Cours de Mathématiques du signal

Options Eln & RLI

Raymond Quéré

IUT du Limousin
Département GEII Brive

Septembre 2012

▽

Cours de Mathématiques du signal enseigné au département GEIII à Brive.

Diverses disciplines du Génie électrique et de l'électronique nécessitent l'utilisation de notions mathématiques spécifiques. En physique toute grandeur évolue au cours du temps de façon quelconque. Elle peut alors être représentée par une fonction de la variable réelle t qui représente le temps. Cependant dans bien des cas on préfère caractériser ces fonctions par le biais de transformations de variables. Ce cours est une introduction aux divers types de transformées que l'on rencontre, à savoir :

- **Les fonctions associées aux signaux**, utilisées pour le calcul des transformées
- **La transformation de Laplace**, principalement utilisée en automatique
- **La transformation de Fourier**, utilisée en traitement du signal électronique

Enfin en physique, en traitement du signal ainsi que dans l'étude de la fiabilité des produits et des processus, les probabilités jouent un très grand rôle. Le dernier chapitre de ce cours sera donc une introduction au calcul des probabilités.

Ce cours est très largement inspiré de celui de Bernard Léry, enseignant de Mathématiques au département GEII de l'IUT du Limousin que j'ai eu l'honneur de remplacer lors de son départ à la retraite.

Sommaire

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre I
Fonctions associées aux signaux

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1 Fonctions complexes de la variable réelle

I.1.1 Définition des fonctions complexes de la variable réelle

Exercices :
Exercice C.1.1

Documents :
Document A.1.2

$$\begin{cases} f & : & t \mapsto f(t) \\ D & \subset & \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{cases}$$

est une fonction complexe de la variable réelle. Elle peut donc se décomposer endeux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui représentent respectivement les parties réelles et imaginaires de $f(t)$.

$$f(t) = x(t) + j\,y(t)$$

Un exemple de représentation de la fonction $f(t)$ dans le plan complexe est donné à la figure I.1.1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

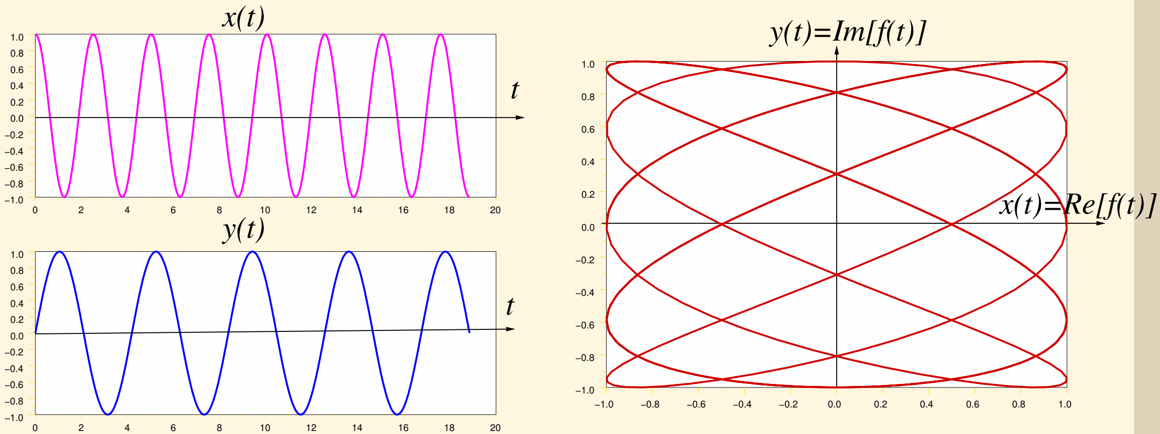


FIGURE I.1.1 – Exemple de fonction complexe de la variable réelle t. $x(t)$ et $y(t)$ sont la partie réelle et imaginaire et on a $f(t) = x(t) + j y(t)$ représentée dans le plan complexe

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Limites et Dérivée d'une fonction complexe

On peut considérer les 2 fonctions réelles de la variable réelle

$$\left\{\begin{array}{l} x : t \longmapsto x(t) \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} y : t \longmapsto y(t) \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}\right.$$

telles que

$$f(t) = x(t) + j\,y(t)$$

Limites d'une fonction complexe

On peut alors définir pour les fonctions complexes de la variable réelle les mêmes notions que pour les fonctions réelles de la variable réelle à condition que l'on puisse définir simultanément ces notions pour la partie réelle x(t) et pour la partie imaginaire y(t).

