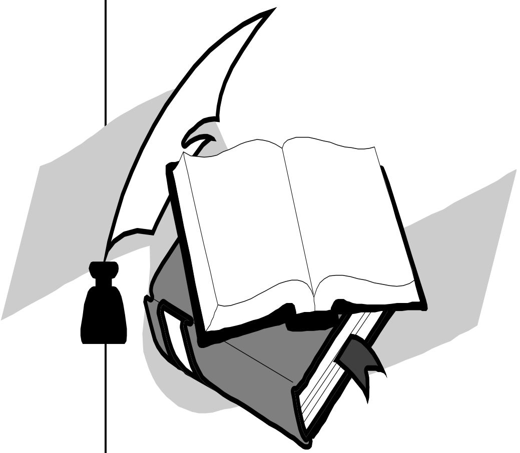
I.U.T. de REIMS

Département
TECHNIQUES DE COMMERCIALISATION



COURS de PROBABILITES

Finalité Tertiaire

Auteur : Jacky HUSSENET

SOMMAIRE

BIBLIOGRAPHIE :

Cours :
Collection de Mathématiques du CNED (tome 6) Editions Foucher ;

Résumés :
Statistique et probabilités de Larcher (DEGE) Editions Techniplus ;
Mathématiques de Truc (Etapes) BTS tertiaires Editions Nathan.

DENOMBREMENT

COURS

SITUATIONS

Rappel :

Factorielle de n : **n!** est le produit des n premiers nombres entiers.

Exemples :

Soit E un ensemble de deux éléments ; E = {a, b }.

Déterminer tous les sous-ensembles de E ; les dénombrer.

Déterminer toutes les suites d'un seul élément, de deux éléments, de trois éléments.
Déterminer tous les sous-ensembles d'un seul élément, de deux éléments, de trois éléments.

Situations :

L'observation d'un caractère x, sur une population se fait :
sur la population entière, sur un échantillon, sur un ensemble d'échantillons ;
l'échantillonnage doit être aléatoire ;
il peut être exhaustif (sans remise) ou non exhaustif (avec remise) .

Soit une urne avec n boules distnguées par un numéro ;
L'expérience consiste à tirer un échantillon de taille k ;
ce peut être avec ou sans remise , avec ou sans ordre.

1) Echantillons ordonnés avec remise :

ou arrangements avec répétition de n objets pris k à k.
a) Dénombrement de ces échantillons : $N=n^k$.

b) Exemples :
.) Soit à répartir k boules distinctes numérotées dans n cases différentes , chaque case pouvant recevoir de 0 à k boules .
Possibilité de considérer la suite des numéros des cases des k boules .
..) Considérer les applications de E={1,2,...,k} dans F={1,2,...,n}.
Card(A(E,F))= $N=n^k$.

...) Dénombrer l'ensemble des parties de E si Card(E)=n .
Par l'application caractéristique, Ý de E dans {0,1} et de l'exercice précédent on obtient $N=n^k$.

2) Echantillons ordonnés sans remise :

ou arrangements sans répétition de n objets pris k à k.

a) Dénombrement de ces échantillons : $N=A_n^k=(n!)/(n-k)!$.
cas particulier : k=n . Il s'agit de permutations. $N=P_n=n!$

b***) Exemples*** :
.) Soit à répartir k boules distinctes numérotées dans n cases différentes , chaqe case ne pouvant recevoir qu'au plus 1 boule .
..) Considérer les injections de E={1,2,...,k} dans F={1,2,...,n}.
$Card(A(E,F))= N=A_n^k=(n!)/(n-k)!$.

3) Echantillons non ordonnés sans remise :

ou combinaisons sans répétition de n objets pris k à k.

a) Dénombrement de ces échantillons : $N=C_n^k=A_n^k/k!=(n!)/((n-k)!k!)$.
car chacune de ces combinaisons peut être ordonnée de k! façons différentes .

b) Propriétés :
des coefficients ;
des sommes de ces coefficients ;
formule du binôme ;

c) Exercices :
Montrer que :
$A_n^n = P_n$; $C_n^p = A_n^p /(p!)$;
$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n$; $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$;

4) Applications :

a) Combien y-a-t-il d'entiers inférieurs à 10^p dont la somme des chiffres soit égale à 3 .
p chiffres sont disponibles car 1 suivi de p zéros ;
un 0 remplacé par un 3 : p possibilités ,
un 0 remplacé par un 1 et un autre par un 2 : A_p^2 possibilités ,
trois 0 remplacés par des 1 : C_p^3 possibilités ,
donc $N = p+A_p^2+C_p^3$.

b) Si E est un ensemble à n éléments, dénombrer le nombre de partitions de E .
Il faut faire décrire à X, toutes les parties de E, associées à leur complémentaire ;
Le nombre de parties de p éléments est 2^p ;
Le nombre cherché est $\Sigma C_n^p.2^p = (1+2)^n =3^n$

5) Echantillons non ordonnés avec remise :

ou combinaisons avec répétition de n objets pris k à k.

a) Dénombrement de ces échantillons :

xxx - - xx - - x - xx
a b c d e f

On considère les n objets {a,b,...,f}, d'où (n-1) cloisons (-) ,
et les k objets (x) , donc n+k-1 positions ;
N est le nombre de manières de placer les k objets sur les
n+k-1 positions ; $N=C_{n+k-1}{}^{k}$ = (n+k-1)!/[(k!)(n+k-1)!] .

REPRESENTATION de Situations :

Arbre :

Tableau :

Chemins :

Méthode : Dans le cas de processus discrets, les différentes possibilités sont schématisées par un graphe orienté. Chaque noeud correspond à un état ; une roulette y définit la probabilité d'accéder à l'état suivant.

Régles : La probabilité d'un chemin sur le graphe est égale au produit des probabilités des arcs qui le constituent ;
La probabilité de l'état d'arrivée est égale à la somme des probabilité des chemins qui y aboutissent.

Exemple : Trois urnes A, B, C contiennent six boules :
A, trois blanches et trois noires ;
B, quatre blanches et deux noires ;
C, cinq blanches et une noire ;
On tire une boule au hasard dans une urne quelconque ; on suppose l'équiprobabilité des tirages de boules et de choix d'urne. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche
Reprendre le problème si le choix des urnes A, B, C ont des probabilités respectivement de :
0,5 - 0,3 - 0,2 .

DEFINITIONS :

Soit E un ensemble de n éléments distincts ; card(E)= n ;

Factorielle de n : **n!** est le produit des n premiers nombres entiers.

Permutation :

toute suite finie (ordonnée) des n objets de E ;
ou tout ensemble ordonné formé des n éléments de E ;
c'est aussi une bijection de E .

Arrangement:

toute suite finie (ordonnée) de p objets de E ;
ou tout sous ensemble ordonné de E ayant p éléments;
c'est aussi une injection de {1,p} dans E .

Combinaison:

tout sous ensemble de E ayant p éléments ;
Exemples :
le tiercé dans l'ordre est un arrangement,
le tiercé dans le désordre est une combinaison .

Résultats :

$P_n = n!$; $A_n^p = n!/(n-p)!$; $C_n^p = n!/((p!).(n-p)!)$;

EXERCICES

Problèmes de dénombrement :

Simples: y associer la notion de probabilité

Ex 101 : De combien de façons peut-on ranger 3 boules rouges et 5 noires dans 8 cases avec une seule boule par case ;dans une même couleur, les boules sont identiques .

Re 1 : le rangement se ramène à celui de 3 boules rouges dans 8 cases;
$C_8^3 = C_8^5 = 56$ *.(Pédagogie Moderne synthèse p25)*

Ex 102 :
. Combien peut-on écrire de nombres différents de 3 chiffres impairs , avec répétition possible?
N=5.5.5
.. Combien peut-on écrire de nombres différents de 3 chiffres pairs , avec répétition possible?
N=4.5.5
...Combien peut-on écrire de nombres différents de 3 chiffres impairs sans répétition possible?
N=5.4.3
.... Combien peut-on écrire de nombres différents de 3 chiffres pairs sans répétition possible?
N=4.4.3

Ex 103 :
On considère un jeu de 32 cartes ; on tire 8 cartes .
. Combien y-a-t-il de mains possibles ? C_{32}^8
.. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 2 rois et 2 dames ?
$C_4^2 C_4^2 C_{24}^4$
... Combien y-a-t-il de mains contenant au moins 2 rois et 2 dames ?
trop long
.. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 2 trefle et 2 honneur ?
(T ou D , H ou B) donc 2HT.6BD+1HT.1HD.1BT.4BD+2HD.2BT.4BD

Ex 104 :
. Soit le mot "théorème" , avec les accents distingués ;
Combien y-a-t-il de permutations des lettres ? 8!
.. Soit le mot "THEOREME" , sans les accents distingués ;
Combien y-a-t-il de permutations des lettres ? 8!/3! .

T.P.

<u>TP 1320 A1.1</u> :

L'INSEE a lancé une enquête sur la proportion de fumeurs à partir d'un échantillon de 2000 personnes de plus de 18 ans.
Dans cet échantillon on a 55% de femmes ; on a constaté que 20% des femmes fument et que 430 hommes fument .

1° Déterminer la proportion de fumeurs chez les hommes.
2° Quelle est la proportion de fumeurs dans l'échantillon ?
3° Quelle est la proportion d'hommes chez les fumeurs ?

<u>TP 1310 A12</u> :

Parmi 2400 clients de comptes, on en a dénombré :
1260 qui ont un compte épargne logement, 500 qui ont un PEA et 353 qui on un CODEVI ;
On sait que 210 clients ont à la fois un CEL et un PEA, 164 ont un CEL et un CODEVI ,et 139 un PEA et un CODEVI ; enfin, 25 possèdent les trois sortes de comptes .

1° Représenter la situation dans un diagramme .
2° Déterminer le nombre de clients qui n'ont que leur compte courant.

<u>TP 1210 A13</u> :

Le chef d'un service de 15 personnes, 9 hommes et 6 femmes, doit constituer un bureau de 3 personnes .

1° Si le bureau est constitué d'un(e)président, d'un(e) trésorier, d'un(e) standardiste, combien de bureaux différents peut-il constituer ?
2° Combien de bureaux (groupe de 3 personnes) différents peut-il constituer ?
3° Combien de bureaux différents peut-il constituer si une femme est au standard?

<u>TP 1220 A14</u> :

A un examen, le candidat a un questionnaire à choix multiples (QCM) comportant 8 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses possibles dont une seule est correcte.
Le candidat envisage de répondre au hasard en ne cochant qu'une seule case à chaque question..

1° Combien y a-t-il de façons de remplir le questionnaire ?
2° Combien de grilles différentes possibles ne comporteront qu'une seule faute ?
3° Combien de grilles différentes possibles seront entièrement fausses ?
4° Combien de grilles différentes possibles auront au moins une bonne réponse ?

TP 1230 B21 :

Une classe comprend 12 filles et 4 garçons ;
I) On choisit successivement et au hasard trois élèves de la classe ;
envisager la répétition possible ou non .
1) On considère le problème avec remise :
Quel est le nombre de situations où ce sont toutes des filles ?
Quel est le nombre de situations où le second est un garçon ?
Quel est le nombre de situations où l'on a choisi deux filles ?
2) Reprendre le problème sans remise :

II) Reprendre le problème en effectuant un tirage simultané ;

TP C 4 : Ex 1240 :

Dans une course du tiercé, 20 chevaux prennent le départ ; un joueur joue un tiercé dans l'ordre ;

1) Combien y a-t-il d'arrivées possibles de tous les chevaux ? (sans ex aequo)
2) Combien le joueur a-t-il de façons de remplir sa grille ?
Combien doit-il dépenser pour jouer tous ces tiercés ?
3) Quel sera son gain si le tiercé rapporte 8 500 F dans l'ordre et 1 700 F dans le désordre.?

