Descripteurs

Intentions pédagogiques :

Objectif

- Améliorer ses connaissances à partir des acquis antérieurs : Niveau BAC STT requis.
- Montrer que les mathématiques représentent un ensemble d'outils nécessaires à la résolution de problèmes économiques et de gestion.

Contenu

- Notions d'analyse :
  - Equations du second degré
  - Fonctions usuelles (dont puissances, exponentielles, logarithmes) d'une variable : continuité, dérivées, extremums, limites, élasticité, valeur marginale.
  - Introduction à la notion de fonction de deux variables (dérivées, extremums, TMS)
  - Notions d'intégrales

Méthode d'enseignement :

1. Exposition académique/universitaire

Type de connaissances :

1. Connaissances déclaratives

Niveau d'acquisition :

Approche pédagogique

2. « j'ai compris »

Approche professionnelle

1. Concepts

Sommaire

1 Introduction

L'application des techniques mathématiques à l'analyse économique ne date pas d'aujourd'hui.
La première civilisation ancienne qui nous a laissé quelques traces de connaissances mathématiques concerne les babyloniens (Mésopotamie vers -5000 avant J.-C.). Mis en évidence par des tablettes d'argile retrouvées lors de fouilles, leur savoir mathématique est utilisé pour les échanges de monnaie et de marchandises, les problèmes de calcul d'intérêt, les calculs de taxe et la répartition des récoltes.

La représentation mathématique permet d'abréger et de simplifier la description des phénomènes économiques pour aboutir à des conclusions plus compréhensibles que le raisonnement verbal. Ainsi, on tente parfois de mathématiser des grandeurs que l'on peut difficilement quantifier comme l'utilité d'un bien ou le niveau de vie. Par exemple, l'IDH (indice de développement humain) tente de quantifier la qualité de vie à travers l'espérance de vie, le niveau d'instruction et le revenu. Il a permis de mettre en évidence les disparités entre les pays sous un nouveau jour.

Notre objectif est de fournir aux étudiants un bagage mathématique minimum permettant de mieux comprendre l'économie théorique moderne parsemée de symboles et formules mathématiques.

2 Rappels

2.1 Factorisation et développement

Exemple :
Pour obtenir le prix TTC du prix HT on écrit : $P_{TTC}=P_{HT}+P_{HT}\times T_{TVA}=P_{HT}(1+T_{TVA})$: P_{HT} est mis en facteur.

Cette formule permet de trouver le prix HT à partir du prix TTC : $P_{HT}=\dfrac{P_{TTC}}{1+T_{TVA}}$

En langage mathématique :

$$a(x+y) \xrightarrow{\text{Développement (on distribue a)}} ax+ay$$

$$ax+ay \xrightarrow{\text{Factorisation (on met a en facteur)}} a(x+y)$$

2.2 Identités remarquables

Il y a trois identités remarquables :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Remarque :
De ces identités remarquables, on en déduit : $\sqrt{(a+b)^2}=a+b=\sqrt{a^2+2ab+b^2}\neq\sqrt{a^2+b^2}$

2.3 Puissances

Exemple :
On place 1000 € sur un PEL rétribué à 3,5 % l'année.

Au bout d'un an, on a : 1000 € + les intérêts = $1000+\underbrace{1000\times\dfrac{3,5}{100}}_{\text{INTERET}}=1000\times(1+0,035)=1000\times1,035=1035$ €

Au bout de deux ans, an aura 1035 € + les intérêts = $1035+\underbrace{1035\times\dfrac{3,5}{100}}_{\text{INTERET}}=1035\times1,035=1000\times1,035^2\approx1071$ €

Au bout de 5 ans, on aura $10000\times(1,035)^5\approx1188$ €.

Puissances :
On a pour n entier strictement positif $a^n=\underbrace{a\times a\times.....\times a\times a}_{\text{n fois}}$ avec par convention pour $a\neq0$: $a^0=1$.

Règles de calcul : $a^0=1$ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ $a^{m+n}=a^m.a^n$ $(a.b)^n=a^n.b^n$ $(a^m)^n=a^{mn}$

Remarque :
La racine peut être exprimée sous la forme d'une puissance.

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ avec $a\geq0$ ainsi $\sqrt{a}^2=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{1}{2}\times2}=a^1=a$

2.4 Equations du premier degré

Exemple:
Dans un importateur de lecteur DVD, le prix est relié à la quantité achetée par $P=-0,01\times Q+127$. En effet, pour une quantité importante, le prix unitaire est plus faible (ristourne).
On désire obtenir un prix de 100 €. Quelle quantité doit-on acheter ?

$$100=-0,01\times Q+127$$
$$\Leftrightarrow 100-127=-0,01\times Q$$
$$\Leftrightarrow Q=\frac{-27}{-0,01}=2700$$

On parle d'une équation du premier degré en Q : Q est la variable qu'il faut trouver.

Règles de calcul : $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$ avec $a \neq 0$

2.5 *Equations du second degré*

Exemple :
Une entreprise de chaussures produit un bien dont le coût de fabrication est lié à la quantité Q produite en milliers par la relation : $F = Q^2+2Q+5$ milliers d'€.
Les 5 milliers d'€ représentent les coûts fixes et Q^2+2Q les frais variables (dépendant du volume de production).
Elle écoule sa production au prix $P=10-Q$ milliers d'€ par milliers de chaussure.
Pour quel niveau de production, l'entreprise réalise t-elle un bénéfice nul ?

$Q^2+2Q+5=Q(10-Q) \Leftrightarrow 2Q^2-8Q+5=0$

Cette expression est une équation du second degré en Q : Q est la variable.

Plus généralement, une équation du 2nd degré est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$.

Principe de résolution : On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta>0$ alors l'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède une solution dite "double" : $x = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation ne possède pas de solution réelle.

Suite exemple :
On devait résoudre $Q^2+2Q+5=Q(10-Q) \Leftrightarrow 2Q^2-8Q+5=0$

$\Delta = 8^2 - 4\times2\times5 = 24 = (2\sqrt{6})^2 > 0$

donc on a deux racines (valeurs pour lesquelles le bénéfice est nul) : $Q = \frac{8\pm2\sqrt{6}}{4} = 2\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

2.6 *Factorisation et signe du trinôme*

Remarque :
On appelle racine toute valeur annulant le polynôme.
Ainsi 2 est une racine du polynôme x^3-2x-4 car $2^3-2\times2-4=0$

Théorème : Un polynôme est toujours factorisable par l'une de ses racines.

De ce théorème, on en déduit la factorisation de $ax^2+bx+c=0$ suivante :

Si $\Delta > 0$: 2 solutions x_1 et x_2 donc $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Si $\Delta = 0$: l'équation possède une solution double $\frac{-b}{2a}$ donc $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2$

Si $\Delta < 0$: l'équation ne possède pas de solution réelle donc ax^2+bx+c n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi en déduire le signe du trinôme .

Règle : ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre ses racines.