On dira ainsi que

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a + jb$$

si et seulement si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = b$$

Dérivation d'une fonction complexe

De même

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + j \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soit

$$f'(t_0) = x'(t_0) + j\,y'(t_0)$$

Donc **f sera dérivable si x et y sont dérivables**.

En particulier cherchons la dérivée de e^{zt} avec $z = \alpha + j\beta$

$$(e^{zt})' = \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t + j\beta t}\right) = \frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + j\sin\beta t\right)\right]$$

$$\begin{aligned}(e^{zt})' &= \alpha e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + j\sin\beta t\right) + \beta e^{\alpha t}\left(-\sin\beta t + j\cos\beta t\right)\\ &= \left(\alpha + j\beta\right)\left(e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + j\sin\beta t\right)\right)\end{aligned}$$

Et finalement on a :

$$(e^{zt})' = ze^{zt}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 Intégration d'une fonction complexe

Formule d'intégration

Enfin

$$\int f(t)dt = \int x(t)dt + j\int y(t)dt = F(t) + K \quad avec \quad K \in \mathbb{C}$$

Pour e^{zt} avec $z = \alpha + j\beta$ nous avons

$$e^{zt} = e^{\alpha t + j\beta t} = e^{\alpha t}e^{j\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + j\sin\beta t)$$

On montre en intégrant par parties que

$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta t + \alpha\cos\beta t) + K_1$$

$$\int e^{\alpha t}\sin\beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) + K_2$$

et tous calculs faits

$$\int e^{zt}dt = \frac{1}{z}e^{zt} + K$$

Les formules de dérivation et d'intégration se généralisent

Convergence des intégrales

1. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} x(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} y(t)dt$ convergent.

2. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument si et seulement si $\int_a^{+\infty} x(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} y(t)dt$ convergent absolument

En particulier considérons

$$I_p = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$$

où $p = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ Soit

$$I_p(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\left[e^{-pt}\right]_0^{t_1} = \frac{1}{p}\left[1 - e^{-pt_1}\right]$$

On a : $e^{-pt_1} = e^{-\alpha t_1} \cdot e^{-j\beta t_1}$. D'où $\left|e^{-pt_1}\right| = \left|e^{-\alpha t_1}\right| \quad \text{car} \quad \left|e^{-j\beta t_1}\right| = 1$

L'intégrale convergera si $\alpha > 0$ et ceci $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha = \Re(p)$) car $\lim_{t_1 \to +\infty} e^{-\alpha t_1} = 0$.

La région de convergence est le demi-plan tel que $\Re(p) > 0$. D'où

$$p \in \mathbb{C} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \quad \text{si} \quad \Re(p) > 0$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Séries de Fourier

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.1 Définitions

Séries trigonométriques

On appelle série trigonométrique une série de fonction dont le terme général est du type
$u_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad a_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} b_n \in \mathbb{R}$
La série s'écrit donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \cdots\cdots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t + \cdots$$

Le terme général a pour période $T_n = 2\pi/n\omega$. Si la série converge sa somme sera donc périodique de période $T = 2\pi/\omega$.

On a la majoration $|u_n(t)| \leq |a_n| + |b_n|$ et donc si les séries $\sum_0^{+\infty} a_n$ et $\sum_0^{+\infty} b_n$ sont normalement convergentes, la série trigonométrique $\sum_0^{+\infty} u_n(t)$ est absolument convergente et donc uniformément convergente.

Dans ce cas sa fonction somme u(t) est continue, dérivable et intégrable terme à terme.