GENERALITES SUR LES PROBABILITES

PLAN :

Vocabulaire :

Définitions ; Comparaison ;

Probabilité d'un phénomène :

Calcul de probabilités :

Situations :

Indépendance ; Produit ;Conditionnelle ;

Objectifs :

De cours :

Notion d'épreuve, d'événement, d'univers .
Notion de probabilité .
Vocabulaire des événements .
Axiomes des probabilités .
Probabilité d'événements (Probabilités totales, Conditionnelles)
Evénements indépendants, liés, Probabilités composées .

Ce qu'il faut savoir :

Evoluer progressivement de la notion élémentaire de probabilités (fréquentiste) vers la définition mathématique (plus générale).

Connaître les définitions et théorèmes avant de chercher à les appliquer en respectant leurs conditions .

COURS :

NOTION :

Exemples ;

Evénements contraires , incompatibles ;

Opérations sur les événements : réunion , intersection .

VOCABULAIRE :

Définitions **: Soit une expérience ;**

une **éventualité** est un résultat possible ou possibilité ;

l'**univers** est l'ensemble des éventualités ,noté Ω ;
une éventualité est appelé événement élémentaire ,noté e_i ; un événement est une partie de Ω ;

Ω ,élément de $\boldsymbol{P(\Omega)}$, est appelé **événement certain**;
ϕ, élément de $P(\Omega)$, est appelé **événement impossible** ;

des **événements contraires** sont associés à des parties complémentaires dans Ω ;
des **événements incompatibles** sont associés à des parties d'intersection vide .

Exemples :

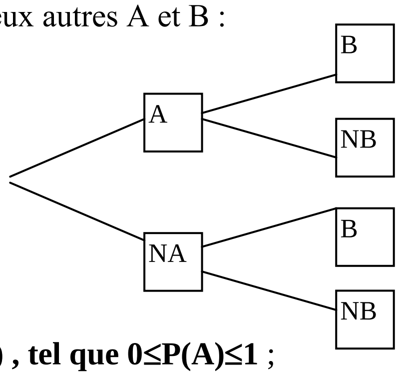
PROBABILITE D'UN PHENOMENE :

Soit Ω un univers fini d'éventualités ;

notion :

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles .
On cherchera la probabilité d'événements fonction de deux autres A et B :

	A	NA
B	A et B	NA et B
NB	A et NB	NA et NB



définition :

La probabilité d'un événement A est un nombre P(A) , tel que $0 \leq P(A) \leq 1$;
c'est l'image d'une application p telle que
p : $P(\Omega)$-->[0,1]
qui vérifie **$p(\Omega)=1$ et $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$ si $A \cap B=\phi$**.
p est définie sur $P(\Omega)$ par la connaissance des probabilités des événements élémentaires .

propriétés :

$p(A)+p(/A) = 1$; $p(\phi)=0$; ACB => $p(A) \leq p(B)$;

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B) .$$

CALCUL de PROBABILITE :

But :

C'est de calculer les probabilités d'événements déduites des probabilités d'événements plus simples connus.
Soit p une probabilité sur Ω ,on a : $p(A)+p(B) = p(A \cup B)+p(A \cap B)$.
d'où : **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$** ;

si les événements sont incompatibles , $A \cap B = \phi$, $p(A \cap B)=0$, et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Situations :

Indépendance : deux événements A et B sont indépendants pour la loi de probabilité p, si et seulement si **$p(A \cap B)=p(A).p(B)$** .

Conditionnelle : **$p(A \cap B) = p(A) .p_A(B)$** , d'où **$p_A(B) = p(A \cap B)/p(A)$** ;
(cas d'un événement réalisé par la succession de 2 événements
formule de Bayes :

EXERCICES :

1) <u>Exercices</u> 201 :a) (303 p27 Trignan TS)
Un jeu de cubes se compose de 13 cubes noirs et de 2 cubes rouges.
Combien faut-il en prendre simultanément pour que la probabilité d'avoir au moins un cube rouge soit supérieure à 6/7 ?

On cherche la probabilité de ne pas avoir de cube rouge en tirant x cubes ; $p(/A) = C_{13}^{x}/C_{15}^{x}$;
$p(A)= 1-(15-x)(14-x)/(15*14) > 6/7$;*d'où* $x>9$.

b) (Pédagogie Moderne p22 TC)
Un tireur à 2 chances sur 3 d'atteindre sa cible à chaque tir .
Combien de balles doit-on lui donner pour avoir au moins 99 chances sur 100 que la cible soit atteinte ?

On considère l'événement contraire /A ; $p(/A) = 1/100$; $p(/A) = (1/3)^{n}$; n=5 .

2) <u>Exercices</u> 202: (Ex p182 Faure BTS)
Dans un lot de 32 pièces, 8 ont subi un contrôle C1, et 12 un contrôle C2 ; 3 ont subi les deux contrôles .

. Quelle est la probabilité que deux pièces prises au hasard aient subies toutes deux le contrôle C1 ou toutes deux le contrôle C2 ?

On considère l'étude sur les deux pièces ;
A :les 2 produits contrôlés par C1 ,
B :les 2 produits contrôlés par C2 ,
$P(A)=C_8^{2}/C_{32}^{2}$, $P(B)=C_{12}^{2}/C_{32}^{2}$,$P(A´B)=C_3^{2}/C_{32}^{2}$;
$P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A´B) = 0,18$.

		C1	O	N	T
C2	O	3	9	12	
	N	5	15	20	
	T	8	24	32	

. Quelle est la probabilité que deux pièces prises au hasard aient subies toutes deux au moins un contrôle ?

Pour chercher la probabilité que les 2 pièces aient subi au moins un contrôle, chercher la probabilité qu'elles n'en aient subies aucun .

3) <u>Exercices</u> 203: (Pédagogie Moderne p22 TC)
Un collège universitaire contient 70% de filles et 30% de garçons; 60% des filles étudient l'anglais , ainsi que 80% des garçons .
Le professeur d'anglais tire la fiche de "Dominique Dupont";
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?

Faire un tableau des 4 possibilités ;
$P(F)=7/10$, $P(G)=3/10$; $P(A/F)=6/10$, $P(A/G)=8/10$;
$P(A)=66/100$; *Le pb est de calculer* $P(F/A)$;
Le faire d'après le tableau ,
ou d'après le cours $p(A\cap B)=p(A)*p_A(B)=p(B)*p_B(A)$;
donc $P(F)*P(A/F)=P(A)*P(F/A)$ *et* $P(A)=P(A\cap F)+P(A\cap G)$;
$P(F/A) = 7/11$.

4 <u>Indépendance</u> Ex 204: Application de la loi Binomiale : (Ex TD Gourion p248)

a On considère une famille de 2 enfants;

On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon ou d'une fille est de 1/2 .

Soit A ,l'événement :"la famille a des enfants des deux sexes";

et B :"la famille a au plus une fille" ;

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Chaque naissance est une épreuve de Bernouilli ;

Soit X le nombre de Garçons ;

$P(A)=P(X=1) = C_2^1(1/2).(1/2) = 1/2$;

$P(B)=P(X\#0) = 1 - P(X=0) = 3/4$.

$A\cap B=A$; $P(A\cap B) \# P(A).P(B)$;*A et B sont dépendants .*

b On considère une famille de 3 enfants;

On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon ou d'une fille est de 1/2 .

Soit A ,l'événement :"la famille a des enfants des deux sexes";

et B :"la famille a au plus une fille" ;

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Chaque naissance est une épreuve de Bernouilli ;

Soit X le nombre de Garçons ;

$P(A)=P(X=1ou\ X=2) = C_3^1(1/2)^1.(1/2)^2 +C_3^2(1/2)^2.(1/2) = 6/8$;

$P(B)=P(X\#0\text{ et }X\#1) = 1 - P(X=0) -P(X=1)) = 1/2$.

$A\cap B=A$; $P(A\cap B) = P(A).P(B)$;*A et B sont indépendants .*

PROBLEMES :

1) Problème du coffre : (TP4 p88 Transmath TC)

Pour ouvrir un coffre-fort ,on dispose de quatre boutons à positionner sur un des dix chiffres ;le coffre ne s'ouvre que sur une position déterminée des quatre boutons .

. Quelle est la probabilité pour qu'un voleur qui ne connaît pas la combinaison du coffre , l'ouvre au premier essai .

Si le coffre est muni d'une alarme déclenchée si l'un au moinsdes boutons est positionné sur 8 .

Calculer la probabilité pour que le voleur déclenche l'alarme à son premier essai .

. Par une indiscrétion ,le voleur sait que le premier chiffre de la combinaison est un multiple non nul de 3 .

Quelle est sa probabilité d'ouvrir le coffre du premier coup ?

. Il sait de plus que les chiffres de la combinaison sont 1,3,4,6.

Quelle est sa probabilité d'ouvrir le coffre du premier coup ?

$N=10^4$, $n=1$;
Pas de 8 : $N=9^4$, au moins un 8 : $P=1-P$;
Nb possible : $3*10^3$;
Nb possible : $2 * 3!$ car le 1er est 3 ou 6 .

2) Pb de l'examen :

(Lespinard p241 TD)

On considère un examen de deux épreuves où une note inférieure à 4 est éliminatoire.

Il y a 200 candidats . 130 candidats sont éliminés à l'écrit , 20 à l'oral , et donc 50 sont reçus .

Déterminer les probabilités d'être : éliminé à l'écrit , à l'oral , d'être reçu .

. Parmi les échecs à l'écrit , 30 ont obtenu une note éliminatoire en français, 25 en mathématiques et 80 n'ont pas eu de note éliminatoire ;

Déterminer la probabilité d'être éliminé par au moins une note éliminatoire .

(distinguer la probabilité d'un candidat ,de celle d'un candidat éliminé)

. *$P(E)=13/20$, $P(O)=1/10$, $P(R)=5/20$;*
Proba d'être recalé : $15/20 = P(E)+P(O)$;

. *$N(F)=30$, $N(M)=25$, $N(B)=80$, $N(E)=50$ ¾$N(F)+N(M)$;*
$N(E)=N(F)+N(M)-N(F\cap M)$.

T.P. Cours

TPA 1440 2 1 : Problème de dé :

Si je lance un dé à six faces, je relève le résultat visible.

1° Quels sont les résultats possibles ?

2° Quelles sont les probabilités d'obtenir un six, un chiffre pair, un multiple de trois, un multiple de deux ou de trois ?

TP C 6 : Ex 1360 :

TP E1.4 Le dé :

a) Le dé pipé : (Ex 10 et 11 Demissy p92 TD)
Un dé a été truqué de façon que les probabilités d'apparition des faces vérifient :$p(3)=p(5)=p(6)/6=p(1)/6$ et $p(2)=p(4)=3/2.p(1)$;
. Calculer les probabilités de chacune des éventualités .
. Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :

(A) : Obtenir un chiffre pair ;
(B) : Obtenir un diviseur de 8 ;
(C) : Obtenir un diviseur pair de 8 ;
(D) : Obtenir un carré parfait ;
(E) : Obtenir un carré parfait pair .

b) Reprendre le même problème avec un dé régulier (normal).

TP 1420 A 2 2 : Lancer de pièce :

Une pièce est lancée deux fois de suite.

1° Déterminer tous les résultats possibles ?

2° Préciser la probabilité de chaque éventualité .

TPA 1430 2 3 : Machine à écrire :

Un enfant tape trois lettres "au hasard " sur une machine à écrire (clavier limité aux 26 lettres) .
A) Si la même lettre peut être répétée,

1° Déterminer la probabilité d'écrire le mot : " IUT" .
2° Déterminer la probabilité d'obtenir les lettres de : " IUT" .

B) Etudier le même problème sans répétition possible d'une lettre.

TP D 4 : : Ex 1440

Une urne contient 9 boules, 4 blanches, 3 noires, 2 rouges ; on tire trois boules .
Déterminer les probabilités d’obtenir ((avec ou sans remise), (avec ou sans ordre)) :

trois boules de la même couleur,
trois boules de couleurs différentes ?

T.P.

