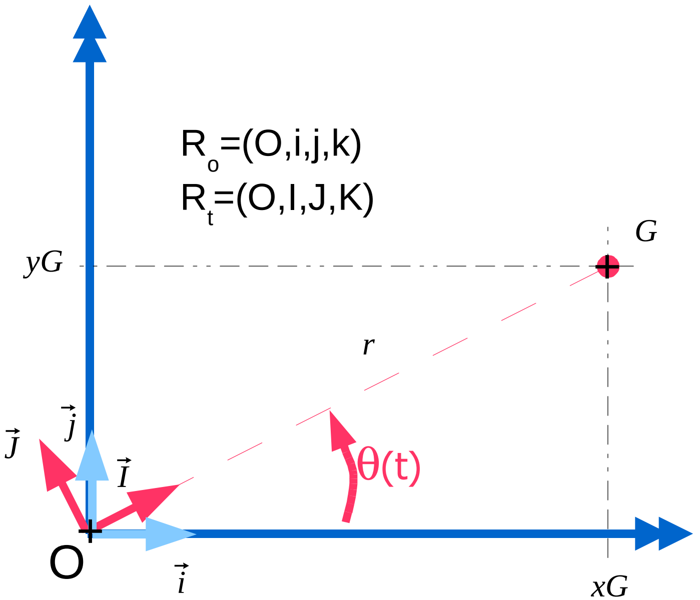
Mouvement de rotation 2D
- Cinématique -

Principe et résolution du PFD

$$\sum \vec{F}_{/s} = m.\vec{a}(t) \underset{*m}{\overset{/m}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t) \underset{\frac{d\vec{v}(t)}{dt}}{\overset{\int \vec{a}(t) + CI_{\vec{v}(0)}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\frac{d\vec{OM}}{dt}}{\overset{\int \vec{v}(t) + CI_{\vec{OM}(0)}}{\rightleftarrows}} \vec{OM}(t) \text{ dans } R_O$$



R_0 et R_t ont les mêmes **Origines**

n'ont pas les mêmes **Vecteurs de base**

$$[\vec{OG}]_0 = xG.\vec{i} + yG.\vec{j} \quad (1)$$
$$[\vec{OG}]_t = r.\vec{I} \quad (2)$$

$$[\frac{d\vec{OG}}{dt}]_0 = \overset{*}{xG}.\vec{i} + xG.[\frac{d\vec{i}}{dt}]_0 + \overset{*}{yG}.\vec{j} + yG.[\frac{d\vec{j}}{dt}]_0 = \begin{pmatrix} \overset{*}{xG} \\ \overset{*}{yG} \\ 0 \end{pmatrix}_0 = \vec{V}^0(G,t)$$ Vitesse de G dans R_0

$$[\frac{d\vec{i}}{dt}]_0 = [\frac{d\vec{j}}{dt}]_0 = 0$$
$$[\frac{d\vec{I}}{dt}]_t = [\frac{d\vec{J}}{dt}]_t = 0$$

$$[\frac{d\vec{OG}}{dt}]_0 = \overset{*}{r}.\vec{I} + r.\underbrace{[\frac{d\vec{I}}{dt}]_0} = \vec{V}^0(G,t) \ \textbf{?}$$

$$[\frac{d\vec{V}^0(G,t)}{dt}]_0 = \overset{**}{xG}.\vec{i} + \overset{*}{xG}.[\frac{d\vec{i}}{dt}]_0 + \overset{**}{yG}.\vec{j} + \overset{*}{yG}.[\frac{d\vec{j}}{dt}]_0 = \vec{A}^0(G,t) = \begin{pmatrix} \overset{**}{xG} \\ \overset{**}{yG} \\ 0 \end{pmatrix}_0$$ Accélération de G dans R_0

$$\textbf{?} \left\{ \begin{array}{l} [\frac{d\vec{I}}{dt}]_0 \neq 0 ; [\frac{d\vec{i}}{dt}]_t \neq 0 \\ [\frac{d\vec{J}}{dt}]_0 \neq 0 ; [\frac{d\vec{j}}{dt}]_t \neq 0 \end{array} \right.$$

Produit Scalaire =Projection

$$[\vec{OG}]_t \cdot \vec{i} = [\vec{OG}]_0 \cdot \vec{i}$$
$$r.cos(\theta) = xG \ \ projection\, de\ \vec{OG}\ sur\ \vec{i}$$
$$[\vec{OG}]_t \cdot \vec{j} = [\vec{OG}]_0 \cdot \vec{j}$$
$$r.cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r.sin(\theta) = yG \ \ projection\, de\ \vec{OG}\ sur\ \vec{j}$$