Si $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax²+bx+c		Signe de a	0	Signe de de –a	0	Signe de a	

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax²+bx+c		Signe de a	

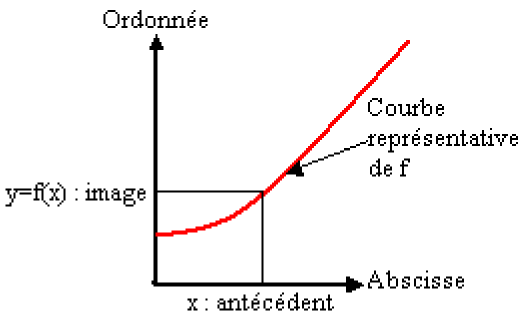
Suite exemple :
Si on désire savoir pour quelle quantité de chaussures, on a un bénéfice.
On doit résoudre $Q^2+2Q+5<Q(10-Q) \Leftrightarrow 2Q^2-8Q+5<0$

On a deux racines $Q = 2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Donc $2Q^2-8Q+5<0 \Leftrightarrow$ " a=2 est positif donc $2Q^2-8Q+5$ est négatif entre les racines " $\Leftrightarrow Q \in \left]2-\sqrt{\frac{3}{2}} ; 2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right[$.

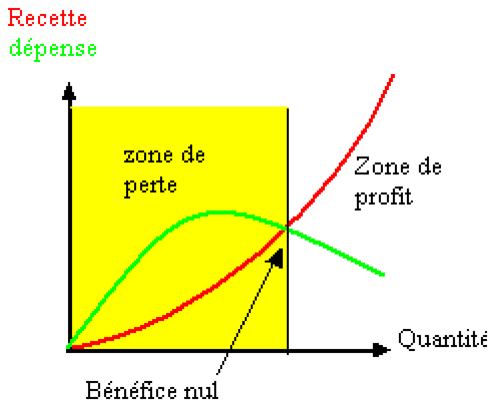
2.7 <u>Etude graphique d'une équation du second degré</u>

Rappels – Notation :
Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Définir une **fonction** sur D, c'est associer à chaque élément de D un réel et un seul que l'on appelle son image.
D est le **domaine de définition** de la fonction.



Principe de résolution graphique d'équations et inéquations
On représente graphiquement, les dépenses et recettes en fonction de la quantité produite.
On désire savoir pour quelles productions, on a un bénéfice : **Recette** > **Dépense**.

Graphiquement, on obtient une zone de profit : les points de la Recette sont au-dessus de ceux des Dépenses. On trouve ainsi graphiquement, les quantités à produire.

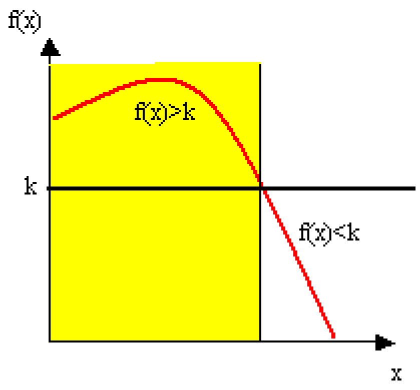


Résolution graphique d'équation et inéquations :
Ainsi, lorsqu'on connaît la courbe représentative d'une fonction C_f, on peut l'utiliser pour résoudre graphiquement :

- f(x)=k (équation)

ou

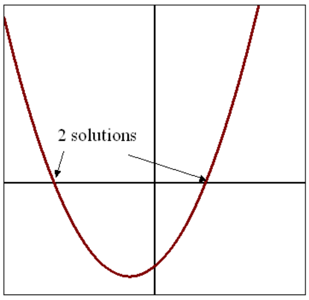
- f(x)<k (inéquation) avec k réel fixé.



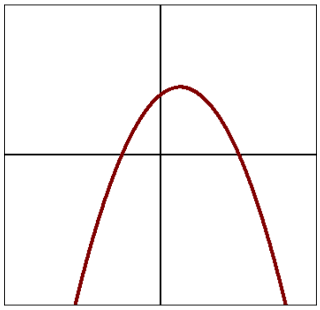
Exemple : étude graphique des solutions de l'équation ax²+bx+c = 0
On recherche les points d'intersection de la courbe représentative C_f de la fonction f: x→ax²+bx+c avec la droite d'équation y = 0 (axe des abscisses : cas particulier où k = 0).
C_f est une **parabole**.

- Si $\Delta > 0$, on a deux solutions (deux points d'intersection avec l'axe des abscisses)

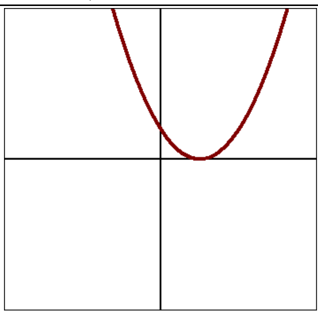
Si a>0



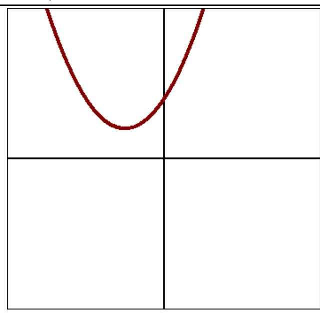
Si a<0



- Si $\Delta = 0$, on a une solution double.



- Si $\Delta < 0$, on a aucune solution.



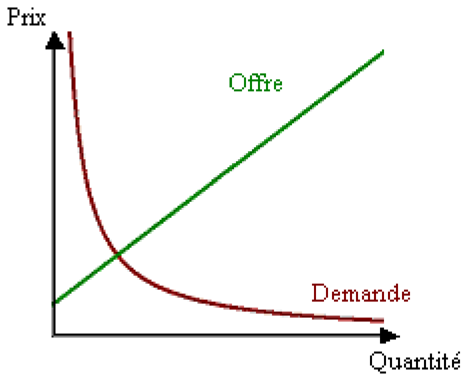
3 Etude de fonctions d'une variable réelle

En micro-économie, on étudie le lien qui existe entre la quantité produite par une entreprise et le prix. On obtient ainsi deux fonctions :

- fonction d'offre : prix offert sur le marché par l'entreprise pour produire Q biens : Prix offre=f(Q).
- fonction de demande : prix consenti par le consommateur : Prix demande=g(Q).

Le consommateur n'ayant pas le même comportement qu'une entreprise, ces deux fonctions n'ont pas la même allure graphique .

Exemple :



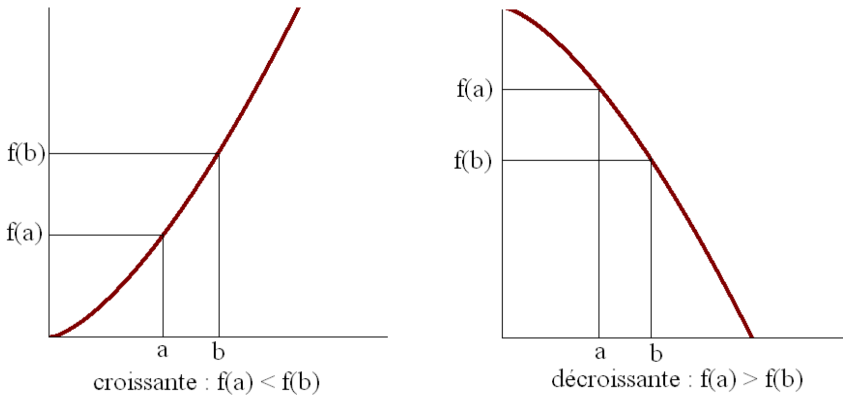
Pour l'entreprise, si le prix est important, elle aura tendance à mettre sur le marché plus de biens : la fonction d'offre f est croissante.
Pour le consommateur, si le prix est important, il achètera moins : la fonction de demande g est décroissante.