TP 1510 B 2.1 :

Trois responsables A, B , C peuvent signer des contrats pour leur entreprise .
Ils étudient respectivement 40%, 35%, 25% des contrats étudiés par l'entreprise .
Le taux de réussite (rapport du nombre de contrats signés par celui de contrats étudiés) de chacun des responsables est, respectivement, de 60%, 65%, 75% .

1° Quel est le nombre de contrats signés par A si l'entreprise étudie 2000 contrats ?
2° Quel est le pourcentage de signatures de contrats réussies par rapport au nombre de marchés étudiés par l'entreprise ?
3° Sachant qu'un contrat est signé, quelle est la probabilité qu'il l'ait été par A ?

TP 1520 B 2.1 :

Dans une entreprise, le procédé de contrôle de la production est tel que l'on a une probabilité de 0,05 d'accepter un objet défectueux, et 0,03 est celle de rebuter un objet de qualité .

1° Quelle est la probabilité de rebuter un objet défectueux ?
(c'est-à dire la probabilité de rebuter un objet sachant qu'il est defectueux)
2° Dans un lot soumis au contrôle, le pourcentage d'objets défectueux est de 6% ;
quel sera le pourcentage d'objets que rebutera le contrôle ?
quel sera le pourcentage d'objets acceptés qui seront défectueux ?

T.P.

TP 1530 C 2.1 :

Au cours d'un apprentissage, un sujet essaie, deux fois de suite, de réaliser une tâche.
1a) A chaque tentative, la probabilité d'un échec est de 0,4 .
Calculer la probabilité de réussir l'épreuve au moins une fois.
Calculer la probabilité de réussir l'épreuve une seule fois.
b) Reprendre le même problème en effectuant trois essais.

2) On suppose maintenant que le sujet tire la leçon des essais précédents de la façon suivante :
la probabilité d'un échec est toujours de 0,4 au premier essai,
mais de 0,3 si le précédent est déjà un échec et de 0,2 si le précédent est un succès.

TP cf * 1230 C 2.2 :

Une classe comprend 12 filles et 4 garçons ;
1) On choisit simultanément au hasard trois élèves de la classe ;
Quelle est la probabilité que ce soient toutes des filles ?
Que le second soit un garçon ?

2) Reprendre le problème en effectuant un tirage successif .

T.P.

TPD :

EX 1610 :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie ;
Soit A l'événement : " Obtenir au moins deux fois Face " ;
B l'événement : " Obtenir Face au troisième lancer " .
1° Déterminer l'univers, A, B, $A \vee B$, $A \wedge B$;
2° Déterminer les probabilités de ces événements.

EX 1620 :

Une loterie comporte 10 billets dont 2 gagnants ; vous avez acheté 3 billets .
Déterminer les probabilités de gagner 2 lots, 1 lot ou de perdre .

EX 1630 :

Un groupe d'enfants a regardé la télévision. Un test est posé, il y a autant de filles que de garçons. 25% des garçons ont répondu avoir été effrayés et 44% des filles .
Un enfant est choisi au hasard dans le groupe ; calculer la probabilité :
que l'enfant ait été effrayé,
que l'enfant soit une fille sachant qu'il a été effrayé,
qu'il n'ait pas été effrayé sachant que c'est une fille .

Même problème en changeant la proportion de filles .

EX 1640 :

Dans une classe de 30 élèves de 12 garçons, 10 filles étudient le latin avec 8 garçons ;
Soit A l'événement l'élève est une fille, B l'élève étudie le latin ;
1° un élève est choisi au hasard, déterminer la probabilité que ce soit :
une fille, un élève latiniste, une fille qui étudie le latin .
2° Les événements A et B étudiés sont-ils indépendants ?

EX 1650 :

Un sac contient 3 boules noires et 5 blanches ;
On tire trois boules successivement et sans remise.
Déterminer la probabilité que la deuxième boule soit blanche , que la troisième le soit .

LOI DE PROBABILITE

PLAN :

Variable aléatoire :

Notion ; Définition ; Exemple ; Opérations ;

Probabilité image d'un aléa :

Notion ; Définition ; Notation ; Remarque ; Exemples ;

Loi de probabilité :

Définition ; Exemple ; Fonction de répartition (notion, définition, propriétés) ;
Applications ;

Généralisation :

Couple de variables aléatoires : (exemple, définition, propriétés, exemple) ;
Variable aléatoire continue ;

Objectifs :

Passer de la notion de probabilité d'un événement à celle d'une grandeur associée et inversement ;
Distinguer une variable aléatoire discrète ou continue.
Préciser la notion de variable aléatoire, de loi de probabilité.
Définir une loi de probabilité sur une v.a. ;
Calculer ler paramètres caractéristiques d'une loi de probabilité sur une v.a. ;
Représenter les fonctions de densité et de répartition d'une v.a. discrète ;
Notion de fonction de répartition d'une v.a. continue .

COURS :

I VARIABLE ALEATOIRE :

1) Notion :

On appelle variable aléatoire discrète définie sur Ω ,une grandeur X qui prend un nombre fini de valeurs x_i à qui on associera une probabilité p_i .

Exemple :
On tire successivement ,avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R ,une verte V, une blanche B .
On gagne 1F avec R , 2F avec V , on perd 3F avec B .
Quels sont les gains possibles ? Définir la v.a. X .

2) Définition :

On appelle **variable aléatoire** numérique définie sur Ω , toute application X de Ω sur R .

3) Exemples :

a) On définit Y à partir de l'exemple précédent par un gain de 2F si les deux boules sont de même couleur, et une perte de 1F dans les autres cas. Définir Y .
b) Soit un jeu de 52 cartes ;on tire une carte; on compte les points d'honneur comme au bridge ;
A 4 , R 3 , D 2 , V 1 , 0 pour les autres , Déterminer la probabilité d'obtenir 3 , P(X=3) .

4) Opérations :

Si X et Y sont 2 v.a.., Z=X+Y ou Z=X*Y est aussi une v.a. .

II PROBABILITE IMAGE d'un ALEA :

1) Notion :

On reprend l'exemple du I : *(préférer un ex d'équiprobabilité :pile ou face ?)*
On tire successivement, avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R , une verte V, une blanche B . On gagne 1F avec R , 2F avec V , on perd 3F avec B .
On suppose l'équiprobabilité des tirages ordonnés .

Définir l'événement A = "obtenir au moins un vert, sans blanc".
Calculer la probabilité de A .
Chercher l'image de A par X ,V.A. définie au I .
Proposer la loi de probabilité p' sur X(A) .

2) Définition :

Soit p une probabilité sur $P(\Omega)$; ou sur $(\Omega, P(\Omega), p)$,un espace probabilisé.
Soit X une V.A. définie sur Ω .
On définit p' une probabilité sur $P(X(\Omega))$ par **p'(X(A))=p(A)** .

3) Notation :

$p'(\{3\}) = p(\{e_i / X(e_i)=3\}) = p(X=3)$. $p'(\{X=t\}) = p(X=t)$.
p' , probabilité image , est la loi de probabilité de X .

4) Remarque :

Pour définir une loi de probabilité d'une V.A. X ,sur Ω ,il faut :

bien connaître p ,probabilité sur Ω , faire l'inventaire des valeurs prises par X , $X(\Omega)$,
cerner l'événement qui correspond à chaque valeur de X,
faire un tableau pour vérifier que $\Sigma p(t)=1$.

5) Exemples :

Soit un jeu de 52 cartes ;on tire deux cartes ;
On compte les points d'honneur comme au bridge ; A 4 , R 3 , D 2 , V 1 , 0 pour les autres . ;
On appelle X la V.A. qui, à chaque événement, fait correspondre la somme des valeurs attribuées .
On cherche à déterminer la probabilité d'obtenir 3 , P(X=3) .

Déterminer la probabilité d'obtenir une dame et un valet .
Déterminer les valeurs prises par X .
Déterminer P(X=3) , P(X=t) .

III LOI DE PROBABILITE :

1) Définition :

C'est la donnée ou la connaissance de tous les couples (x_i,p_i) ;

On appelle **loi de probabilité ou distribution** de la v.a. X , l'application f de X(Ω) dans [0,1] définie par **f(t)=p(X=t)** .

2) Exemple :

On reprend l'exemple du II :
On tire successivement , avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R , une verte V, une blanche B .
On gagne 1F avec R ,2F avec V ,on perd 3F avec B .; on suppose l'équiprobabilité des tirages .
On appelle X la V.A. qui, à chaque événement, fait correspondre la somme des valeurs attribuées .
Définir X(Ω) puis f .

Dans le cas de grands nombres , f(x) peut être assimilée à la fréquence .

3) Fonction de répartition :

a) notion : on conserve l'exemple précédent . Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 0 ?

b) Définition : La **fonction de répartition** de la V.A. X est l'application F de R dans [0,1] telle que **F(t) = P(X<t)** .

c) Propriétés :
$P(a\leq X<b) = F(b)-F(a)$; $P(X>=b)=1-F(b)$.
F(R)=[0,1] ; F est croissante ;
F est une fonction en escalier dans le cas d'une v.a.. discrète ;
F est continue à gauche en tout point de R .

4) Applications :

IV GENERALISATION :

1) Couple de variables aléatoires :

a) exemple : Si X et Y sont 2 V.A., Z=(X,Y) est aussi une V.A. ;

b) définition :

On appelle loi conjointe du couple (X,Y) ,l'application q, telle que $q((x_i,y_j))=p(X=x_i,Y=y_j)$.

c) propriétés :

X et Y sont indépendantes pour la loi p si , pour tout couple (i,j), on a :
$P(X=x_i, \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$.

X et Y sont indépendantes si les événements $X=x_i$ et $Y=y_j$ le sont.

d) exemple : On jette un dé ;

X est telle que $X(e_i)= 0$ si e_i est pair, 1 si e_i est impair ;
Y est telle que $Y(e_i)= 0$ si $e_i =k.3$, 1 sinon ;
Calculer p(X=1,Y=0) .

2) Variable aléatoire continue :

RESUME

Cas de variables aléatoires discrètes :

Idée :

Comme en statistique, une valeur du caractère X est associée à un nombre, sa probabilité, par analogie à sa fréquence.

Situation :

A une loterie, 100 billets sont mis en vente. Il y a 5 lots gagnants de 1000F, 10 de 500F, 15 autres de 200F et 20 de 100F. Tout est vendu, un billet sur deux est perdant.
On achète un seul billet ; combien peut-on ganer ?
Le gain dépend du tirage, c'est une variable aléatoire.
Définir la fonction de distribution, la représenter.
En représenter le cumul.

Loi de probabilité :

Une grandeur X, v.a. , est associée au résultat d'une expérience ;
La probabilité que la v.a. prenne une valeur particulière k est la somme des probabilités des événements qui réalisent X=k.

Pour définir une loi de probabilité d'une V.A. X ,sur Ω ,il faut :
bien connaître p ,probabilité sur Ω , faire l'inventaire des valeurs prises par X , $X(\Omega)$,
cerner l'événement qui correspond à chaque valeur de X,
faire un tableau pour vérifier que $\boldsymbol{\Sigma p(t)=1}$.

Fonction de répartition :

La fonction de répartition de X est la fonction F définie de R dans [0,1] telle que $\mathbf{F(t) = P(X<t)}$.

Caractéristiques :

Espérance de X : $\mathbf{E(X) = X = m = \Sigma p_i.x_i}$. cas de l'exemple : 150F
Variance de X : $\mathbf{V(X)=E((X-m)^2)}$; $\mathbf{V(X)=\Sigma p_i.(x_i-m)^2}$ cas de l'exemple :
Ecart-type de X : $\boldsymbol{\sigma=\sqrt{V(X)}}$

Exercices

a) **Cas d'un dé** lancé une seule fois : $E(X) = 3,5$ $V(X) = 2,9$ $\sigma = 1,7$;

b) **Nombre de ventes** :

Un fabricant estime le nombre de ses ventes par jour :

Nombre de ventes	0	1	2	3	4	5
probabilité	0,10	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10

Définir la fonction de répartition ;
Représenter la loi de probabilité par la courbe de distribution ;
Représenter la courbe de répartition ;
Calculer les caractéristiques de la loi.

