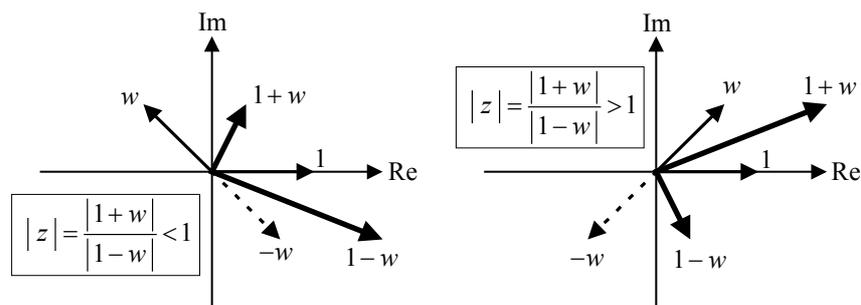
Cette expression devient en divisant les numérateur et dénominateur par  $e^{\frac{jT_e \omega}{2}}$  :

$$w = \frac{e^{\frac{jT_e \omega}{2}} - e^{-\frac{jT_e \omega}{2}}}{e^{\frac{jT_e \omega}{2}} + e^{-\frac{jT_e \omega}{2}}} = j \cdot \tan\left(\frac{T_e \omega}{2}\right)$$

En définissant la pulsation fictive  $v = \tan\left(\frac{T_e \omega}{2}\right)$ , dans une transformée en  $w$ , il est intéressant de rapprocher  $w = j \cdot v$  pour les systèmes échantillonnés de l'opérateur  $p = j \cdot \omega$  des systèmes continus : la pulsation fictive varie de 0 à  $\infty$  quand la pulsation réelle varie de 0 à  $\frac{\pi}{T_e}$ .

*Question 1* : l'opérateur  $w$  permet-il d'appliquer le critère de Routh ?

A partir d'un nombre complexe  $w$ , nous allons construire géométriquement le nombre complexe  $z$  et vérifier dans quel cas son module  $|z|$  est strictement inférieur à l'unité.



Les figures ci-dessus prouvent que pour avoir un module de  $z$  inférieur à l'unité, nous devons avoir un nombre complexe  $w$  à partie réelle strictement négative.

**Conclusion : Le critère de Routh est applicable à l'équation caractéristique en  $w$  d'une boucle fermée d'un système échantillonné.**

*Question 2* : l'opérateur  $w$  permet-il d'appliquer le critère du revers ?

Pour répondre à cette question, nous devons vérifier que le tracé du transfert en boucle ouverte en  $w$  quand  $w$  est égal à  $j \cdot v$  décrit la totalité du tracé harmonique quand la pulsation réelle varie de 0 à  $\frac{\pi}{T_e}$ .

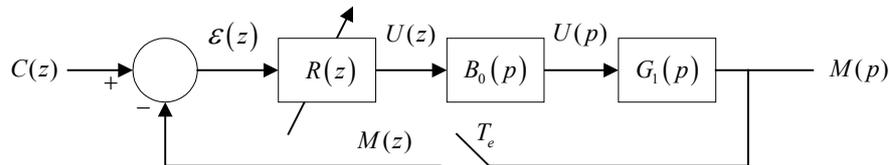
Dans une transformée  $F(z)$ , l'étude harmonique impose de remplacer  $z$  par  $e^{jT_e \omega}$  de périodicité définie à partir d'une variation  $\omega$  de  $\frac{2\pi}{T_e}$ . Le repliement du spectre a lieu au centre de ce domaine soit pour  $\omega = \frac{\pi}{T_e}$ . L'exponentielle  $e^{jT_e \omega}$  pour  $w$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{T_e}$  est

remplacée par sa conjuguée entre  $\frac{\pi}{T_e}$  et  $\frac{2\pi}{T_e}$ . La même chose est réalisée pour  $F(w)$  du fait de la transformation bilinéaire.