Développement d'une fonction en série de Fourier

Exercices :
Exercice C.1.2
Exercice C.1.9

Si $u(t)$ est une fonction périodique, de période $T = 2\pi/\omega$ intégrable sur tout fermé de $\mathbb{R}$. Alors on appelle

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

série de Fourier de $u(t)$ la série trigonométrique telle que :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

dont les coefficients sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)\cos n\omega t dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)\sin n\omega t dt
\end{aligned}$$

Ecriture complexe de la série de Fourier

On pose

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

On a

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)e^{-j2\pi nft}dt$$

Il vient alors

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi nft}$$

$u(t)$ est une combinaison linéaire infinie des fonctions $e^{jn\omega t}$

Théorème de Dirichlet

Si u est une fonction périodique, de période $T = 2\pi/\omega$ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. $u(t)$ est continue sur tout intervalle $]\alpha, \alpha + T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.
2. $u(t)$ admet en tout point de $]\alpha, \alpha + T]$ une dérivée à droite et à gauche.

Alors la série de Fourier de $u(t)$ est convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme

$$\frac{1}{2}[u(t+0) + u(t-0)]$$

En particulier en tout point où u est continue

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

(u(t +0) est la limite à droite de u en t)

Les séries de Fourier peuvent donc être utilisées pour représenter les signaux périodiques et les signaux à durée limitée.

L'idée de base du développement en série de Fourier est qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux harmoniques.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Bases de fonctions

Exercices :
Exercice C.1.7

Produit scalaire généralisé

Soit $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions complexes intégrables sur $[\alpha, \alpha + T]$.
L'application

$$\begin{cases} <\cdot/\cdot>: (f,g) \mapsto <f/g>= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, g^*(t) dt \\ \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{C} \end{cases}$$

possède les propriétés suivantes :

p1 $<(f_1 + \lambda f_2)/g>=<f_1/g> + \lambda <f_2/g> \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\ \forall\, (f_1, f_2, g) \in \mathbb{E}^3$

p2 $<g/f>=<f/g>^*$

p3 $<f/f>= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 dt \geq 0$

Par analogie avec le **produit scalaire** on dit que $<f/g>$ est un produit scalaire généralisé (ou produit Hermitien). On lui associe alors la norme $\|f\| =<f/f>^{\frac{1}{2}}$ et si $<f/g>= 0$ les deux fonctions sont dites orthogonales. Enfin si $\|f\| = 1$ f est dite unitaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Bases de fonctions

Base des fonctions trigonométriques

Soit f une fonction de période T développable en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Ce développement peut s'interpréter comme l'expression de f en une combinaison linéaire infinie de fonctions φ_n telles que

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega t}$$

Montrons que ces fonctions φ_n forment une base orthonormée relativement au produit scalaire généralisé.

Pour les fonctions φ_n telles que $\varphi_n(t) = e^{jn\omega t}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$<\varphi_n/\varphi_m>= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e^{jn\omega t}e^{-jm\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e^{j(n-m)\omega t}dt$$

Donc :

$$\begin{cases} \text{si } n \neq m & <\varphi_n/\varphi_m>= 0 \\ \text{si } n = m & <\varphi_n/\varphi_n>= \|\varphi_n\|^2 = 1 \end{cases}$$

La base des fonctions φ_n pour $n \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Le coefficient de Fourier complexe c_n est la coordonnée de f relativement à φ_n

$$c_n =< f/e^{jn\omega t} >= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-jn\omega t}dt$$

Formule de Bessel Parseval

On a

$$< f/f >=< \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} / \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\omega t}) >$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Donc

$$< f/f >= \sum_{n \neq m} c_n c_m^* (e^{jn\omega t}/e^{jm\omega t}) + \sum_{n=m} c_n c_m^* (e^{jn\omega t}/e^{jm\omega t})$$

or

$$< e^{jn\omega t}/e^{jm\omega t} >= \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ 1 & si \quad n = m \end{cases}$$

D'où $\|f\|^2 = (f/f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

or

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} et |c_0|^2 = a_0^2$$

La formule de Bessel-Parseval permet d'exprimer la puissance transportée par le signal $f(t)$ en fonction des coefficients de sa décomposition en série de Fourier

$$\text{Puissance}(f) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3 Convolution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3.1 Définitions et propriétés

Définition

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle *produit de convolution de f par g* la fonction notée $f \star g$, définie par l'intégrale supposée convergente

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) g(t-\theta) d\theta$$

Dans le cas particulier où les fonctions f et g sont nulles sur$\mathbb{R}^-$ on obtient :

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(\theta) g(t-\theta) d\theta$$

En effet

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{0} f(\theta) g(t-\theta) d\theta + \int_0^t f(\theta) g(t-\theta) d\theta + \int_t^{+\infty} f(\theta) g(t-\theta) d\theta$$

La première intégrale est nulle car $f(\theta) = 0$ pour $\theta < 0$, la troisième intégrale est également nulle car $g(t-\theta) = 0$ pour $\theta > t$.