Couple de variables aléatoires discrètes :

Exemple :

Un fabricant vend des articles A et B ; la vente d'un article A rapporte 100F, celle de B 200F .
Le nombre d'articles vendus par jour varie de 0 à 3 pour A et de 0 à 2 pour B.
Soient X et Y les v.a. associées aux gains respectivement de A et B .
Donner les valeurs prises par X et par Y .
La loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée dans le tableau :

X / Y	0	100	200	300	Loi de Y
0	0,02	0,04	0,10	0,04	
200	0,05	0,15	0,15	0,05	
400	0,02	0,20	0,10	0,08	
Loi de X					

Quelle est la probabilité que X=100 et Y=400 ? Que X=100 ?

Définir la loi de probabilité de Z = X+Y . Calculer ses caractéristiques.
Remarques ?

Reprendre l'exemple précédent en ne considérant que les lois marginales de X et de Y et en admettant que les ventes des articles A et B sont indépendantes.

Indépendance de v.a. :

Définition :

Propriétés de la somme de v.a. :

$E(a.X+bY+c) = a.E(X) + b.E(Y) + c$ toujours .
$V(a.X+bY+c) = a^2.V(X) + b^2.V(Y)$ si X et Y sont des v.a. indépendantes.

application :

Etudier la loi de somme des poits obtenus en lançant deux dés .
faire une étude directe ;
vérifier les propriétés de la somme de v.a..

EXERCICES :

V EXEMPLES :

1) Ex du Cours :

On tire successivement ,avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R , une verte V , et une blanche B . .

a) On gagne 1F avec R , 2F avec V , on perd 3F avec B
Quels sont les gains possibles ? Définir la V.A. X représentant le gain .

b)On définit Y à partir de l'exemple précédent par un gain de 2F si les deux boules sont de même couleur, et une perte de 1F dans les autres cas . Définir Y .

c)On revient au cas initial ; On suppose l'équiprobabilité des tirages ordonnés .
. Définir l'événement A = "obtenir au moins un vert ,sans blanc".
. Calculer la probabilité de A .
. Chercher l'image de A par X ,V.A. définie au I .
. Proposer la probabilité p' de X(A) .

d)On appelle X la V.A. qui ,à chaque événement, fait correspondre la somme des valeurs attribuées .
Définir X(Ω), puis f, la loi de probabilité de X .

e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 0 ?
Que peut-on espérer gagner ?

Zi	-6	-2	-1	2	3	4	Total
pi	1/9	2/9	2/9	1/9	2/9	1/9	1
pi*Zi							0

2) Pile ou face :

On lance une pièce 3 fois de suite ; On compte le nombre de Pile obtenus .
Définir la loi de probabilité .

Faire un arbre .
$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$; $p_i=1/8,3/8,3/8,1/8$.

3) Lancer de pièce :

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir soit F soit 5 P . On compte le nombre de lancers ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition .

Faire un arbre des expériences .
$X(\Omega)=\{1,2,3,4,5\}$. $P_i=1/2,1/4,1/8,1/16,1/16$. $F(X<k)= 0, 1/2, 3/4$, ...

4) Jeu de dés :

a) On lance 2 dés ; on compte la somme des points ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition .

Déterminer l'espérance mathématique de X .

Faire un tableau carré pour dénombrer toutes les possibilités.
$X(\Omega)=\{2,3,...,11,12\}$;$P_i= 1/36 ,2/36, 3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,...,1/36$.

$X=7$ *et* $V(X)=5,83$.
Considérer $X=A+B$ *comme au IV 4 de Proba2 .*

b) Reprendre le même problème en considérant le sup des points .

Faire un tableau carré pour dénombrer toutes les possibilités.
$X(\Omega)=\{1/36,3/36,5/36,7/36,9/36,11/36 \}$

c) Deux dés A et B sont tels que : A possède 2 faces 1, 3, 5 , et B 2 ,4 ,4 ,6 ,6 ,6 ;
On lance 2 dés ; on compte la somme des points ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition .
Déterminer l'espérance mathématique de X .

On ne peut obtenir que 3 , 5 , 7 , 9 , 11 *avec une probabilité de* 1 , 3 , 6 , 5 , 3 / 18 .
$X = (3+15+42+45+33) /18 =$. *ou* $X=A+B$.

5) Ex :

Soit un jeu de 52 cartes ;on tire une carte ; on compte les points d'honneur comme au bridge ;
A 4 , R 3 , D 2 , V 1 , 0 pour les autres .
Déterminer la probabilité d'obtenir k , P(X=k) .
Que peut-on espérer obtenir ?

$p_i= 1/13$, $p_0=9/13$, $X=10/13=\Sigma p_i x_i$.

T.P.

T.P.B 3.1 :

Une urne contient 5 boules rouges et trois boules blanches ;
un joueur a le choix entre deux jeux :

Jeu 1 : le joueur tire simultanément 2 boules de l'urne ;

Jeu 2 : le joueur tire successivement les deux boules avec remise ;

Dans les deux cas, si les deux boules sont rouges, il perd 3F,
si les deux boules sont blanches, il perd 10F,
si les couleurs sont différentes, il gagne 4F ;

Soient X et Y les variables aléatoires respectives des gains du joueur des deux jeux .

Donner les lois de probabilité de X et de Y ;

Quel est le jeu le plus intéressant pour le joueur ?

T.P.B 3.2 :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie ;
On note, dans l'ordre, les piles et faces obtenus ;
Soit X la variable aléatoire des nombres de "face" obtenue;

1° Donner la loi de probabilité de X ,
Représenter sa fonction de répartition,
Calculer ses caractéristiques .

2° Deux personnes, A et B jouent ainsi sur trois lancers :
si le nombre de face "face" est 1 ou 3, B donne 2F à A,
si le nombre de "face" est 2, A donne 4F à B,
le jeu est nul si le nombre de "face" est 0 .
Soit Y la variable aléatoire du Gain de A .
Donner la loi de probabilité de Y ,
Calculer ses caractéristiques .
Le jeu est-il équitable ?

T.P.B 3.3 :

Les trois commerciaux d'une entreprise ont respectivement une probabilité de 0,1 - 0,2 - 0,3 de conclure un contrat chaque jour ouvrable .
La probabilité, pour chacun d'eux, de signer plusieurs contrats est nulle .
Soit X la variable aléatoire du nombre de contrats signés pour l'entreprise un jour donné ;
Quelle est la probabilité de signer : 0 , 1 , 2 ou 3 contrat(s), au moins un contrat ?
Déterminer la loi de X .

ESPERANCE MATHEMATIQUE - VARIANCE

PLAN

I MOYENNE :

1) Notion
2) Définition :
3) Remarque :
4) Exemples :
5) Propriétés :

II VARIANCE :

1) Définition :
2) Remarques :
3) Exemples :
4) Propriétés :
5) Généralisation : Moment d'ordre n ;

III INEGALITE de BIENAYME-TCHEBICHEFF :

1) Situation :
2) Démonstration :
3) Résultat :
4) Exemple :

OBJECTIFS

OBJECTIFS du chapitre Variable Aléatoire :

Représenter graphiquement la loi de probabilité et sa fonction de répartition.
Calculer les principaux paramètres d'une loi de probabilité.
Donner la signification de l'espérance, de l'écart-type d'une v.a. .
Connaître les propriétés associées à l'espérance et la variance d'une v.a. .

COURS :ESPERANCE MATHEMATIQUE - VARIANCE

I MOYENNE :

1) Notion :

Au jeu de bridge, on compte les points d'honneur , à raison de:
4 pour un as, 3 pour un roi , 2 pour une dame , 1 pour un valet et 0 pour les autres .
Les probabilités sont de 1/13 de tirer un honneur et 9/13 .de tirer une fausse .
Que peut-on espérer obtenir en ne tirant qu'une carte ?
La moyenne ou espérance mathématique sera la valeur la plus probable.

2) Définition :

a) Soit X , une variable aléatoire discrète qui peut prendre les valeurs (x_i) avec les probabilités_p_i, on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X)= X = \Sigma p_i.x_i$.
Si la variable aléatoire est de loi de probabilité f, $\mathbf{E(X) = \Sigma f(x_i).x_i}$.

b) Si la variable aléatoire est continue, de loi de probabilité f, $\mathbf{E(X) = \int x.f(x).dx}$.

3) Remarques :

E(X) est le barycentre des x_i , ou moment d'ordre 1 . Si E(X)=0 ,on dit que la v.a. X est centrée .

4) Exemples :

5) Propriétés :

Σ et $\int$ ont les mêmes propriétés,
donc les résultats sont identiques pour les variables discrètes ou continues .:

a) Si $f \leq g$ alors $\Sigma f(x_i) \leq \Sigma g(x_i)$, donc $|E(X)| \leq E(|X|)$.

b) Si Y=k , E(X)= k .

c) Si Y=aX , E(aX)=a.E(X) .

d) Si Z=X+Y , E(X+Y)=E(X)+E(Y) .

e) Si Z=X.Y , et si X et Y sont indépendantes , E(X.Y)=E(X).E(Y) .

f) Si Z=X+k , E(X+k)=E(X)+k , et E(X-E(X))=0 .

II VARIANCE :

Remarquer l'analogie avec les statistiques ;
Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, m=E(X) son espérance mathématique;

1) Définition :

On appelle variance ou moment centré d'ordre 2 , $\mathbf{V(X)=E((X-m)^2)}$ **;** $\mathbf{V(X)=\Sigma p_i.(x_i-m)^2}$.
$\boldsymbol{\sigma=\sqrt{V(X)}}$ est l'écart type de X .

2) Remarques : $\mathbf{V(X) = E(X^2)-E(X)^2}$;

3) Exemples :

Au jeu de bridge, on compte les points d'honneur ,à raison de:
4 pour un as, 3 pour un roi ,2 pour une dame ,1 pour un valet et 0 pour les autres .
Les probabilités sont de 1/13 de tirer un honneur et 9/13 .de tirer une fausse .
E(X)=10/13 ; Déterminer V(X) et σ_X .

4) Propriétés :

a) $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$;

b) $V(kX)=k^2.V(X)$;

c) $V(X+k)=V(X)$;

d) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ si X et Y sont indépendantes .

5) Généralisation :

Moment d'ordre n ;

$M_n = \Sigma p_i.x_i^n$, ou $M_n = \int x^n.f(x).dx$. E(X) = M_1 , V(X) = M_2(X-m) .

III INEGALITE de BIENAYME-TCHEBICHEFF : (1821-1894)

1) Situation :

X une v.a. discrète, $m=E(X)=\Sigma p_i x_i$, $\sigma^2=V(X)=\Sigma p_i(x_i-m)^2$.
On recherche les indices tels que xi s'écarte de m de plus de $k\sigma$;
$\sigma^2=V(X)=\Sigma p_i(x_i-m)^2 \geq \Sigma p_j k^2\sigma^2 = k^2\sigma^2.\Sigma p_j$, d'où : $\mathbf{\Sigma p_j = P(|X-m| \geq k\sigma) \leq 1/k^2}$.

2) Démonstration :

dans le cas continu (Lespinard p256)

3) Résultat :

$\mathbf{P(|X-m| \geq k\sigma) \leq 1/k^2}$

Remarque : relation inutile si k<1 ; intérêt uniquement si k>1 ,
et ce **indépendamment de la loi de probabilité** .

4) Exemple :

On jette un dé ;soit X la v.a. des points de chute .
Calculer m=E(X) .et σ^2 . (m=7/2 , V=35/12)).
D'où $P(|X-7/2|>3,4) \leq 1/4$; en fait, $|X-7/2|>3,4$ si x=0 ou 7 ce qui est impossible .
Si $k=\sqrt{2}$, $P(|X-7/2|X>2,43) \leq 1/2$; en fait P=1/3 .