**Conclusion : Le tracé du transfert en  $w$  de boucle ouverte pour  $w = j \cdot \tan\left(\frac{T_e \cdot \omega}{2}\right)$  quand la pulsation réelle  $\omega$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{T_e}$ , permet d'appliquer le critère du revers pour les systèmes échantillonnés dans les mêmes conditions qu'un système continu., Les notions de marges de phase et de gain restent utilisables.**

### 2.6. Précision

Comme pour les systèmes continus la précision dépend de la nature du signal de consigne ici connu par ses échantillons. Nous limitons la présentation à l'étude de la précision vis à vis de la consigne.



En posant  $G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{\overline{G(p)}}{p}^{(z)}$ , la transformée en  $z$  de l'erreur vaut :  $\mathcal{E}(z) = \frac{C(z)}{1 + R(z) \cdot G(z)}$ .

Nous pouvons à partir d'une nature de consigne fixée appliquer le théorème de la valeur finale.

$$\mathcal{E}(n.T_e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - z^{-1}) \cdot C(z)}{1 + R(z) \cdot G(z)} \Bigg|_{z \rightarrow 1}$$

En mettant la fonction de transfert sous la forme qui fait apparaître les pôles et les zéros :

$$T_{BO}(z) = R(z)G(z) = \gamma \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - 1)^i (z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdots (z - p_{n-i})}$$

avec  $i$  le nombre de pôles  $z = 1$  (effets

d'intégration numériques et  $m \leq n$  pour assurer la causalité. Nous posons  $T_{BO}(z) \underset{z \rightarrow 1}{\approx} \frac{K}{(1 - z^{-1})^i}$  avec

$K$  gain de boucle.

➤ Consigne échelon unité ou erreur de position :  $C(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$

$$\mathcal{E}_{pos} = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{(1 - z^{-1})^i}{(1 - z^{-1})^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{pos} = \frac{1}{1 + K} & \text{si aucun pôle } z = 1 \\ \mathcal{E}_{pos} = 0 & \text{si au moins un pôle } z = 1 \end{cases}$$

- Consigne rampe de vitesse unité ou erreur de vitesse :  $C(z) = \frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$

$$\varepsilon_{vit} = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{T_e \cdot (1 - z^{-1})^{i-1}}{(1 - z^{-1})^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{vit} = \infty & \text{si aucun pôle } z = 1 \\ \varepsilon_{vit} = \frac{T_e}{K} & \text{si au moins un pôle } z = 1 \\ \varepsilon_{vit} = 0 & \text{si au moins deux pôles } z = 1 \end{cases}$$

- Consigne rampe en accélération ou erreur d'accélération :  $C(z) = \frac{T_e^2 \cdot z^{-1} \cdot (1 + z^{-1})}{2 \cdot (1 - z^{-1})^3}$

$$\varepsilon_{acc} = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{T_e^2 (1 - z^{-1})^{i-2}}{(1 - z^{-1})^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{acc} = \infty & \text{si aucun pôle } z = 1 \\ \varepsilon_{acc} = \infty & \text{si au moins un pôle } z = 1 \\ \varepsilon_{acc} = \frac{T_e^2}{K} & \text{si au moins deux pôles } z = 1 \\ \varepsilon_{acc} = 0 & \text{si au moins trois pôles } z = 1 \end{cases}$$

Les résultats semblent dépendre de la période d'échantillonnage, cela peut paraître curieux mais attention le gain du système dépend des coefficients en  $z$  qui sont aussi fonction de la période d'échantillonnage.

Les conclusions sont les mêmes que celles d'un système continu concernant le compromis stabilité-précision. Une petite nouveauté tout de même est que la période d'échantillonnage est un paramètre de réglage complémentaire qui peut permettre d'espérer obtenir plus de degrés de liberté en analyse et synthèse de boucle.

### 3. Synthèse des systèmes linéaires numériques

#### 3.1. Correspondance analogique-numérique

- **Equivalence du bloqueur d'ordre zéro**

La fonction de transfert du bloqueur  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e \cdot p}}{p} \approx e^{-\frac{T_e \cdot p}{2}}$  peut être assimilée à un retard pur d'une demi-période d'échantillonnage  $T_e$  (cette approximation est d'autant plus justifiée que la fréquence d'échantillonnage est grande devant la bande passante du système). Cette correspondance permet de justifier que même un premier ordre peut être déstabilisé s'il est commandé numériquement.