Propriétés

$$\begin{aligned}
&f \star (g_1 + \lambda g_2) = f \star g_1 + \lambda (f \star g_2) \\
&(f_1 + \lambda f_2) \star g = f_1 \star g + \lambda (f_2 \star g) \\
&f \star g = g \star f
\end{aligned}$$

Le produit de convolution qui au couple (f , g) fait correspondre $f \star g$ est bilinéaire et symétrique
Soit par exemple

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$(g \star f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) f(t-\theta) d\theta$$

en posant $t-\theta = u$, donc $-d\theta = du$ on a :

$$(g \star f)(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} g(t-u) f(u)(-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du = (f \star g)(t)$$

On démontre sous réserve de convergence des intégrales correspondantes que

$$\begin{array}{l} (f \star g) \star h = f \star (g \star h) \\ (f \star g)' = f' \star g = f \star g' \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3.2 Interprétation graphique

Convolution exponentielle porte

Soit
$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) g(t-\theta) d\theta$$
Pour t donné l'intégrale de convolution peut s'interpréter graphiquement comme une aire.

Le procédé est particulièrement commode lorsque l'une des fonctions est un échelon ou une porte.

Le graphe de $\theta \mapsto g(t-\theta)$ s'obtient à partir du graphe de $\theta \mapsto g(\theta)$ par symétrie par rapport à Oy puis avec un " retard " de t (car $g(t-\theta) = g[-(\theta - t)]$).

Le graphe de la fonction produit $\theta \mapsto f(\theta) \cdot g(t-\theta)$ est donné à la figure I.3.2 suivant les valeurs de t

On en déduit alors le graphe de la foncion de convolution $(f \star g)(t)$ à la figure I.3.3 qui représente l'aire A hachurée.

L'expression de la fonction de convolution est donc :

$$(f \star \Pi)(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{1}{2T} \cdot t \cdot (2T - t) & si \quad 0 < t \leq T \\ \frac{1}{2T} \cdot (2T - t)^2 & si \quad T < t \leq 2T \\ 0 & si \quad t > 2T \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

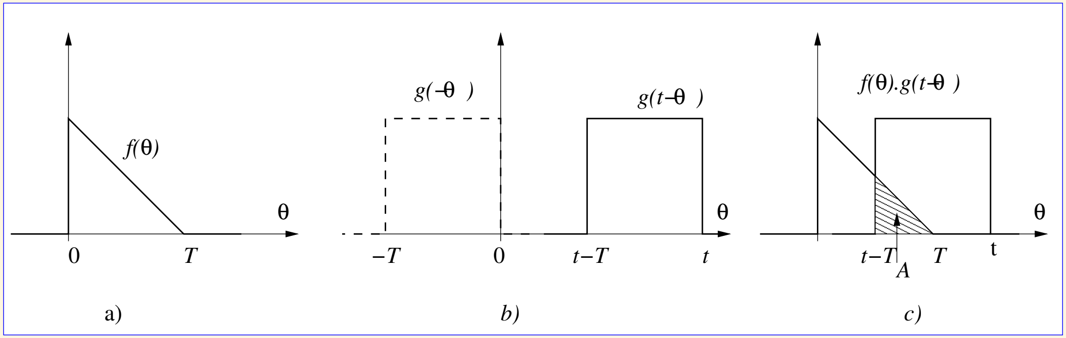


FIGURE I.3.2 – Graphe de la fonction produit $f(\theta)\cdot g(t-\theta)$: a- fonction $f(\theta)$, b- fonctions $g(-\theta)$ et $g(t-\theta)$, c- fonction produit