IV EXERCICE :

1) Ex:

On extrait ,avec remise à chaque tirage ,6 boules d'une urne qui contient des boules B et N , en nombres égaux . On marque 2 points pour une boule B et 5 pour une N .
On considère S la somme des points obtenus .
a) Déterminer la loi de distribution , E(S) , $\sigma(S)$.
b) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, majorer la probabilité que :
|S-E(S)| soit supérieure à a ,avec a=5 , a=10 .
c) En utilisant la loi de probabilité , calculer les probabilités considérées au b) .

a *$S(\Omega)=\{12,15,18,21,24,27,30\}$;*
p_i = 1/64 , 6/64 , 15/64 , 20/64 , 15/64 , 6/64 , 1/64 .
$E(S)=\Sigma p_i.x_i=21$; $E(S^2)=454,5$; d'où $V(S)=13,5$ et $\sigma(S)=3,67$.

a' Soit X le nb de boules B tirées sur 6 essais;
de S=2X+5(6-X), E(S)=2E(X)+5(6-E(X)) = 21
de Y=6-X , V(S)=V(2X+5Y)<>4V(X)+25V(Y) ;

! Mais de s le nb de points obtenu à un tirage ,
S=6s=s+s+..+s , E(S)=6E(s) , V(S)=6V(s)
avec $V(s)=(1/2.4+1/2.25)-3,5^2$

b *$P(|S-E(S)|>t\sigma)<1/t^2$; pour $t\sigma=a$,$t=a/\sigma$;*
donc $P(|S-E(S)|>5)<\sigma^2/25=0,54$; et pour a=10 P=0,135 .

c $P(|S-E(S)|>5)=P(S=12)+P(S=15)+P(S=27)+P(S=30)=14/64$.
L'inégalité de Tchebycheff donne une majoration grossière de la probabilité .

EXERCICES :

V EXEMPLES :

1) Ex du Cours :

On tire successivement ,avec remise, deux boules d'une urne qui contient une rouge R , une verte V , et une blanche B . .

a) On gagne 1F avec R , 2F avec V , on perd 3F avec B
Quels sont les gains possibles ? Définir la V.A. X représentant le gain .

b)On définit Y à partir de l'exemple précédent par un gain de 2F si les deux boules sont de même couleur, et une perte de 1F dans les autres cas . Définir Y .

c)On revient au cas initial ; On suppose l'équiprobabilité des tirages ordonnés .
. Définir l'événement A = "obtenir au moins un vert ,sans blanc".
. Calculer la probabilité de A .
. Chercher l'image de A par X ,V.A. définie au I .
. Proposer la probabilité p' de X(A) .

d)On appelle X la V.A. qui ,à chaque événement, fait correspondre la somme des valeurs attribuées . Définir $X(\Omega)$, puis f, la loi de probabilité de X .

e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 0 ?
Que peut-on espérer gagner ?

Zi	-6	-2	-1	2	3	4	Total
pi	1/9	2/9	2/9	1/9	2/9	1/9	1
pi*Zi							0

2) Pile ou face :

On lance une pièce 3 fois de suite ; On compte le nombre de "Pile" obtenus .
Définir la loi de probabilité .

Faire un arbre .
$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$; $p_i=1/8,3/8,3/8,1/8$.

3) Lancer de pièce :

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir soit F soit 5 P . On compte le nombre de lancers ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition .

Faire un arbre des expériences .
$X(\Omega)$ ={1,2,3,4,5} . *P_i=1/2,1/4,1/8,1/16,1/16 .* *$F(X<k)$= 0, 1/2, 3/4 , ...*

4) Jeu de dés :

a) On lance 2 dés ; on compte la somme des points ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition .

Déterminer l'espérance mathématique de X .

Faire un tableau carré pour dénombrer toutes les possibilités.
$X(\Omega)=\{2,3,...,11,12\}$; P_i= 1/36 ,2/36, 3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,...,1/36 .

X=7 et V(X)=5,83 .
Considérer X=A+B comme au IV 4 de Proba2 .

b) Reprendre le même problème en considérant le sup des points .

Faire un tableau carré pour dénombrer toutes les possibilités.
$X(\Omega)=\{1/36,3/36,5/36,7/36,9/36,11/36\}$

c) Deux dés A et B sont tels que : A possède 2 faces 1, 3, 5 , et B 2 ,4 ,4 ,6 ,6 ,6 ;
On lance 2 dés ; on compte la somme des points ;
Définir la loi de probabilité de la V.A. ainsi définie .
Définir la fonction de répartition . _
Déterminer l'espérance mathématique de X .
Calculer σ_X .

On ne peut obtenir que 3 , 5 , 7 , 9 , 11 avec une probabilité de 1 , 3 , 6 , 5 , 3 / 18 .
X = (3+15+42+45+33) /18 = . ou X=A+B .

5) Ex :

Soit un jeu de 52 cartes ;on tire une carte ; on compte les points d'honneur comme au bridge ;
A 4 , R 3 , D 2 , V 1 , 0 pour les autres .
Déterminer la probabilité d'obtenir k , P(X=k) .
Que peut-on espérer obtenir ?

$p_i = 1/13$, $p_0 = 9/13$, $\overline{X} = 10/13 = \Sigma p_i x_i$.

V AUTRES EXEMPLES :

TP COURS

T.P.A 3.1 :

On considère la variable aléatoire discrète X :

xi	765	780	805	810
pi	0,2	0,45	0,30	0,05

Soit Y=(X-780)/5 ; Calculer E(X) et V(X) ; en déduire E(Y) et V(Y) .

T.P.A 3.2 :

Une entreprise vend deux articles A et B.
Les marges sur coût variable unitaire HT valent 200F pour A et 300F pour B ;
les frais fixes annuels valent 1000000F ;
les ventes annuelles en nombre d'articles sont des variables aléatoires indépendantes, X pour A, Y pour B.
Soit Z le bénéfice brut annuel ;
Calculer E(Z) et V(Z) sachant que E(X)=5000, E(Y)=2000, σ(X)=1000 et σ(Y)=500 .

T.P.A 3.3 :

Vous vendez quotidiennement "la revue" à k clients avec $0\leq k\leq 5$;
Une étude statistique a montré que :
P(k=0)=P(k=5)=1/32 , P(k=1)=P(k=4)=5/32 , P(k=2)=P(k=3)=10/32 ;
vous gagnez 3F par exemplaire vendu, mais perdez 1F par invendu.
Soit Y la v.a. de votre bénéfice ;
donnez la loi de Y si vous commandez 4 revues ;
combien de revues faut-il commander pour maximiser son bénéfice ?

T.P.A 3.4 :

La demande journalière d'un article suit une variable aléatoire X ;

xi	0	1	2	3
pi	0,1	0,5	0,3	0,1

Soit Y la variable aléatoire de la demande sur deux jours.
Calculer E(X) et V(X) ; en déduire E(Y) et V(Y) .
Préciser la loi de Y ; retrouver E(Y) et V(Y) .

T.P.A 3.5 :

Un tireur vise une cible de centre O et de rayon R ; il est sûr d'atteindre sa cible .
On admet que la probabilité d'atteindre la zone de centre O et de rayon t est proportionnelle à la surface de cette zone, soit πR^2 .
Soit X la v.a. représentant la distance du point d'impact au centre de la cible.
Déterminer sa fonction de répartition F, sa fonction de densité f ;
Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

COURS :
LOIS DISCRETES

LOI BINOMIALE

Triangle de Pascal :

Construction :

n \ p	0	1	2	3	
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6		
5					

Le tableau donne les coefficients du binôme : $C_5^3=10$

I NOTION :

1) Loi de Bernouilli :

On considère un événement qui ne présente que deux issues possibles :
$\Omega=\{R,E\}=\{0,1\}$ (réussite, échec) ; Exemples : pile ou face ,rouge ou pas rouge .

On tire une boule indiscernable parmi 3, dont une seule est rouge ;
p(R)=1/3=p ; p(E)=2/3=1-p=q .
Déterminer les caractéristiques de la loi de la v.a. x :

x	1	0	total
Pi	p	q	
Pi*xi	p	0	
Pi*xi*xi	p	0	

E(R)=p ; V(R)=p-p^2*=pq .*

2) Loi Binomiale :

On considère une série d'épreuves , qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernouilli ; par exemple tirer 5 boules avec remise . $\Omega=\{0,1\}^5$.

Les épreuves répétées sont indépendantes .

Soit X la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de succès dans la suite d'épreuves répétées .

La probabilité $P((R,R,E,E,E))=(1/3)^2(2/3)^3$;

Le nombre d'événements élémentaires contenant 2 succès est C_5^2.

Donc : $P(X=2)=C_5^2.p^2.q^3$;

Définir la loi de probabilité dans un tableau ; $P(X=i)$.

Déterminer les caractéristiques de la loi ;

$X=\Sigma x$, donc $E(X)= n.E(x) = n.p$ et $V(X)= n.V(x) = n.pq$.

(X est la somme des x_i et non le produit par n)

II DEFINITION :

1 Définition :

On appelle **loi Binomiale** de paramètres n et p , notée ***B*(n,p)** , la loi de la v.a. X qui prend les valeurs k avec la probabilité **$P(X=k)=C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$** ,p étant la probabilité de succès d'une épreuve à 2 issues, répétée n fois .
Remarque : il revient au même de jeter 6 fois de suite la pièce ou 6 pièces ensembles .

2 Caractéristiques :

a) En considérant X comme somme de n variables aléatoires :
soit $X=\Sigma x$,donc $E(X) = n.E(x) = n.p$, et $V(X) = n.p.q$.
(X est la somme des x_i et non le produit par n)

b) Par le calcul :
$E(X)= \Sigma P(X=k).k = \Sigma C_n^k.p^k.q^{n-k}.k = \Sigma(n!/((k)!(n-k)!)).k.p^k.q^{n-k}$.
$= p.n.\Sigma((n-1)!/((k-1)!(n-k)!).p^{k-1}.q^{n-k}$.
$E(X)= p.n.(p+q)^{n-1} = n.p$.

c) Par dérivation :
$f(x) = (px+q)^n = \Sigma C_n^k.p^k x^k.q^{n-k}$ et $f'(x)= np(px+q)^{n-1} = \Sigma C_n^k.p^k.k.x^{k-1}.q^{n-k}$;
pour x=1 , $E(X) = np$.

pour la variance par le calcul, voir Lespinard p 269

3 Propriétés :

a) $\Sigma P(X=k) = 1$.

b) Valeur la plus probable :c'est le plus grand entier h tel que $h \leq (n+1)p$.

4 Remarque :

Si l'expérience a lieu sans remise, (cas discret fini de taille N=p+q), la v.a. suit une loi Hypergéométrique : $P(X=k)=C_p^k.C_q^{n-k}/C_{p+q}^n$. Si p+q est grand , $P(X=k) \approx B(n,p/(p+q))$.

5 Exercices :

a N°Ex Gourion TD p248 :

a N°137 Cedic p156 :

b N°130 A Cedic p149 :

III LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

(Dem Poret p 260)

1 Situation :

a) Soient x une v.a. de Bernouilli et X une v.a. qui suit la loi Binomiale *B*(n,p) .
$P(X=k)=C_n^k.p^k.q^{n-k}$; E(X)=np et V(X)=npq .

b) Soit Y la v.a. définie par la fréquence de l'événement ;
f=k/n (rapport du nombre de succès au nombre d'épreuves) ;
Y=X/n , E(Y)= E(X)/n =p , V(y)= $V(X)/n^2$ = pq/n .

2 Résultat :

La valeur moyenne de la fréquence d'un événement , dans la loi Binomiale , est la probabilité de cet événement ; son écart type est √(pq/n) .

3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y-p| \geq k\sigma) < 1/k^2 \text{ , et } P(|Y-p| \geq d) < \sigma^2/d^2 = pq/(nd^2) .$$

donc, pour tout d arbitrairement petit, f est voisin de p,
avec une probabilité presque certaine dès que n est assez grand .