- **Expression d'un transfert par approximation numérique**

*Méthode d'Euler* (rectangle arrière):

L'opération dérivée  $\frac{d}{dt}$  est équivalente à  $\frac{\Delta}{T_e}$ , l'opérateur de Laplace  $p$  peut donc être interprété comme  $\frac{1 - z^{-1}}{T_e}$ .

Exemple : transfert PID continu non filtré  $K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

algorithme PID correspondant  $K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{T_e}{1 - z^{-1}} + T_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)$

soit  $u_k = u_{k-1} + K_r \cdot \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) \cdot \varepsilon_k - K_r \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{T_d}{T_e} \right) \cdot \varepsilon_{k-1} + K_r \cdot \frac{T_d}{T_e} \cdot \varepsilon_{k-2}$

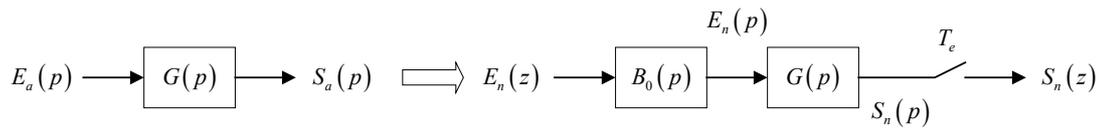
*Approximation de Tustin* (ou méthode des trapèzes)

Le changement de variable  $z = e^{T_e \cdot p}$  peut s'écrire  $z = \frac{e^{\frac{T_e \cdot p}{2}}}{e^{-\frac{T_e \cdot p}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{T_e \cdot p}{2}}{1 - \frac{T_e \cdot p}{2}}$  d'où  $p \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ .

Cette approximation est très utilisée car les réponses harmoniques de la solution analogique et de son équivalent numérique sont quasiment superposées sur le domaine  $\omega \in \left] 0, \frac{\pi}{T_e} \right]$  pour un choix judicieux de la période d'échantillonnage (voir tableau ci-dessous).

*Invariance indicielle*

Pour effectuer cette correspondance, nous partons de la fonction de transfert analogique  $G(p)$  à réaliser en version numérique  $G(z)$ .



A sa sortie, le signal échantillonné est obtenu avec un échantillonneur, à son entrée le signal numérique est alors l'entrée d'un bloqueur d'ordre zéro. Le nom invariance indicielle correspond au fait que si l'entrée numérique de cette réalisation est une succession d'impulsion unité, la sortie échantillonnée coïncide avec l'échantillonnage de la réponse indicielle unitaire du transfert continu.

Nous retrouvons une formule déjà présentée : 
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{\overline{G(p)}^{(z)}}{p}$$

#### Choix de la période d'échantillonnage

Au delà du théorème de Shannon qui impose de choisir une période d'échantillonnage

$$T_e < \frac{1}{2 \cdot f_{\max}}$$
 où  $f_{\max}$  représente la plus grande fréquence du signal continu échantillonné, le

tableau ci-dessous donne quelques valeurs pratiques de choix de la période d'échantillonnage : soit en fonction du domaine physique d'application, soit en fonction du modèle du procédé d'après La régulation industrielle *JM Flaus* Hermès 2000 et Commande des systèmes *I. Landau* Hermès Lavoisier 2002.