On retrouve les résultats de Pythagore

$$xG = r.cos(\theta) \quad et \quad yG = r.sin(\theta)$$
$$on \quad remplace\ dans\ l'\acute{e}quation\ (1):$$
$$\vec{OG} = xG.\vec{i} + yG.\vec{j} = r.(\cos(\theta).\vec{i} + \sin(\theta).\vec{j})$$
$$d'o\grave{u} \quad on \quad d\acute{e}duit \quad avec \quad l'\acute{e}quation \quad (2) \quad que:$$
$$\vec{I} = \cos(\theta).\vec{i} + \sin(\theta).\vec{j}$$

avec θ(t), alors

$$[\vec{I}]_0 = \cos(\theta).\vec{i} + \sin(\theta).\vec{j} = \cos(\theta(t)).\vec{i} + \sin(\theta(t)).\vec{j} = \vec{I}(t)$$

Pour retrouver ce résultat :

→ on sait que I et J sont fonction de i et j sous la forme : $??.\vec{i} + ???.\vec{j}$

→ correspondances entre I, J, i et j pour θ=0 et θ=π/2 → « avec les mains »

On en déduit la forme vectorielle de J : $\vec{J} = -\sin(\theta).\vec{i} + \cos(\theta).\vec{j} = \cos(\theta + \pi/2).\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2).\vec{j}$

$$\left[\frac{d\vec{I}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\vec{I}}{d\theta}\right]_0 . \frac{d\theta}{dt}$$

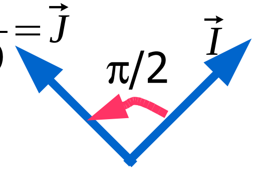
$$\boxed{\left[\frac{d\vec{I}}{d\theta}\right]_0} = -\sin(\theta).\vec{i} + \cos(\theta).\vec{j} = \boxed{[\vec{J}]_0} = \underbrace{\cos(\theta + \pi/2).\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2).\vec{j}}_{I(\theta + \pi/2)}$$

Dériver un vecteur par rapport à sa rotation θ dans R_0

=

« Rotation de I + π/2 »

$$\frac{d\vec{I}}{d\theta} = \vec{J}$$



Accélération absolue de G dans R_0

- démonstration 2D -

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_0 = \dot{x}G\,.\,\vec{i} + \dot{y}G\,.\,\vec{j} = \dot{r}\,.\,\vec{I} + r.\left[\frac{d\,\vec{I}}{dt}\right]_0 = \dot{r}\,.\,\vec{I} + r.\,\omega\,.\,\vec{J} = \vec{V}^0(G) = \begin{pmatrix} \dot{x}G \\ \dot{y}G \\ 0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r.\,\omega \\ 0 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \dot{r}\,.\cos(\theta) - r.\,\omega\,.\sin(\theta) \\ \dot{r}\,.\sin(\theta) + r.\,\omega\,.\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_t = \dot{r}\,.\,\vec{I}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_t + r.\,\omega\,.\,\vec{J} = \vec{V}^t(G) + r.\,\omega\,.\,\vec{J}$$

$$remarque\ :\ \vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_t + r.\,\omega\,.\,\vec{J} = \vec{V}^t(G) + r.\,\omega\,.(\vec{K} \wedge \vec{I})$$

$$remarque\ :\ \vec{OG} = r.\,\vec{I}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_0 = \vec{V}^t(G) + \omega\,.(\vec{K} \wedge r.\,\vec{I}) = \vec{V}^t(G) + \omega\,.(\vec{K} \wedge \vec{OG}) = \vec{V}^t(G) + (\omega\,.\,\vec{K} \wedge \vec{OG})$$

$$\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_0 = \vec{V}^0(G) = \vec{V}^t(G) + (\vec{\Omega} \wedge \vec{OG})$$ Vitesse absolue de G dans R_0

remarque : on définit un vecteur de rotation $\rightarrow\ \omega\,.\,\vec{K} = \vec{\Omega}$

perpendiculaire au plan $(O, \vec{I}, \vec{J})$ *ou* $(O, \vec{i}, \vec{i})$ *avec dans notre cas* $: \vec{k} = \vec{K}$

$\vec{k} = \vec{K}$ *: axe de rotation du système G*

$$\left[\frac{d\,\vec{V}^0(G)}{dt}\right]_0 = \ddot{x}G\,.\,\vec{i} + \dot{x}G\,.\left[\frac{d\,\vec{i}}{dt}\right]_0 + \ddot{y}G\,.\,\vec{j} + \dot{y}G\,.\left[\frac{d\,\vec{j}}{dt}\right]_0 = \vec{A}^0(G,t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}G \\ \ddot{y}G \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

$$\left[\frac{d\,\vec{V}^0(G)}{dt}\right]_0 = \ddot{r}\,.\,\vec{I} + \dot{r}\,.\,\omega\,.\,\vec{J} + \dot{r}\,.\,\omega\,.\,\vec{J} + r.\,\dot{\omega}\,.\,\vec{J} - r.\,\omega^2\,.\,\vec{I} = (\ddot{r} - r.\,\omega^2)\,.\,\vec{I} + (2.\,\dot{r}\,.\,\omega + r.\,\dot{\omega})\,.\,\vec{J}$$

Accélération absolue de G dans R_0