4 Théorème de Bernouilli : ou loi faible des grands nombres :

Dans une succession de n épreuves, la probabilité que la fréquence de succès s'écarte de la probabilité p de plus de ε, tend vers 0 quand n augmente indéfiniment . (résultat intuitif)

$P(|f-p| > \varepsilon) \dashrightarrow 0$

5 Plus généralement : quelle que soit la loi :

Soit un espace probabilisé fini, et n variables aléatoires de la même loi sur Ω ;
Si : $E(X_i)=m$ et $V(Xi)=\sigma^2$, si les X_i sont indépendants et si $Y=(\Sigma X_i)/n$, alors on a :
la limite, quand n tend vers ∞, de $P(|Y-m| > \varepsilon)$ est nulle . *(Dem Poret p 260)*

6 Applications: *(Dem Poret p 261)*

Une épreuve consiste à lancer n fois un dé cubique équilibré.
Soit Y_n , la v.a. qui fait correspondre ,à chaque épreuve, la moyenne des points obtenus
(total des points divisé par n).
Montrer que $E(Y_n)=7/2$;
Combien de fois faut-il lancer le dé pour que $P(3<Y_n<4) \geq 0,9$?

Soit X la v.a. du nb obtenu à un lancer .
E(X)=21/6 , V(X)=35/12 ;
Y_n est la v.a. associée à la fréquence de X ;
$E(Y_n)=E(X)$,et $P(|Y-3,5| > 0,5) < \sigma^2/(n.0,25) < 0,1$.
donc n > 40.35/12=117

IV LOI de POISSON :

(approximation de la loi Binomiale dans les cas rares
La v.a. ne prend plus un nombre fini de valeurs , mais une infinité dénombrable)

1 Situation :

Dans une chaîne de fabrication , 3% de pièces sont défectueuses ;
On prélève une pièce , on la vérifie et on la remet ; On répète 120 fois cette expérience .
Soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les 120 .

Tirer une pièce défectueuse à un contrôle est un succès ;
c'est une épreuve de Bernouilli dont le résultat est B ou M ;
l'expérience est la répétition de cette épreuve 120 fois ;
X , le nombre de succès, est une v.a. dont la probabilité suit une loi Binomiale, $\mathcal{B}(120,3\%)$;

Ex : $P(X=10)= C_{120}^{10}.(0,03)^{10}.(0,97)^{110} = 2,40.10^{-3}$.

Le calcul est fastidieux ;
On montre que si X est une v.a. suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(N,p)$,
et que si N augmente avec p voisin de 0 tel que Np=a ,
alors $P(X=k) \approx e^{-a}.a^k/(k!)$.
Ex : $P(X=10)= e^{-3,6}.(3,6)^{10}/(10!) = 2,75.10^{-3}$.
Usage des tables :

2 Définition :

On dit qu'une v.a. X, discrète dont les valeurs prises peuvent être une infinité dénombrable, suit une loi de Poisson si sa loi de probabilité vérifie $\mathbf{P(X=k) = e^{-m}.m^k/(k!)}$.(loi notée $\mathcal{P}(m)$) .

3 Propriétés : *(Dem dans Gacogne IV BTS p 55)*

Caractéristiques : **E(X)=m et V(X)=m** .

Pour k>1 ,**P(X=k)=m/k.P(X=k-1)** ;

La somme de deux v.a. indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres m_1 et m_2 , suit une loi de Poisson de paramètre m_1+m_2 . (faux pour les autres lois) .

4 Théorème : *Compléments dans Gacogne IV BTS p55)*

Si X est une v.a. suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et si n -->∞ et p-->0 avec np-->m ,
alors la loi peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre m .

5 Pratique :

On utilise cette approximation dès que n =30 et np<5 , ou n >20 et p <1/30 ;
La loi se rencontre dans les cas rares : pannes, erreurs, mais aussi de files d'attente .
On évite les calculs en utilisant les tables .

<u>6 Exercices :</u> *Lespinard p283* **<u>:</u>**

a N°807 Trignan p99 : (définition)

b N°809 Trignan p100 : (ajustement)

a N°130 A et B Cedic p149 : (approximation)

b N°143 Cedic p158 : (définition)

c N°EX Gacogne p60 : (estimation)

LOIS CONTINUES

COURS

I GENERALITES :

1 Rappels :

a) Vocabulaire :

On a considéré Ω, un ensemble d'éventualités, e_i ;
L'ensemble des parties de Ω, $P(\Omega)$, est l'ensemble des événements ;
A Ω, on a associé une v.a. X par les valeurs qu'elle pouvait prendre sur $P(\Omega)$;
A chaque e_i est associée une probabilité p_i ,
d'où une fonction P / : $0 \leq P \leq 1$ et $P(AUB)=P(A)+P(B)$ si $A \wedge B = \phi$, donc $P(\Omega)=1$.

b) Définition :

On appelle **probabilité** sur un espace $(\Omega, P(\Omega))$, toute application ,notée P ,de $P(\Omega)$ sur R^+ vérifiant : **$P(\Omega)=1$ et $P(UA_i)=\Sigma P(A_i)$** si les A_i sont disjoints .
On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, P(\Omega), P)$.

On appelle **fonction de répartition** la fonction notée **F / $F(k)=P(X<k)$.**
F définit P ou loi de probabilité .

c) Loi discrète : v.a. discrète :

Cas des lois de Bernouilli, Binomiale : L'univers est fini ;
La loi de Poisson est associée à un univers infini mais dénombrable,
la v.a. prenant des valeurs entières .

2 Notion : Situation d'une v.a. continue :

Si X prend n'importe quelle valeur , **$P(X=k) = 0$** ;
(par exemple la distance à un mur du point de chute d'une pièce)
F , fonction de répartition, a un sens et **$P(a \leq X < b) = F(b)-F(a)$** .
On peut établir une analogie avec la matière : le point a une masse nulle et le corps a une masse ;
$M=\int dm=\int \mu.dv$.
La loi de probabilité, f, est la dérivée de la fonction de répartition F .

3 Exemples :

a) Exemple :

F/ $F(x)=x^2/40$ si $0\leq x\leq 4$ et $F(x)=-x^2/60+(x-2)/3$ si $4<x\leq 10$.
Etudier F ; Représenter F et F' .

b***) Exemple*** : Inversement au a ,on se donne f telle que :

f/ $f(x)=x/20$ si $0\leq x\leq 4$ et $f(x)=-x/30+1/3$ si $4<x\leq 10$.
Etudier f ; f peut-elle définir une loi de probabilité ?
(peut-on définir une fonction de répartition F telle que F(0)=0 et F(10)=1 ?)

c) Exercice :

Soit X une v.a. ayant une densité de probabilité f / $f(x) = 1/2.x$ si $0\leq x\leq 2$ et $f(x)=0$ ailleurs.
Déterminer $P(1\leq x\leq 1{,}5)$; (aire du trapèze 5/16)
Déterminer et représenter la fonction de répartition F .
Calculer la moyenne et l'écart-type de X .
($E(X)=\int x.f(x).dx$;$E(X^2)=\int x^2.f(x).dx$,$V(X)=E(X^2)-E^2(X) =2/9$)

4 Définition :

a) f définit une **densité de probabilité** d'une v.a. continue

si f est positive et si F / $\mathbf{F(x)= \int_{-\infty}^{x}f(t).dt}$ **vérifie** $\mathbf{\int_{-\infty}^{\infty}f(t).dt = 1}$.

conséquence : $\mathbf{P(a\leq x\leq b) = F(b)-F(a)}$.

b) Espérance mathématique: par généralisation des sommes finies;

$E(X)=\Sigma p_i.x_i$; $\mathbf{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t).t.dt}$;
On a toujours : E(X+Y) = E(X) + E(Y) ; E(X-Y) = E(X) - E(Y) ; $E(\Sigma X) = \Sigma E(X)$;
et E(X.Y) = E(X).E(Y) si X et Y sont indépendantes;

c) $V(X) = E(X^2)-E^2(X)$; $\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}t^2.f(t).dt - E^2(X)}$; $V(\alpha X) = \alpha^2.V(X)$;
et V(X+Y)=V(X-Y)=V(X)+V(Y) si X et Y sont indépendantes .

d) remarque : On a toujours l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$\mathbf{P(|X-m|>a) < V(X)/a^2}$ **ou** $\mathbf{P(|X-m|>k\sigma) < 1/k^2}$ **.**

II LOI NORMALE :

1) Définition :

On appelle v.a. normale de paramètre m et σ ,notée $N(m,\sigma)$, une v.a. admettant comme densité de probabilité la fonction f telle que $f(x)=1/(\sigma\sqrt{(2\pi)})\exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$. ($\sigma>0$)

$E(X)=m$; $V(X)=\sigma^2$;

Il n'y a pas de formule qui donne les valeurs de F(x), fonction de répartition ; il faut des tables .
Sa courbe représentative de f est la courbe en cloche .

2) Intérêt :

a) La loi des erreurs est normale.(erreurs sont aléatoires)
Dans la pratique beaucoup de v.a. sont presque normales .
Si ,dans une distribution binomiale (discrète), n, le nombre d'essais est grand et si p et q ne sont pas trop faibles , la distribution peut être assimilée à une distribution normale de Gauss (continue), de moyenne m=np et de variance npq .

b) Exemple:
On lance 400 fois une pièce de monnaie équilibrée .
On désigne par X la v.a. du nombre de face obtenues . X est une v.a. binomiale $B(400;1/2)$;
$P(X=100)= C_{400}^{100}(1/2)^{400}$ si son calcul est possible ;
L'approximation de Poisson ne s'applique pas (p=0,5 ;np=200) ;
On calculera $P(X=100) = P(99,5<X\leq 100,5)$; cf 3d .

3 Loi normale centrée réduite : (on aurait pu réduire aussi la loi binomiale :)

a) On pose $t=(x-m)/\sigma$ (ou $x=m+t\sigma$) ; $P(x_1<x<x_2)=P(t_1<t<t_2)= \int_{t_1}^{t_2} 1/(\sqrt{(2\pi)}) \exp(-t^2/2).dt$.
Si X suit une loi $N(m,\sigma)$, T suit une loi $N(0,1)$. $(E(T)=(E(X)-m)/\sigma =0, V(T)=V(X)/\sigma^2 =1)$;

b) Etudier la courbe représentant f(t) :
symétrie, maximum , inflexion (en 1) , tangente en ce point (2;0).

c) Les tables ne donnent que les valeurs de la loi $N(0,1)$.

d) Application : exemple du 2b :
$m = np=200$; $V(X) = npq = 100$;
$P(X=100) \approx f(t=(100-200)/10) = f(-10)$;
ou $t_i = (99,5-200)/10$; $t_s = (100,5-200)/10$;
$P(X=100) \approx \Pi(t_s)-\Pi(t_i) = \Pi(-t_i)-\Pi(-t_s)$ *(10^{-25})*

4 Lecture des différentes tables :

a) Soit Π la fonction de répartition de la loi normale réduite U .

$$\Pi(u)= \int_{-\infty}^{u}(1/\sqrt{2\pi}).\exp(-t^2/2).dt .$$

. $P(X<b) = F(b) = P(U<ß) = \Pi(ß)$;

$P(X\geq a) = 1-F(a) = P(U\geq\alpha) = 1-\Pi(\alpha)$;

$P(a\leq X<b) = F(b)-F(a) = P(\alpha\leq U<ß) = \Pi(\alpha)-\Pi(ß)$ avec $U=(X-m)/\sigma$.

$P(|X|<a) = F(a)-F(-a) = 2.F(a)-1 = 2.\Pi(\alpha)-1$.

.. La table ne donne les valeurs de $\Pi(u)$ que pour u positif ;

Si $u<0$, $\Pi(u) = 1-\Pi(-u)$,d'après la symétrie de la courbe.