3.1 Sens de variation

3.1.1 Fonctions croissantes et décroissantes

(f est croissante) $\Leftrightarrow$ (pour tous réels a et b tels que a<b alors f(a)< f(b)) : f conserve l'ordre (f est décroissante) $\Leftrightarrow$ (pour tous réels a et b tels que a<b alors f(a)> f(b)) : f change l'ordre

Illustration graphique :



Exemples fondamentaux :

- Soit f : x→x² la fonction carrée. f est croissante sur [0,+∞[.

  Donc pour tout a et b positifs, a<b $\Rightarrow$f(a)=a² < b²=f(b) (l'ordre n'est pas modifié)

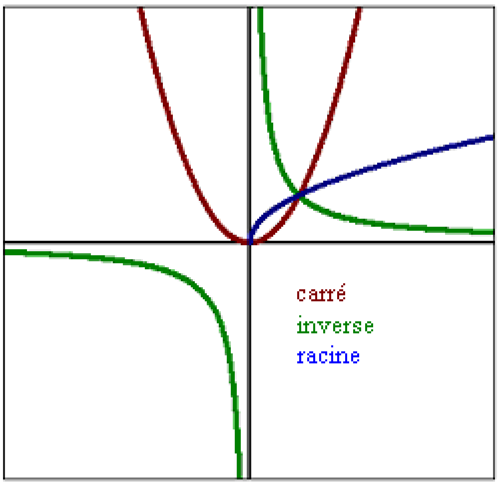
  Ex. : $2 < 3 \Rightarrow 2^2 < 3^2$
- Soit g : x→ $\sqrt{x}$ la fonction racine. g est croissante sur [0,+∞[.

  Donc pour tout a et b positifs, a<b $\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ (l'ordre n'est pas modifié)

  Ex. : $2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$
- Soit h : x→1/x la fonction inverse. h est décroissante sur [0,+∞[

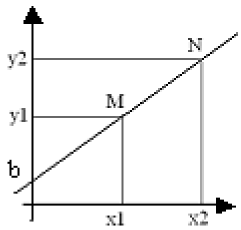
  Donc pour tout a et b positifs, a<b $\Rightarrow$1/b<1/a (l'ordre est modifié)

  Ex. : $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

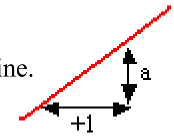


3.1.2 Taux d'accroissement

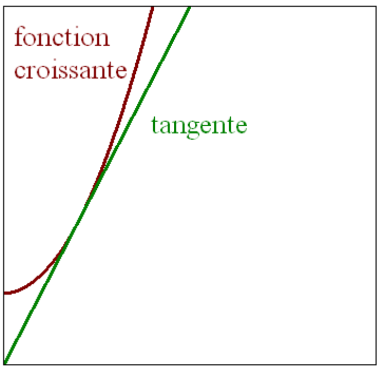
Rappels sur le coefficient directeur d'une droite :
Une droite (MN) est la courbe représentative d'une fonction affine du type f : x→ax+b.
a est le coefficient directeur de la droite et b l'ordonnée à l'origine.
A l'aide de deux points, $M(x_1,y_1)$ et $N(x_2,y_2)$, on peut calculer $\boxed{a = \text{pente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$



Remarque :
Cette formule est utile pour tracer rapidement une fonction affine.
Si $(x_2-x_1)=1$ alors $a = y_2-y_1$
On augmente de 1 en abscisse et de a en ordonnée.

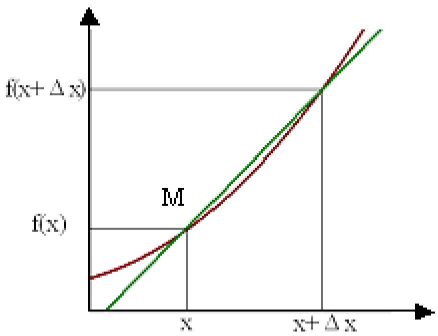


Taux d'accroissement :
Considérons une fonction croissante :

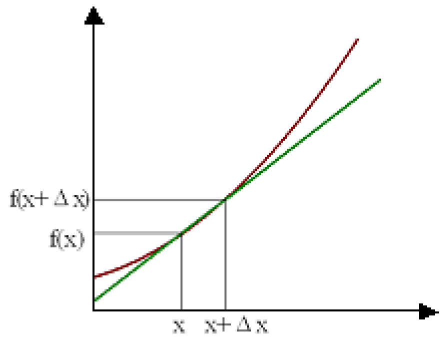


La tangente à la courbe forme un angle positif avec l'horizontale. Cet angle reflète la croissance de la courbe. Or, la pente d'une droite est déterminée par le coefficient directeur. Aussi, le coefficient directeur de la tangente est un indicateur du niveau de croissance ou décroissance.

Comment mesurer ce coefficient directeur sans avoir à tracer la tangente ?
Plaçons-nous en un point M(x ; f(x)=y) de la courbe.
Considérons une faible variation positive de l'abscisse que l'on note x+Δx. On obtient un point sur la courbe de coordonnées (x+Δx ; f(x+Δx)). Par ces deux points, on peut tracer une droite.
La pente de la droite est mesurée par le rapport :
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Lorsque Δx devient infiniment petit, cette droite se rapproche de la tangente. On peut donc dire :
pente de la tangente= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$



La limite de ce taux d'accroissement s'appelle la dérivée de la fonction f en x et c'est le coefficient directeur de la tangente en x.

Exemple :
Considérons la fonction affine f : x→3x+1 et calculons la pente de la droite entre x et x+Δx :
f(x)= 3x+1 et $f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)+1$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{3(x+\Delta x)+1-(3x+1)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

On retrouve que la pente d'une fonction affine est constante et vaut le coefficient directeur.

3.2 Dérivée d'une fonction

3.2.1 Définition

Soit la fonction f : x → f(x) définie sur D_f. La dérivée de f en x est :
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ (limite quand Δx tend vers 0)

Remarques :
$f(x+\Delta x)-f(x) = \Delta f(x)$ = « différence de f(x) »

On écrit : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

En notation différentielle, df(x) signifie « petite différence » d'où on écrit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{\text{différence des images}}{\text{différences des abscisses}} = \frac{dy}{dx}}$$

Dérivée seconde : f '' (dérivée seconde de f) correspond à la dérivée de f '.

Exemple :
En économie, on utilise fréquemment le concept marginal. La valeur marginale d'une grandeur f(x) est la variation de celle-ci suite à l'accroissement unitaire de sa variable x.
Ainsi, le coût marginal d'un bien est le surcoût engendré par la production d'un bien supplémentaire.
Mathématiquement, on a : variation de f(x)= Δf(x) et variation unitaire de x : Δx=1
On obtient : valeur marginale de f = Δf(x)=Δf(x)/Δx car Δx=1.
Les valeurs utilisées en économie étant souvent importantes, la variation unitaire de x correspond à une faible variation (un bien supplémentaire sur une production de plusieurs milliers d'unités est négligeable).