Type de variable physique	Période d'échantillonnage	Caractéristiques dynamiques procédé	Période d'échantillonnage
Organes électriques	0.0001 à 0.1 s	1 <sup>er</sup> ordre de constante de temps $\tau$	$0.25 \tau$ à $\tau$
Débit	1 à 3 s	1 <sup>er</sup> ordre à retard $r$	$0.2 r$ à $r$
Niveau	5 à 10 s	2 <sup>ème</sup> ordre à pulsation propre $\omega_0$	$0.05 \omega_0^{-1}$ à $\omega_0^{-1}$
Pression	1 à 5 s	Constante de temps dominante $\tau_{\max}$	inférieure à $0.1 \tau_{\max}$
Température	10 à 180 s	Temps de réponse à 5% $t_{r,5\%}$	$1/15 t_{r,5\%}$ à $1/6 t_{r,5\%}$

### 3.2. Synthèses d'une boucle échantillonnée

- Approche avec une correspondance continu-numérique  
Exemple : Régulateur PID par la méthode de Takahashi

A partir de l'identification du procédé en boucle fermée en régime auto-oscillant, relever le gain limite de stabilité  $K_{osc}$  et la période de l'oscillation limite  $T_{osc}$ . Puis utiliser le tableau ci-dessous proposé par Takahashi où la détermination des coefficients résulte d'un critère d'optimisation qui minimise la somme de la valeur absolue de l'écart  $J = \sum_{k \geq 0} |\varepsilon_k|$ .

Type de régulateur		Réglage
P	$u_k = K_r \varepsilon_k$	$K_r = 0.5 K_{osc}$
PI	$u_k = u_{k-1} + K_r \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \cdot \varepsilon_k - K_r \varepsilon_{k-1}$	$K_r = \left( 0.45 - 0.27 \frac{T_e}{T_{osc}} \right) \cdot K_{osc}$ $T_i = \frac{T_{osc}}{1.2} - 0.5 T_e$
PID	$u_k = u_{k-1} + K_r \cdot \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) \cdot \varepsilon_k - K_r \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{T_d}{T_e} \right) \cdot \varepsilon_{k-1} + K_r \cdot \frac{T_d}{T_e} \cdot \varepsilon_{k-2}$	$K_r = 0.6 \left( 1 - \frac{T_e}{T_{osc}} \right) \cdot K_{osc}$ $T_i = 0.5 (T_{osc} - T_e)$ $T_d = \frac{T_{osc}^2}{8(T_{osc} - T_e)}$

- **Approche harmonique avec la transformée en w**

Nous pouvons placer un réseau correcteur du type avance ou retard de phase comme dans le domaine continu, après avoir exprimé le transfert du procédé vu par la partie numérique  $G(z)$  et avoir choisi un gain  $K_r$  de l'algorithme numérique (critère de précision par exemple). Nous exprimons  $G(w)$  avec  $z = \frac{1+w}{1-w}$  et traçons dans le plan de Bode  $G(jv)$ . Nous pouvons ainsi placer des correcteurs en w (forme avance et/ou retard de phase) comme en continu. L'expression du transfert en z équivalent consiste à remplacer dans la forme en w l'opérateur w par  $\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ . Un point à vérifier systématiquement est que quand la pulsation fictive v tend vers l'infini, la pulsation réelle tendant vers une valeur finie  $\omega = \frac{\pi}{T_e}$  le diagramme en amplitude se termine toujours par une asymptote horizontale.

- **Approches spécifiques au numérique**

Nous pouvons envisager d'utiliser l'approche numérique pour soit définir des régulateurs non réalisables avec une technologie analogique, ou soit, en remarquant que la commande du procédé s'effectue en boucle ouverte, injecter la commande adéquate pour obliger le système à réagir de manière optimale.

*Régulateur PIR*

Nous avons vu dans le module AU3 qu'un système identifié par un modèle de Broïda, est difficile à gérer par un régulateur PID si le facteur de réglabilité rapport entre le retard pur et la constante de temps du procédé devient grand  $\left(\frac{r_B}{\tau_B} > 0.5\right)$ . Une structure particulière de régulateur PI associé à un compensateur de temps mort (CTM) souvent appelé PIR permet d'améliorer ce type de boucle. Le « secret » est simple en numérique un fonctionnement retard pur de  $r_0$  secondes revient à libérer les échantillons  $n$  coups plus tard avec  $n = Ent\left(\frac{r_0}{T_e}\right)$ .