5 Intervalle de confiance :

a Chercher α / $P(|t|<\alpha)= 0.5$; $\alpha=2/3$;

donc 1/2 de la population d'une gaussienne est dans

la bande $[m-2/3\sigma; m+-2/3\sigma]$;

b

k =	2/3	1	1,96	2,6	3
$P(\|x-m\|<k\sigma)$	0,5	0,68	0,95	0,99	0,999

c On appelle intervalle de confiance un intervalle $I=]m-k\sigma,m+k\sigma[$;

on appelle coefficient de confiance la probabilité pour qu'une valeur soit située dans l'intervalle de confiance ;

III BILAN :

Conditions d'approximations :			
lois exactes :	$B(n,p)$	$P(m)$	$N(m,\sigma)$
P(X=k) = :	$C_n^k.p^k.q^{n-k}$	$e^{-m}.m^k/(k!)$	0
f(x) =			$1/(\sigma\sqrt{(2\pi)})\exp[(-1/2)((x-m)/\sigma)^2]$
approximations par	$P(np)$	$N(m,\sqrt{m})$	
si	$np\leq 5$ et $n\geq 30$	$n>30$	
ou par si	$N(np,\sqrt{(npq)})$ $np>5$ et $n\geq 30$ ou $nq>5$ et $n\geq 30$ ou p¸0.5 et $n\geq 20$		

remarque :

pour passer d'une loi discrète à une approximation par une loi normale continue , on convient d'associer l'entier n à $I=]n-1/2,n+1/2]$.

EXERCICES

IV EXERCICES

Ex 5.1:

On considère la taille de 2000 élèves, supposée distribuée normalement avec une moyenne de 155 cm et un écart-type de 20cm ;
calculer le nombre d'élèves ayant des tailles :
inférieures à 100 cm ; comprises entre 120 et 130 cm ;
comprises entre 150 et 175 cm ; supérieures à 200 cm ;
de 160 cm

*Considérer une loi de Gauss , N(155;*20) ; n_i *= 6 ; 131 ; 880 ; 24 ;*

Ex 5.2 :

On suppose que les diamètres de vis manufacturées sont distribuées normalement avec une moyenne de 0,25cm et un écart-type de 0,02cm .La vis est acceptable si son diamètre est compris entre 0,20 et 0,28cm ;
Calculer le pourcentage de vis défectueuses .

Considérer une loi de Gauss , N(0,25;0,02) ; P=7,3% .

Ex 5.3 : (cf cours sur loi faible des grands nbs)

Soit X un aléa binomial de paramètre n et p ;
Démontrer que l'aléa centré réduit Y, associé à X est égal à l'aléa centré réduit Z, associé à X/n ;

E(X)=np , V(X)=npq ; $Y=(X-m)/\sigma = (X-np)/\sqrt{(npq)}$.
E(X/n)=p , V(X/n)=pq/n ; $Z = [(X/n)-p]/\sqrt{(pq/n)} = Y$.

Ex 5.4 :

On jette un dé n fois ; on suppose l'équiprobabilité des résultats ; Soit X la v.a. dont la valeur est le nombre d'apparitions du 5 . Soit Y=X/n sa fréquence .

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

$P(X=k)=C_n^k.(1/6)^k.(5/6)^{n-k}$; $E(X)=n/6$, $V(X)=5n/36$.

b) Calculer E(Y) et V(Y) .

$E(Y)=E(X)/n =1/6$, $V(Y)=V(X)/n^2 = 5/(36n)$.

c) En utilisant l'inégalité de Tchébicheff , trouver une condition suffisante sur n pour que
$P(|X/n-E(Y)|\leq 1/100)=0,99$.

Rappel : $P(|X-m|>\alpha)<V(X)/\alpha^2$.

Pour que $P(|X/n-E(Y)|\leq 1/100)=0,99$ *,il suffit que*
$P(|X/n-E(Y)|>1/100)\leq 0,01$;
il suffit que $V(Y)/(10^{-2})^2 \leq 0,01$ *donc n= 138889* .

d) On considère que Y suit une loi normale ;
déterminer n pour que $P=P(|Y-1/6|\leq 1/100)=0,99$.

T.P.COURS

Exercice :1:

Dans un stock de disquettes en solde, une disquette sur trois est défectueuse ;
Soit Y la v.a. du nombre de disquettes mauvaises dans un lot de 600 disquettes .
Déterminer la loi de Y ;

B(600;1/3) ; E(Y)= 200 ; V(Y)= ; σ_y*=11,55 .*

Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ?

N(200;11,55) ;

Calculer P(150<Y<200) . P(Y=210) *P=0,484*

Exercice :2:

Une usine de composants produit des microprocesseurs .
Après un premier contrôle sommaire il reste 2% de composants défectueux .
On établit un second contrôle qui élimine 5% des composants, parmi lesquels tous les composants défectueux et 3% de composants acceptables.

Avant le 2eme contrôle : (98% de bons+2% de mauvais) ;
Après le 2^{eme} *contrôle : (95% de Bons qui restent ,*
+(3% de Bons+2% de mauvais) ôtés) ;

a) On prélève au hasard un échantillon de 150 composants après le premier contrôle.
Soit X la v.a. égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon .
Déterminer la loi de X ;

B(150;0.02) ; E(X)= 3 ; V(X)= 2,94 ; σ_y*=1,715 .*

Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?

P(3) ; $P(X=k)=e^{-3}.3^k/(k!)$ *, car n>30 et np<5 ;*

Calculer P(X=0) ,P(X=1) ,P(X<5) .

P = 0,050 ; 0,149 ; 0,815 .

b) Parmi les composants éliminés par le 2^{eme} contrôle , on prélève au hasard , un échantillon de 300 composants .
Soit Y la v.a. égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon .

Quelle est la loi de probabilité de Y ?

B(300;2/5) ; E(Y)=120 ; V(Y)=72 ; σ_y *=8,49*

Quelle loi peut servir d'approximation ?

N(120;8,49) ;

Calculer P(95<Y<130) et P(Y<140) .

P = 0,879 ; 0,991 .

Exercice :3 : (Approximation d'une loi Binomiale par une loi normale)

On considère une population nombreuse ; chaque individu possède un caractère "C" avec la probabilité p=0,4 ;on teste 900 personnes;
soit X le nombre d'individus qui possède le caractère "C" dans cet échantillon .
Préciser la loi de X ,E(X) , V(X) ;
Calculer la probabilité des cas suivants : $360<X<390$; $X>370$; $X=360$.

Le caractère d'un individu suit une loi de Bernouilli;
Si les caractères sont indépendants, L(X)=B(900;0,4)

$P(X=k)=C_n^k.0,4^k.0,6^{n-k}$; $E(X)=0,4.900=360$; $V(X)=216$.
Utiliser éventuellement une table binomiale ;
n est grand ,np>5 , $L(X)=B(900;0,4) \approx N(360;\sqrt{216})$;
$P(360<X<390)=\Phi(2,04)-\Phi(0) = 0,4793$;
$P(X>370) =1-P(X\leq 370) =0,2483$;
$P(X=360) = P(359,5<X<360,5) = (1/\sqrt{216})f(0) = 0,027$.

Exercice :5: (Approximation d'une loi Binomiale par une loi Normale)

On joue 400 fois à pile ou face ;soit X le nombre de piles obtenus.
Préciser la loi de X , E(X) , V(X) ;
Par quelle loi peut-on approximer la loi précédente ?
Calculer $P(X>215)$, $P(180<X<220)$, $P(190<X<220)$ $P(X=220)$;
Déterminer un intervalle [a,b] centré sur la moyenne tel que $P(a<X<b) = 0,98$.

$p=q=0,5$; $L(X)=B(400;0,5)$; $E(X)=200$, $V(X)=100$;
$L(X) = B(400;0,5) \approx N(200;10)$.
$P(X>220)=1-P(X\leq 220) =1-\Phi(2) =0,0228$.
$P(180<X<220)=\Phi(2)-\Phi(-2) = 0,9544$.
$P(X=220) = P(219,5<X<220,5) = 1/10.f(2) =0,005399$.
(t=2 pour x=220)
$P(a<X<b)=P(t_a<t<t_b)=0,98 = 2.\Phi(t)-1$ *donc* $t=2,33$;
$t=(x-E(X))/\sigma$ *et* $b=223,33$ *et* $a=176,77$.

Exercice : 6 : DECF 82 :

280 techniciens utilisent, 6 mn en moyenne par heure, l'ordinateur central de l'entreprise .
Quel est le nombre minimum de lignes qu'il faut établir pour qu'à l'instant t, la probabilité d'encombrement soit inférieure à 0,02 ?
(On désignera par X la v.a. qui représente le nombre de lignes occupées à l'instant t , et on montrera que X suit une loi binomiale qui peut être approchée par une loi normale)

Probabilité d'occupation de l'ordinateur par un technicien: p=6/60 ;
Chaque technicien utilise ou non l'ordinateur ;
Soit X le nb de techniciens. qui utilisent l'ordinateur ;
$L(X)=B(280;0,1)$; $p(X=n)=C_{280}^n.0,1^n.0,9^{280-n}$; $p(X>k)\leq 0,02$ *ou* $p(X\leq k)>0,98$;
$N=280>30$; $N.p=28>15$; $L(X)=B(280;0,1)=N(28;5,02)$;
Soit $t=(X-28)/5$; $p(X\leq k)=p(t\leq t_0)=\Phi(t_0)>0,98$; $t_0>2,06$; $K>5,02*2,06+28=39$;

T.P.

EXERCICES sur les LOIS CONTINUES (PROBA6)

Lecture de tables :
$\Phi(0,82) = 0,7939$; $\Phi(-0,82) = 0,2061$.

Exercice :
Une variable aléatoire X suit une loi Normale d'espérance m et d'écart-type σ ;
l'expérience a montré que la probabilité que la v.a. X prenne une valeur :
supérieure à 785 est 0,8413 , inférieure à 822,5 est 0,9332 ;
Déterminer les paramètres de la loi .

Exercice :
Une usine fabrique des pièces en grande série. On note X puis Y, selon le procédé, la variable aléatoire associée à la longueur de la pièce ; une pièce est jugée bonne si $19,5 \leq x \leq 20,5$ cm ;

1) Dans un premier procédé, X suit une loi Normale de moyenne m =20 et d'écart-type 0,30 ;
   Déterminer p', la probabilité qu'une pièce soit acceptable .
   Soit Z le coût de fabrication unitaire, montrer que le prix de revient unitaire est Z/p' .
2) Dans un second procédé, Y suit une loi Normale *N(20;0,25)* ;
   le coût de fabrication unitaire est de 3F ;
   Déterminer p'', la probabilité qu'une pièce soit acceptable .
3) Quel est le procédé le plus rentable ?

Exercice :
Une machine remplit des bouteilles d'eau minérale;
La distribution est normale, de moyenne 1,5 l et de σ=0,015 l ;
Calculer la proportion de bouteilles remplies avec $1,5 \pm 0,01$ l .
Quelle est la proportion de bouteilles remplies avec moins de 1,48l.
La contenance totale d'une bouteille étant de 1,6l ,calculer la proportion de bouteilles qui débordent .

$(P_1 = 49,7\% \; ; \; P_2 = 9,2\% \; ; \; P_{,}0)$

Exercice :
Une pièce subit un contrôle de deux dimensions x et y .
On doit avoir x=40,0±0,1cm et y=60,0±0,1cm .
La production d'une machine est étudiée :
E(X)=40,01 , E(Y)=60,02 ; $\sigma_x=\sigma_y= 0,05$
Les distributions de X et Y sont Normales .
Quel est le pourcentage de rebut ?