Mathématiquement, on obtient df(x)/dx : la valeur marginale de f est donc égale à f '.

Taux d'accroissement :
La notation différentielle est intéressante car elle permet d'évaluer la variation de f(x) lorsque x varie :

$$f'(x) = \frac{\text{différence des images}}{\text{différences des abscisses}} = \frac{df(x)}{dx} \text{ donc } f'(x) \times \text{différences des abscisses} = \text{différence des images}$$

Ainsi si x varie de dx alors f(x) varie **approximativement** de $f'(x)\times dx$. Ceci n'est valable que pour de faibles variations.

3.2.2 Tableau des dérivées des fonctions classiques

Fonction	Fonction dérivée
ax+b	a
x^2	2x
x^3	$3x^2$
x^n (cas général)	**nx^{n-1}**
1/x	$-1/x^2$
$1/x^n=x^{-n}$	$-nx^{-n-1} = -n/x^{n+1}$
$\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.2.3 Règle de calculs des dérivées

Rappel sur la composée de deux fonctions.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Pour effectuer fog, on exécute g puis f : $x \xrightarrow{\text{fog}} f(g(x)) = fog(x)$

Exemple :
Soient f : x→ax+b et g : x→x²
$fog(x)=f(g(x))=f(x^2)=ax^2+b$
$gof(x)=g(f(x))=g(ax+b)=(ax+b)^2$

Les règles suivantes permettent de calculer de nombreuses dérivées plus complexes.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(\text{cste} . f)' = \text{cste} . f'$$
$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(f . g)' = f'g + f g'$$

Si g ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Si g est dérivable sur I et f sur g(I) alors $(f\circ g)' = g'\times(f'\circ g)$

3.3 ***Dérivée et allure graphique***

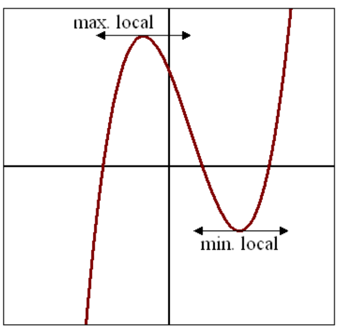
Sens de variation :
On a vu que la dérivée était la pente de la tangente donc :

Théorème : Soit f une fonction dérivable.
f ' nulle sur I → f est constante sur I
f ' positive sur I→ f est croissante sur I.
f ' négative sur I→ f est décroissante sur I.

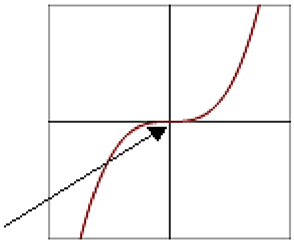
Maximum et minimum d'une fonction

Prop. : Si f admet un minimum local ou un maximum local en x_0 alors $f'(x_0)=0$.

Au niveau des extremums, la pente est nulle :



La « dérivée nulle » permet de trouver les points susceptibles d'être des extremums.
Mais le fait que la dérivée soit nulle n'implique pas forcément que ce point soit un extremum. En effet, la fonction f : x→x^3 admet une dérivée nulle en 0 mais ce n'est pas un extremum (on obtient ici un point d'inflexion). Cette fonction n'en admet aucun.


dérivée nulle mais pas d'extremum

Règle pour trouver un extremum:
1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On résout f '(x)=0
2°) Soit x_0 une solution de f '(x)=0.
Si f ''(xo)>0 alors xo est un minimum.
Si f ''(xo)<0 alors xo est un maximum.
Sinon, une étude complémentaire est nécessaire.

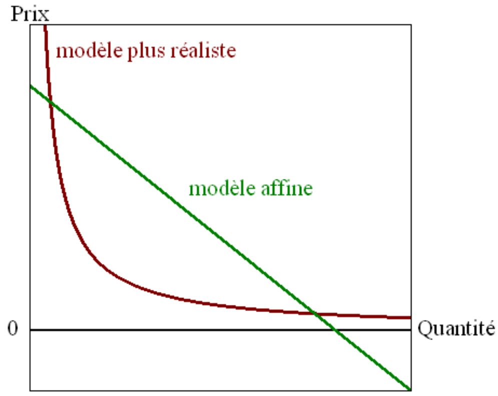
Ainsi, dans le cas de f : x→x^3, on obtient : f '(x) = 3x² et f ''(x) = 6x.
La dérivée seconde vaut 0 pour x=0. D'après la règle ci-dessus, on ne peut pas dire s'il s'agit d'un max. ou d'un min..

Exemple :
La recherche d'extremums est importante en économie.
Soit C(x) le coût global de production en fonction de la quantité x produite, C'(x) représente le coût marginal de production.
C(x) étant le coût pour x unités, C(x)/x représente le coût d'une unité de production, c'est le coût moyen de production.
Si on veut optimiser notre production, on doit trouver la quantité telle que le coût unitaire soit minimum. On doit chercher x telque C(x)/x soit minimal (ie (C(x)/x)'=0 et dérivée seconde positive) : on parle **d'optimum technique**.
Si on considère R(x) la recette globale, le bénéfice sera égal en fonction de la quantité produite x à :
B(x)=R(x)-C(x).
Si on désire avoir le plus grand profit, on doit chercher x tel que B'(x)=0 et B''(x)<0 : on parle **d'optimum économique**.

3.4 Limites et asymptotes

Exemple :
On considère les deux fonctions demandes suivantes :

Si la demande est modélisée par une fonction affine, on obtient des prix négatifs : absurde.
Dans le second modèle, on voit que même pour des quantités très importantes, le prix ne peut être inférieur à 0. Le prix a une valeur limite.

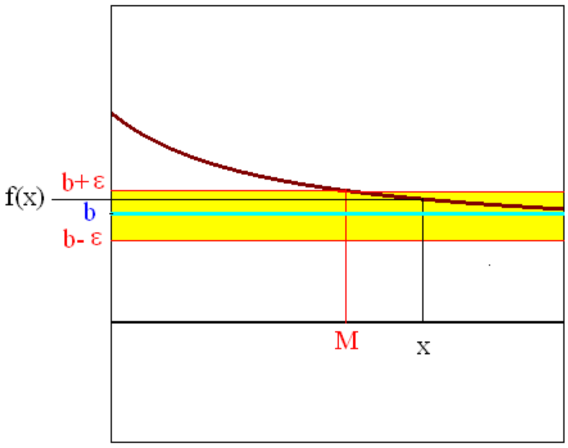


D'un point de vue mathématique, les limites ont pour but de caractériser le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point a de l'ensemble de définition de f : D_f (ou aux bornes de D_f).