*Technique de compensation*

Nous pouvons imaginer de définir une structure de régulateur avec un nombre de coefficients satisfaisants afin d'avoir un dénominateur de fonction de transfert de boucle fermée échantillonnée résultant qui corresponde à un type de comportement particulier par exemple un deuxième ordre avec un amortissement et un temps de réponse imposé. La synthèse se trouve essentiellement numérique et temporelle.

Un cas particulier de cette approche est de viser un dénominateur de boucle fermée identique à l'unité, cela veut dire que la sortie est atteinte en un nombre de coups fini. Nous pouvons alors parler de systèmes à temps de réponse fini, dans ce cas nous avons su injecter l'échantillon ou la succession d'échantillons de commande qu'il faut pour atteindre l'objectif voulu.

Pour forcer en commande numérique une table à se positionner en un temps minimum, nous pouvons imaginer définir une commande en trois temps : premier temps accélération du moteur jusqu'à sa vitesse maximale, deuxième temps déplacement à vitesse maximale et troisième temps décélération pour arriver pile à la distance voulue. Pour réaliser ce genre d'optimisation, il faut tenir compte des charges entraînées et donc des limites physiques du système. De plus, il faut développer des cellules de commande auto-configurables à plusieurs plages de fonctionnement qui nécessitent échantillonnage et programmation.

*Bibliographie :*

- Cours et exercices corrigés Collection Sciences et Technologies (IUT BTS Licence) Editeur Technip  
Automatique des systèmes échantillonnés *P. Borne et al* 2000
- Cours, exercices et problèmes corrigés Collection Technosup (1<sup>er</sup> cycle : bases) Edition Ellipses  
Systèmes asservis linéaires *M. Villain* 1996  
Signaux et systèmes continus et échantillonnés *M. Villain* 1996

Sommaire

<b>1. Numérisation des régulateurs analogiques .....</b>	<b>2</b>
1.1. <i>Introduction</i> .....	2
1.2. <i>Numérisation d'un régulateur PID</i> .....	2
<b>2. Analyse des systèmes linéaires numériques .....</b>	<b>4</b>
2.1. <i>Introduction</i> .....	4
2.2. <i>Structure d'un système échantillonné et problèmes à résoudre</i> .....	4
2.3. <i>Bases théoriques du traitement des systèmes linéaires numériques</i> .....	5
2.4. <i>Structure et analyse d'une boucle échantillonnée</i> .....	8
2.5. <i>Stabilité</i> .....	9
2.6. <i>Précision</i> .....	12
<b>3. Synthèse des systèmes linéaires numériques .....</b>	<b>14</b>
3.1. <i>Correspondance analogique-numérique</i> .....	14
3.2. <i>Synthèses d'une boucle échantillonnée</i> .....	15

## Transformées de Laplace continues et échantillonnées

$f(t) \cdot v(t)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - kT_e)$	$\exp(-kT_e p)$	$z^{-k}$
$v(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
$t \cdot v(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$\frac{t^2}{2!} \cdot v(t)$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_e^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$
$e^{-at} \cdot v(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$t \cdot e^{-at} \cdot v(t)$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T_e \cdot e^{-aT_e} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1})^2}$
$\cos(\omega t) \cdot v(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1 - \cos(\omega T_e) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega T_e) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$
$\sin(\omega t) \cdot v(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\sin(\omega T_e) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega T_e) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot v(t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - e^{-aT_e} \cdot \cos(\omega T_e) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot e^{-aT_e} \cdot \cos(\omega T_e) \cdot z + e^{-2aT_e}}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t) \cdot v(t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{-aT_e} \cdot \sin(\omega T_e) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot e^{-aT_e} \cdot \cos(\omega T_e) \cdot z + e^{-2aT_e}}$
$e^{-at} \cdot f(t) \cdot v(t)$	$F(p + a)$	$F(e^{aT_e} z)$
$t^k \cdot v(t)$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$-T_e z \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{Z}\{t^{k-1} \cdot H(t)\}$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot F(p))$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(nT_e)) = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1}) \cdot F(z))$