Etude de la longueur : X suit une loi N(40,01;0,05);
$T=(X-m)/\sigma = (X-40,01)/0,05$;
$p_x=P(39,9\leq X\leq 40,1) = P(-2,2\leq T\leq 1,8) = \Phi(1,8)-\Phi(-2,2) =0,9502$;
De même y suit une loi N(60,02;0,05) ;$p_y=0,8854$.
La taille des dimensions sont indépendantes, donc P, la probabilité qu'une pièce soit acceptable est $p_x.p_y$.
P=0,8413 donc 1-P = 0,1587 ;
le pourcentage de pièces au rebut est 15,87% .

bExercice :(Somme de 2 v.a. normales indépendantes)
Rappels: si $L(X_i)$ suit $N(m_i;\sigma_i)$,$Y=X_i+X_j$ et $Z=X_i-X_j$ suivent
$N(m;\sigma)$ tel que $m=m_1+m_2$ ou $m=m_1-m_2$ et $\sigma=\sqrt{}(\sigma_i^2+\sigma_j^2)$.

Conséquences : Etude des fréquences ;
Si les X_i sont indépendants et suivent une $N(m,\sigma)$, et si $Y = (\Sigma X_i)/n$,
alors Y suit $N(m,\sigma/\sqrt{n})$.

A une heure choisie, on étudie le flot de voyageurs d'un bus ;
Soit A le nombre de voyageurs qui arrivent , soit D le nombre de ceux qui descendent ,
M celui de ceux qui montent . La voiture repart avec N personnes .
A , D et M suivent des lois normales : $L(A) = N(100,20)$; $L(D) = N(30,12)$; $L(M) = N(40,9)$.
Déterminer la loi de N .
$L(N)=N(m ,\sigma)$; $N=A-D+M$; $m=110$; $\sigma=25$.
Déterminer N tel que $P(0\leq n\leq N_0)=0,95$.
$T=(N_0-110)/25$; $P(t)=0,95$ => $t=1,65$ et $N_0=151$

Calculer P(n<70) , P(n=140) .
$P(X<70) = P(t<-1,6) = 1-\Phi(1,6) = 0,0548$;
$P(X>140) = P(t>1,2) = 1-\Phi(1,2) = 0,1151$;

Exercice : DECF 83 :
Une société cherche à mieux connaître la répartition des impayés;
Le tableau résume le contenu d'une étude d'un échantillon aléatoire de 200 dossiers sur 20000 ;
Montants en M.F. et effectifs :

1,9-2,0	2,0-2,1	2,1-2,25	2,25-2,4	2,4-2,5
2	3	9	21	21

2,5-2,65	2,65-2,75	2,75-2,85	2,85-2,95
38	36	20	18

2,95-3,05	3,05-3,2	3,2-3,3	3,3-3,4
16	10	4	2

1) Quelle loi classique pourrait représenter cette distribution pour généraliser des résultats à l'ensemble de la population ?
2) Comment vérifier la qualité de l'ajustement ?
3) Quelle serait la probabilité pour que, sur l'ensemble des dossiers,
le montant moyen d'impayés soit inférieur à 2,3 ?
4) Quel serait l'intervalle de confiance à 95% de cette moyenne,
et quelle en serait l'interprétation ?

1) Série continue , $N>100$; $n/N<1/10$? ;
$L(X)=N(E(x),\sigma)$; $E(x)=\Sigma n_i.x_i/200$; $m=E(x)$; $\sigma_X=\sigma*\sqrt{(n/(n-1))}$;
2) Droite de Henry ou test de x^2 ;
3) $t=(x-m)/\sigma$, $p(X<2,3)=\Phi(t_0)$;
4) $E(x)-t.\sigma<m<E(x)+t.\sigma$

ECHANTILLONNAGE

Principe de la Méthode Statistique :

Situations:

Les probabilités associent une fonction à une v.a. X : $Pr(X<t)=F(t)$;
On connait des lois classiques et sait calculer des paramètres caractéristiques;

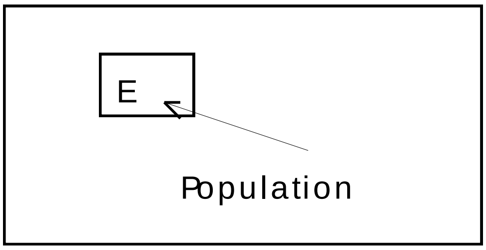
L'observation d'un caractère x, sur une population se fait :

sur la population entière, sur un échantillon ou sur un ensemble d'échantillons ;
si l'échantillonnage doit être aléatoire, l'échantillon peut-être extrait au hasard ou de manière dirigée dans le cas de distributions disymétriques ;
il peut être exhaustif (sans remise) ou non exhaustif (avec remise) .

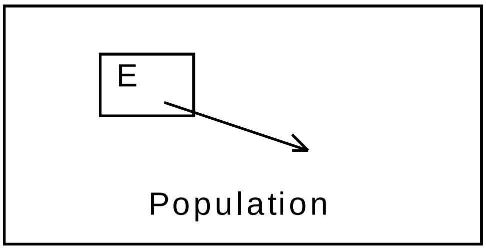
Problèmes :

L'échantillonnage : permet de passer de la population connue à l'échantillon ;
Il permet l'étude des liaisons entre une population et et divers échantillons tirés dans cette population mais aussi de savoir si des différences observées entre deux échantillons sont significatives ou dues au hasard.

L'estimation : permet de passer de l'échantillon observé à une évaluation des paramètres de la population à étudier



Echantillonnage



Estimation

La méthode statistique comporte des phases d'observation, de description, de décision .

Distribution d'échantillonnage :

Distribution d'échantillonnage des moyennes :

Bilan

Dans une population de taille N, soit X le caractère.
Si X, dans la population, est de moyenne $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$,
et si Xe est la v.a. moyenne obtenue sur un échantillon, $E(Xe) = m$ et $V(Xe) = \sigma^2 /n$

Si X suit une loi Normale de moyenne m et d'écart-type σ, alors Xe suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$. $\boldsymbol{\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m,\sigma) \Rightarrow \mathcal{L}(Xe) = \mathcal{N}(m,\sigma/\sqrt{n})}$

Si n>30 et si N>2n avec des paramètres m et σ dans la population, alors Xe suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma /\sqrt{n}$. $\boldsymbol{\mathcal{L}(X)\ (m,\sigma) \Rightarrow \mathcal{L}(Xe) = \mathcal{N}(m,\sigma/\sqrt{n})}$

Si n<30 ou si N<2n avec des paramètres m et σ dans la population, avec **un tirage sans remise**, alors Xe suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n} * \sqrt{[(N-n)/(N-1)]}$.

$\boldsymbol{\mathcal{L}(X)\ (m,\sigma) \Rightarrow \mathcal{L}(Xe)\ (\ m\ ,\ \sigma/\sqrt{n}*\sqrt{[(N-n)/(N-1)]}\ )}$

Des problèmes pratiques se posent selon que :
- m soit connu ou estimé, (par xe, moyenne de l'échantillon)
- σ soit connu ou estimé, (par $\sigma e\sqrt{(n/(n-1))}$), où σe est l'écart-type de l'échantillon)

Exercices:

Ex 1 : Une machine remplit des paquets ; soit X la v.a. associée à la masse du paquet ;
La machine est réglée pour une production de moyenne 200 g et d'écart-type 10 g .
a) On contrôle la marchandise à la reception en prélevant des échantillons de taille 100 paquets.
Soit Y la v.a. associée à la moyenne des masses de ces échantillons ;
Déterminer la loi de Y .

$L(X)\ (200,10) \Rightarrow L(Y) = L(Xe) = N(\ 200\ ,\ 10/\sqrt{100}) = N(\ 200\ ,\ 1\ )$

b) Sur un échantillon de 10 paquets, (parmi 100)

$L(X)\ (200,10) \Rightarrow L(Y) = L(Xe)\ \ (\ 200\ ,\ 10/\sqrt{10}) = N(\ 200\ ,\ 3\ )$

ou $L(Y) = L(Xe)\ \ (\ 200\ ,\ 10/\sqrt{10} * \sqrt{((100-10)/(100-1))} = N(\ 200\ ,\ 3\ )$

Ex 2 : On veut vérifier un arrivage de pommes de terre, dont la masse M est une variable aléatoire X de moyenne 100 g et d'écart-type 30 g ;
a) Déterminer la probabilité qu'une pomme de terre, prise au hasard, ait une masse comprise entre 85 g et 115 g .

$L(X) = N(\ 100\ ,\ 30\ )\quad p = F(15/30) - F(-15/30)$

b) On considère un échantillon de 100 tubercules d'un lot de 1000 unités ;
Déterminer la probabilité que la masse moyenne d'une pomme de terre du lot ait une masse comprise entre 85 g et 115 g .

$L(X) = N(\ 100\ ,\ 30\ )\quad L(Y) = N(\ 100\ ,\ 30/\sqrt{100}\ )$

Combien devrait-on obtenir de pièces du bon calibre dans le lot ?
c) même problème avec des échantillons de 50 unités .

Ex 2 bis :

même problème avec une production de moyenne 100 g et d'écart-type 20 g

Ex 2 ter :

même problème avec une production de moyenne 95 g et d'écart-type 30 g

Etude de la différence de moyennes :

dans le cas d'une distribution d'échantillonnage des moyennes

Bilan

Si m1 et m2 sont deux moyennes observées sur deux échantillons de tailles respectives n1 et n2 pris dans une population de paramètres m = E(X) et σ, alors mi est une v.a. Xe, de moyenne m et d''écart-type $\sigma/\sqrt{ni}$
la différence des moyennes, d=m1-m2, est une v.a. d'espérance E(d) = E(m1)-E(m2) = 0 et de variance $V(d) = V(m1)+V(m2) = (\sigma/\sqrt{n1})^2 + (\sigma/\sqrt{n2})^2$

Exemple :

Deux fournisseurs A et B vendent des ampoules dont la durée de vie est une v.a. X .
L(XA) (mA=2500h ; σA=500 h) et L(XB) (mB=2300h ; σB=800 h)
On teste la durée de vie moyenne des ampoules de deux lots :
un lot de 300 ampoules de A, de moyenne YA, et un de 200 ampoules de B de moyenne YB.
Calculer la probabilité que YA > YB+100 .
$L(XA) = N(2500 , 500)$ $L(YA) = N(2500 , 500/\sqrt{300})$
$L(XB) = N(2300 , 800)$ $L(YB) = N(2300 , 800/\sqrt{200})$
La différence D=YA-YB suit une loi Normale $N(200 , 63)$,
d'où la probabilité que d>100 .

Distribution d'échantillonnage des fréquences :

Bilan

Dans une population de taille N, pour un caractère de type de Bernouilli, soit X la v.a. associée au nombre d'individus qui ont le caractère considéré dans un échantillon de taille n ;
Soit F la v.a. associée à la fréquence fi=xi/n .

rappels : si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n;p)$ alors E(X) = p , V(X) = npq .
donc E(F) = p et V(F) = pq/n .(tirage non exhaustif)
ou V(F) = pq/n * (N-n)/(N-1) (tirage exhaustif).

Si n > 30, alors $\mathcal{L}(F) = \mathcal{N}(p ; \sqrt{V(F)})$

Exercice :

Ex 1 :Un client reçoit 500 maillots soldés d'une production importante d'un lot d'une production à 3% de défauts.
Déterminer la probabilité de trouver, dans la livraison, moins de 1% , au plus 2% , plus de 5% de défauts.

En étudiant le lot, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(500;0,03)$, N>30, np=15,

$\mathcal{L}(X) \approx \mathcal{N}(15; \sqrt{(500*0,03*0,97)})$, d'où Pr(X<5), Pr(X≤10), Pr(X>25)

En considérant une distribution d'échantillonnage de fréquence,

$\mathcal{L}(F) = \mathcal{N}(0,03; \sqrt{(0,03*0,97/500)}$), d'où Pr(F<0,01) ... .

Ex 2 : Un parti (système anglais) obtient 46% des voix.
Déterminer la probabilité pour que le vote de 50 personnes, de 900 personnes, 10000 personnes donne la majorité à ce parti.

p = 0,46 $\mathcal{L}(F) = \mathcal{N}(0,46; (0,46*0,54/n)$) d'où Pr(F>0,5) .