Exemple : cas d'une limite finie en $+\infty$

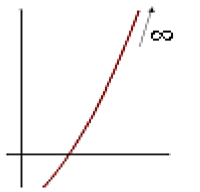
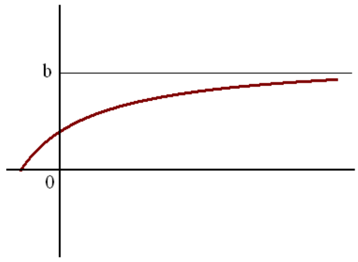
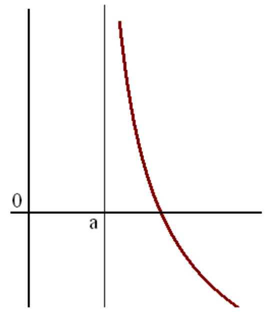
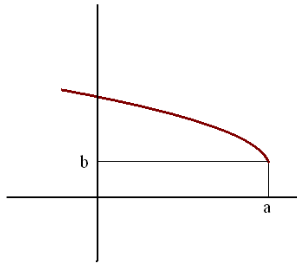
Si pour x grand alors f(x) se rapproche d'une valeur b, on dit que la fonction f admet une limite b quand x tend vers $+\infty$.
On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

En langage mathématique, on écrit :
Si pour tout nombre positif (petit) ε , il existe un nombre positif M tel que
si x >M alors f(x) est proche de b : $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Graphiquement, la représentation suivante décrit le phénomène :



Pour tout x de l'intervalle $]M,+\infty[$, l'image de x, f(x), est dans l'intervalle$]b - \varepsilon ; b + \varepsilon[$.

Cas généraux
Graphiquement, on peut avoir les quatre situations suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
			

Les limites se manipulent comme des nombres

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(+\infty)$ x $(-\infty) = -\infty$

mais attention, il existe des cas indéterminés :

- $(+\infty) + (-\infty)$ = ça dépend car la différence de deux grands nombres est indéterminée.
- $0 \times (\pm\infty)$ = ça dépend
- $0 / 0$ = ça dépend
- ∞ / ∞ = ça dépend

Exemple :

Soit f : x → $\dfrac{e^x}{\ln x}$. $D_f = \mathbb{R}^{+*} =]0 , +\infty[$: on étudie les limites aux bornes de D_f soit en 0 et $+\infty$.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. D'où , $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$=indéterminée.

Une étude approfondie montre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$ car la croissance de la fonction exponentielle est plus importante que celle de la fonction ln.

Remarque :
Un moyen simple de vérifier la limite consiste à remplacer x par une valeur adéquate.

Etude de la limite de f : x → $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 7}$ en $+\infty$.

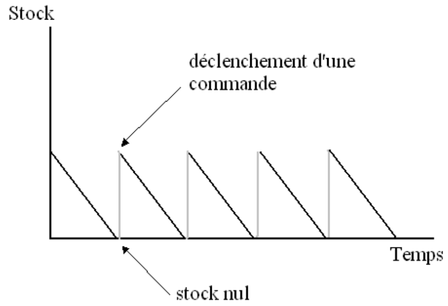
Pour 10^6, on trouve $f(10^6) \approx 1$ .On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

3.5 __Continuité__

Exemple :
Les problèmes de gestion de stock des matières premières, consommables et produits finis constituent une composante essentielle de la gestion d'une entreprise.
Le stock doit répondre à deux exigences :

- être important pour suivre les évolutions de la demande,
- être minimum afin de réduire les coûts.

Afin de simplifier le problème, notre stock diminue régulièrement avec la demande et on ne passe une commande que lorsque le stock est nul.
Notre évolution du stock peut être décrite de la manière suivante.



On voit que cette courbe présente des sauts. On parle de fonction non continue. Le stock varie brusquement au moment de la commande.

Déf. : Lorsque pour tout x_0 d'un intervalle I on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, on dit que la fonction f est continue sur I.

Nous dirons : « lorsque les abscisses sont proches, les images doivent être elles-aussi proches. »

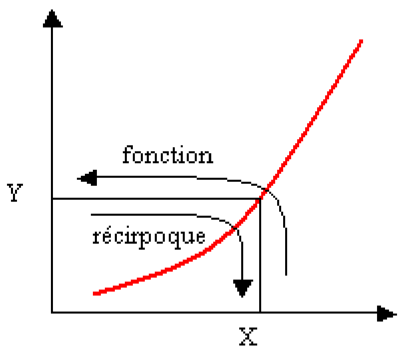
Déf. : Soit une fonction f définie par $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x)=y \end{array}$

Si chaque image de f : y dans F admet un et un seul antécédent : x dans E alors on dit que f est une fonction bijective de E sur F.

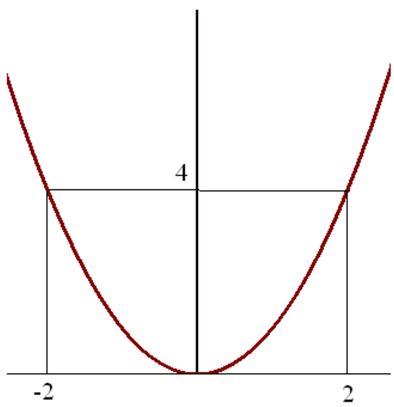
Dans ce cas, il existe une fonction unique, appelée fonction réciproque de f notée f^{-1} définie par $\begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y)=x \end{array}$

telle que $f^{-1}(f(x)=x$ ou $f(f^{-1}(y))=y$

Illustration graphique :



Exemples :
Soit f la fonction carrée. Sur $\mathbb{R}$, f n'est pas bijective car 4 a deux antécédent 2 et –2 .
Par contre sur [0,+∞[, la fonction carrée devient bijective et f admet pour fonction réciproque la fonction racine.



4 Les fonctions logarithme et exponentielle

On sait que la fonction $\frac{1}{x}$ admet pour dérivée $\frac{-1}{x^2}$. Mais existe-t-il une fonction dont la dérivée vaut $\frac{1}{x}$?

Il n'existe pas de fonction puissance du type x^n dont la dérivée vaut $\frac{1}{x}$.

Il nous faut donc introduire une nouvelle fonction.

4.1 La fonction logarithme

4.1.1 Définition

Déf. : La fonction logarithme népérien ln(x) est l'unique fonction définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant :
$[\ln(x)]'=1/x$ et $\ln(1)=0$

4.1.2 Dérivée logarithmique

Rappelons tout d'abord la formule donnant la dérivée d'une fonction composée

$(f \circ g)' = (f' \circ g).\,g'$ ie $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\times g'(x)$

En prenant la fonction ln pour f, on obtient :

$\left[\ln\left(g(x)\right)\right]' = \ln'\left(g(x)\right)\times g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ Ceci est la **dérivée logarithmique** de g.

Remarque :
Ceci n'est valable que pour des fonctions g ayant des images strictement positives.

Exemple :
Soit f(x)=ln(2x-5). Cette fonction est définie pour 2x-5 >0 donc x>5/2. $D_f=]5/2,+\infty[$.

$f'(x)=\frac{(2x+5)'}{(2x+5)}=\frac{2}{2x+5}$

4.1.3 Elasticité

On considère un bien dont le prix vaut en 2002 50 € et en 2003 60 €.

Le prix a augmenté de $\frac{\text{prix en 2003-prix en 2002}}{\text{prix en 2002}} = \frac{\text{variation de P}}{\text{P}} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{60-50}{50} = 0,2 = 20\%$.

La variation du prix en % vaut $\frac{\Delta P}{P}$.

Considérons maintenant la demande d'un bien. La demande dépendant évidemment du prix, on obtient une fonction reliant la quantité x au prix p: x = g(p).

Un des buts des économistes est de chercher comment une variation du prix p influe sur la quantité achetée x. Afin que cette variation ne dépende pas des unités choisies (x et p), on mesure cette variation en pourcentage.

On étudie : $\varepsilon = \frac{\text{variation de x en \%}}{\text{variation de p en \%}} = \frac{dx/x}{dp/p} = \frac{dx/dp}{x/p} = \frac{g'(p)}{x/p} = \frac{g'(p)}{g(p)}p$

C'est le **coefficient d'élasticité** de g par rapport à p : $\varepsilon = \frac{g'(p)}{g(p)}p$
Si le prix p augmente de k% alors la quantité g(p) augmente approximativement de $\varepsilon\times k$ % (valable si k faible).

Si $|\varepsilon| > 1$, la demande est dite élastique : une variation du prix induit en pourcentage une variation de la demande plus importante : c'est le cas de beaucoup de produits manufacturés.
Si $|\varepsilon| < 1$, la demande est dite inélastique : une variation du prix induit en pourcentage une variation de la demande plus faible : c'est le cas de nombreux produits agricoles.

Remarque :
La notion d'élasticité se retrouve dans de nombreuses situations :

- élasticité de l'offre par rapport au prix.
- élasticité de la demande par rapport au revenu
- élasticité de la demande d'un produit par rapport au prix d'un autre produit : élasticité croisée.

4.1.4 Propriétés remarquables

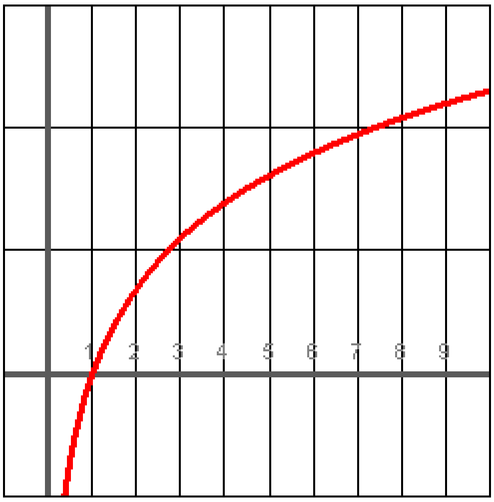
Prop. : Soient a et b deux réels positifs.
$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Démonstration :
Soit $f(x)=\ln(ax)-\ln(x)$.
$f'(x)=\frac{(ax)'}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{a}{ax}-\frac{1}{x}=0$. Donc la fonction f admet une dérivée nulle donc f est une fonction constante (f n'est ni croissante ni décroissante).
Donc $f(x)=cste$ quelque soit x. Pour x=1, on obtient $f(1)=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)=cste$.
Donc $f(x)=\ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$ donc $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$.

Application :
$\ln(a^n)=n\ln(a)$
$\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$
Il existe une valeur e telle que $\ln(e)=1$. Cette constante est appelée exponentielle et vaut environ 2,72

Exemple :
Soit $f(x)=\ln\sqrt{(x-1)(x+1)}$. Par calcul, on trouve que $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Pour calculer la dérivée, nous allons d'abord simplifier l'expression.
$f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$. $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}$

4.1.5 Courbe représentative de ln



4.1.6 Fonction logarithme de base a.

Il existe d'autres fonctions logarithmiques qui se déduisent de la fonction ln par un simple changement d'échelle qui se révèle parfois utile dans une représentation graphique de certaines fonctions.

On a vu : $\ln(10^n)=n\ln(10)$ donc $n=\frac{\ln(10^n)}{\ln(10)}$=nombre de zéros dans 10^n.

Déf. : On appelle fonction **logarithme de base** a avec a>0 et a≠1, la fonction $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemples :
$\log_e x = \ln x$ (base e où $e = \exp(1) \approx 2,72$)

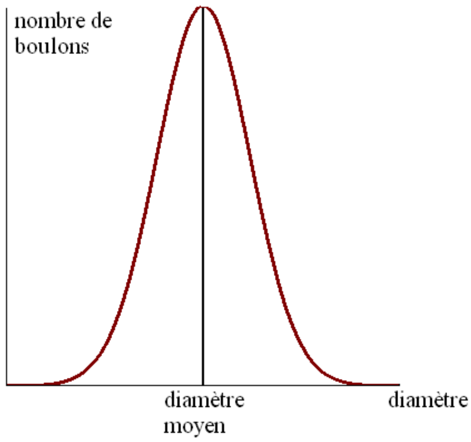
On privilégie souvent la fonction logarithme de base 10 notée log : $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

$\log_{10}(10)=1$ $\log_{10}(100)=2$ $\log_{10}(1000)=3$ $\log_{10}(10^n)=n$

4.2 La fonction exponentielle

Exemple :
Dans une usine, on étudie le diamètre des boulons en sortie d'une chaîne.
On obtient une courbe (nombre de boulons en fonction du diamètre) ayant l'allure suivante.

On s'aperçoit qu'ils sont tous à peu près identiques mais quelques-uns uns ont un diamètre plus petit et d'autres un diamètre plus important.



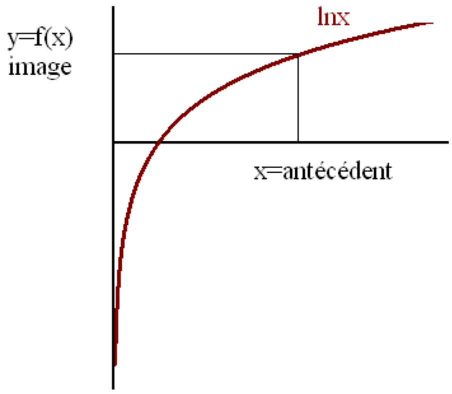
Cette courbe en forme de cloche est appelée gaussienne et joue un rôle primordial en probabilité.

Mathématiquement, $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-moyenne}{\sigma}\right)^2\right]}$ est la fonction gaussienne.

Cette fonction exponentielle se retrouve dans de nombreuses situations.

4.2.1 Fonction inverse de la fonction lnx

La fonction ln(x) est définie sur $]0,+\infty[$ continue, strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty$.
On en déduit que chaque valeur positive à un antécédent et un seul par la fonction ln, elle est donc bijective :
Quelle que soit y, il existe x tel que y=ln(x).
Il existe une fonction inverse



Déf. : On appelle fonction exponentielle la fonction exp : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to]0,+\infty[\\ x\mapsto e^x=\exp(x)\end{array}$ fonction inverse de ln.
On en déduit que $\ln(e^{(x)})=x$ pour x quelconque et $e^{(\ln(x))}=x$ pour x positif.

Remarque : $\exp(a)=e^a$ (l'exponentielle peut être vue comme une puissance du nombre $e \approx 2,72$).

Th. : la fonction exp(x) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée : exp'(x)=exp(x)

Commentaire : La fonction exp a la propriété caractéristique d'être égale à sa dérivée. Ceci peut s'interpréter en disant que la variation de la fonction en un point est proportionnelle à la valeur de la fonction en ce point. Elle apparaît donc naturellement dans de nombreux problèmes de modélisation en économie (placement d'une somme d'argent sur un compte épargne donnant lieu à des intérêts).

4.2.2 Propriétés remarquables et courbe représentative

Prop. : Pour tout réels a et b, on a

$\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ → $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

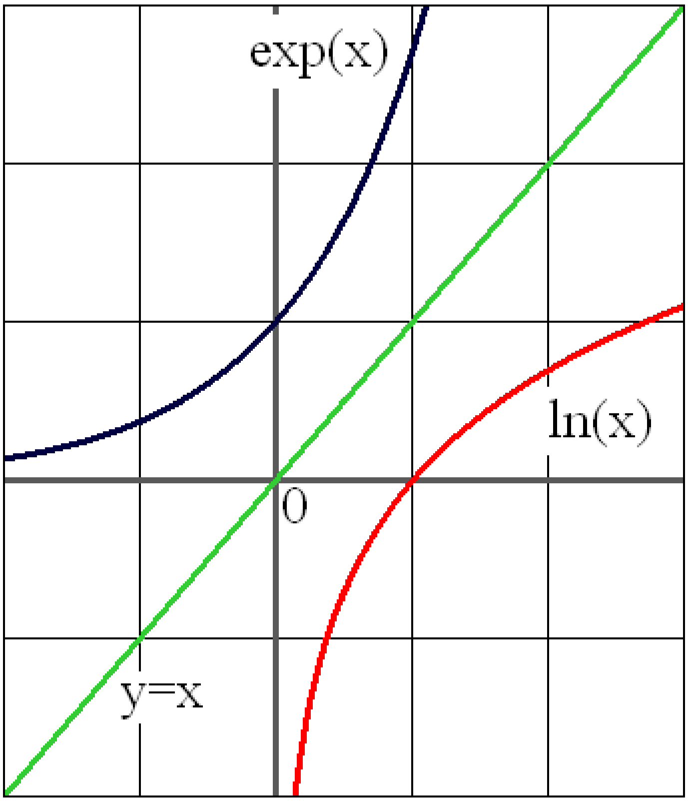
$\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$ → $\ln(1/a)=-\ln(a)$

$\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ → $\ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)$

$\exp(a\times b)=[\exp(a)]^b$

Soit u(x) une fonction dérivable $\left[\exp(u(x))\right]'=u'(x)\times\exp(x)$

Courbes exponentielle et logarithme népérien.



Remarque :
Dans un RON, son graphe est le symétrique orthogonal par rapport à la bissectrice d'équation y=x de celui de la fonction ln(x).

5 Notion d'intégrale

Nous avons vu comment calculer la dérivée d'une fonction. Le calcul intégral permet de faire le cheminement inverse.
En économie, le supplément de dépense qu'il faut consentir pour fabriquer une unité supplémentaire d'un produit est appelé coût marginal. Mathématiquement, cela se traduit par la dérivée.
Le calcul intégral va permettre ainsi de trouver à partir du coût marginal, le coût total.

5.1 Primitives

Définition: On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si pour tout x de I F'(x)=f(x).

Théorème: Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I alors il existe une constante K réelle telle que pour tout x de I, G(x)=F(x)+K.

Exemple :

L'ensemble des primitives de f : $x \rightarrow x$ est l'ensemble des fonctions du type $\frac{1}{2}x^2 + K$ ou K est une valeur quelconque. $\frac{1}{2}x^2+6$ et $\frac{1}{2}x^2-4$ sont des primitives de f.

Si on rajoute une condition particulière : F(4)=10 alors F sera déterminée : F(x)= $\frac{1}{2}x^2+2$: la primitive devient unique.

Tableau récapitulatif:

Fonction	Primitive
a (constante)	ax+K
x	$x^2/2+K$
x^2	$x^3/3+K$
x^n	$x^{n+1}/(n+1)+K$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + K$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+K$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+K$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x+K$
$\frac{u'}{u}$ où u est une fonction	$\ln(u)+K$
e^x	$e^x + K$
$u' \times e^u$ où u est une fonction	$e^u + K$

Exemple :

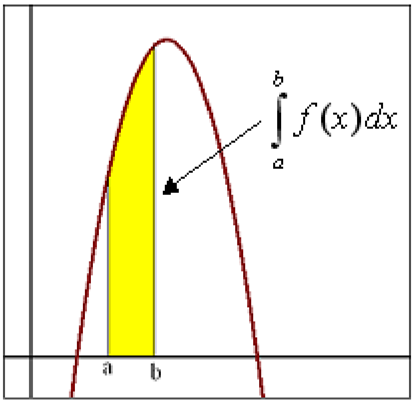
Calculons la primitive de $\frac{3x^2+1}{x^3+x}$.

On voit $\frac{u'}{u}$ où u : $x \rightarrow x^3+x$ donc, on obtient $\ln(x^3+x)+K$

5.2 *Intégrale et traduction graphique*

Définition: soit f une fonction continue sur [a,b], F une primitive de f sur [a,b] alors on pose F(b)-F(a) l'intégrale de f sur [a,b] notation : $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$ où F est une primitive de f sur [a,b].

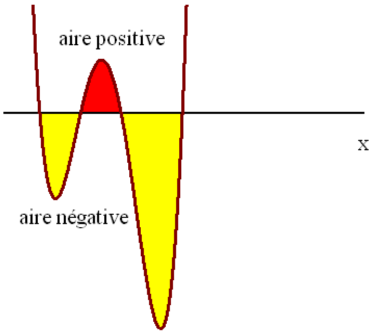
Théorème: L'intégrale de f sur [a,b] définie l'aire sous la courbe de f.



Exemple :

$$\int_1^2 3x+5dx=3\int_1^2 xdx+\int_1^2 5dx=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+[5x]_1^2=3(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2})+(5\times 2-5\times 1)=\frac{19}{2}$$

Remarque :
Attention, il faut prendre en compte le signe de l'aire :



Propriétés :
Linéarité : $\int(af+g)=a\int f+\int g$

Relation de Chasles : $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$

Intégration par parties : $\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$

Exemple :
Retrouvons la primitive de lnx par intégration par parties .

$$\int \ln xdx=\int x'\ln xdx=[x\ln x]-\int x(\ln x)'dx=[x\ln x]-\int x\frac{1}{x}dx=[x\ln x]-[x]$$

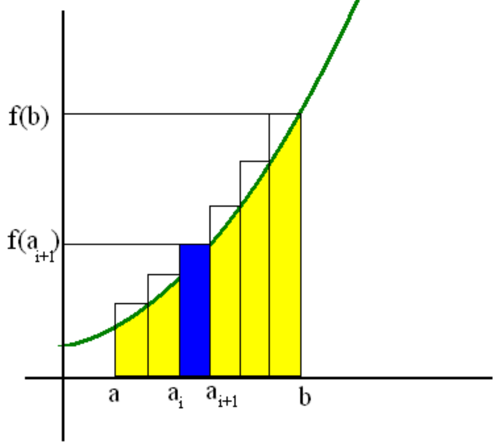
On retrouve le résultat fourni précédemment.

5.3 *Calcul approché d'intégrale*

L'intégrale de f sur [a,b] définit l'aire sous la courbe de f donc pour donner une valeur approchée de l'intégrale, il suffit de donner une valeur approchée de l'aire sous la courbe. De nombreuses méthodes existent, nous n'en citerons qu'une :

Méthode des rectangles :
On décompose l'intervalle [a,b] en tranches, et on constitue des rectangles. Par approximation, l'aire en jaune vaut l'aire des rectangles.

L'aire du rectangle en bleu vaut : $f(a_{i+1})\times(a_{i+1}-a_i)$
On a ainsi un moyen d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale en additionnant les aires des rectangles. Plus les tranches sont fines, meilleure est l'approximation.



6 Fonctions de plusieurs variables

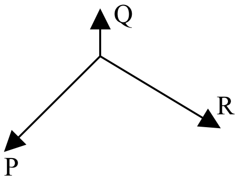
6.1 Notions de base

Jusqu'à présent nous avons étudié des fonctions d'une seule variable. En pratique, on est souvent en présence de nombreuses variables.

Ainsi, la demande Q d'un bien est fonction de son prix P mais aussi du revenu des foyers familiaux R :

$$Q=f(P, R).$$

Pour représenter graphiquement une telle fonction, on place des points dans l'espace à l'aide d'un repère constitué de trois axes : P, Q et R.

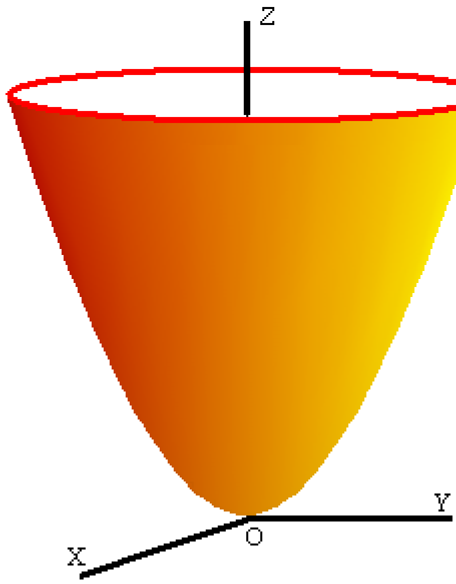


Exemple :

Classiquement, on pose $z = f(x,y)$ pour les fonctions à deux variables x et y.

Soit $f(x,y) = z = x^2 + y^2$.

Une représentation graphique en trois dimensions donne la courbe suivante :



Dérivées partielles

Considérons la fonction f(x,y).

Si on fixe y, on obtient une fonction variant selon x donc d'une seule variable que l'on peut dériver.

On dérive donc f selon x en fixant y : $(\frac{\partial f}{\partial x})_y = f'_x(x,y)$: « dérivée partielle de f selon x »

De même, on a la dérivée de f selon y en fixant x : $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = f'_y(x,y)$: « dérivée partielle de f selon y »

Exemple :

Soit $f(x,y)=3x^2+5xy-y$. Les dérivées partielles valent : $(\frac{\partial f}{\partial x})_y = 6x+5y$ et $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = 5x-1$

Dérivées secondes

Par analogie avec dérivée seconde d'une fonction à une variable, on peut dériver plusieurs fois une fonction de plusieurs variables.

Ainsi $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$ est une fonction de plusieurs variables que l'on peut dériver selon x et y.

On obtient donc en dérivant selon x : $\left(\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})_y}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$

De même, on pourrait dériver selon y $\left(\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})_y}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$

En procédant de même pour $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$,on obtient deux dérivées secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ainsi, on a 4 dérivées secondes dont deux sont identiques car pour des fonctions classiques on a : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$.

Exemple :

Soit f(x,y)= $x \times e^{(x+y)}$

Les dérivées premières : $(\frac{\partial f}{\partial x})_y = (x+1)e^{x+y}$ et $(\frac{\partial f}{\partial y})_x = xe^{x+y}$

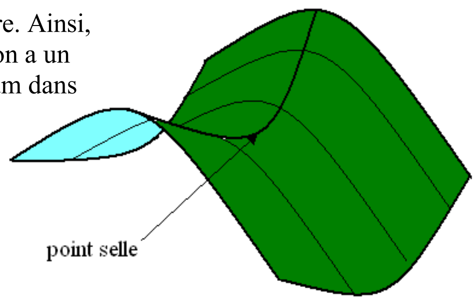
Les dérivées secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x+2)e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x+1)e^{x+y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{x+y}$

6.2 Recherche d'extremums

On recherche les valeurs de x et de y optimisant la valeur f(x,y).
Pour une fonction à une variable, un extremum implique une dérivée nulle. Pour des fonctions à deux variables, la démarche est identique :

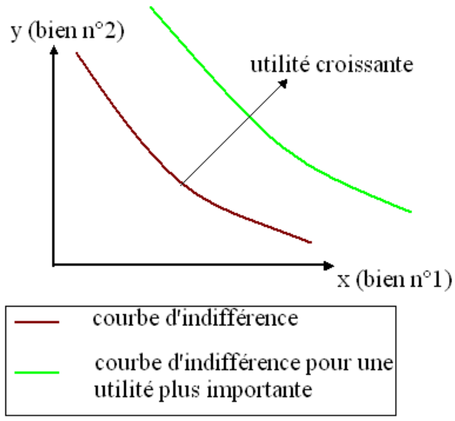
Prop. : Si f admet un extremum en xo et yo alors $\frac{\partial f}{\partial x}(xo, yo) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(xo, yo) = 0$.

La réciproque est fausse.
Plusieurs situations peuvent apparaître. Ainsi, dans la configuration du point selle, on a un minimum dans un sens et un maximum dans l'autre : ce n'est pas un extremum.



6.3 Taux marginal de substitution

En microéconomie, on étudie souvent l'utilité des biens. On détermine une fonction d'utilité U(x,y) où x et y représentent les quantités de deux biens différents et U l'utilité correspondante. On peut alors se demander quelles combinaisons de x et y donnent la même utilité.
Ce sont les **courbes d'indifférence**.
On fixe une valeur d'utilité et on regarde suivant le bien x comment doit être y pour avoir cette même valeur d'utilité.



On définit alors le **taux marginal de substitution** (TMS) comme étant le rapport selon lequel les biens x et y peuvent se substituer l'un à l'autre de sorte que l'utilité globale reste inchangée.

$$\boxed{TMS = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Big/ \frac{\partial U}{\partial y}}$$

Car en notation différentielle pour une fonction à deux variables : $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$ car U est constante.

$\frac{\partial U}{\partial x}$ représente l'utilité marginale du bien x et $\frac{\partial U}{\partial y}$ celle de y.

Bibliographie

- Précis de mathématiques appliqués à la gestion, S. Bisson-Vaivre et C. Ficano, BREAL
- Mathématiques pour la gestion et l'action commerciale, J.P. Barrère et R. Pourret, ECONOMICA.
- Mathématiques : BTS tertiaire Compta. et gestion des org., B Verlant et G. St Pierre, NATHAN.
- Outils mathématiques de gestion, A. Grosdidier, FOUCHER.