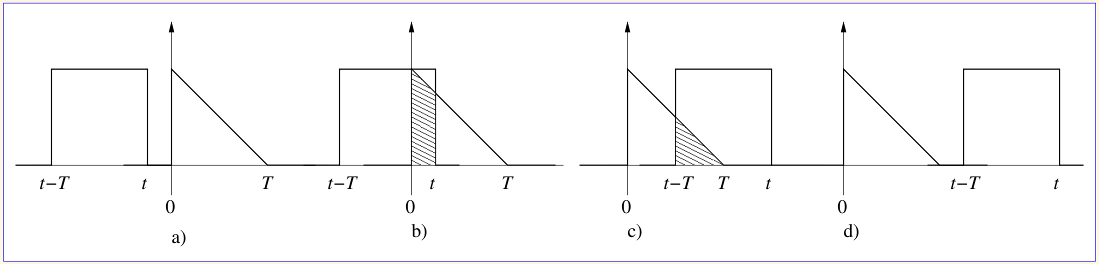


FIGURE I.3.3 – Graphe de la fonction de convolution dans les 4 cas possibles : a) $t<0$; b) $0\leq t\leq T$; c) $T<t\leq 2T$; d) $t>T$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

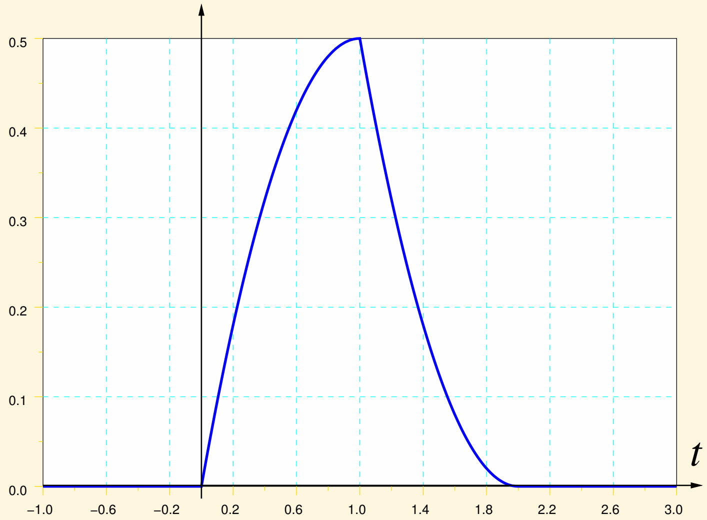


FIGURE I.3.4 – Graphe de $(f \star \Pi)(t)$: fonction résultant de la convolution d'une exponentielle par une porte

I.4 Principales fonctions utilisées en traitement du signal

I.4.1 Fonctions de test

Exercices :
Exercice C.1.4
Exercice C.1.5
Exercice C.1.6

Support d'une fonction

On appelle support d'une fonction l'intervalle $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}$ à l'intérieur duquel la fonction f n'est pas identiquement nulle.

$$t \notin \mathbb{D} \Rightarrow f \equiv 0$$

Par exemple le support des fonctions représentées à la figure I.4.5 est l'intervalle $\mathbb{D} = [t_1, \quad t_2]$

Propriétés

Soit $\varphi_{\theta,t_0}(t) \quad \mathbb{D} = [t_0 \quad t_0 + \theta]$ une fonction de test elle satisfait les propriétés suivantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\theta,t_0}(t)dt = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\theta,t_0}(t)x(t)dt = x(t_0)$$

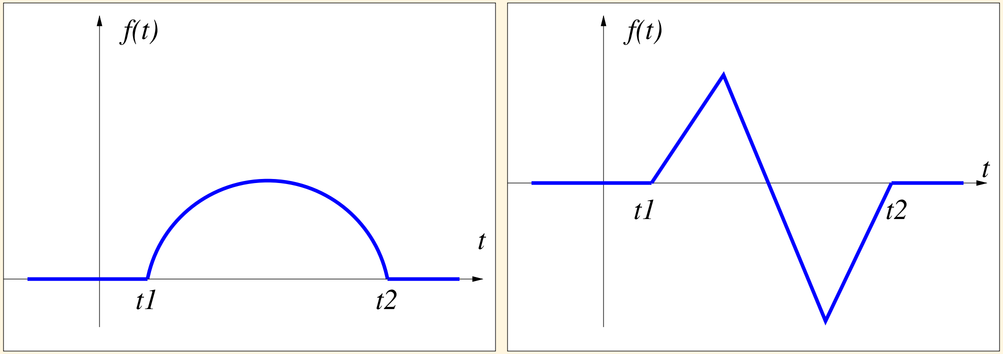


FIGURE I.4.5 – Support de fonctions

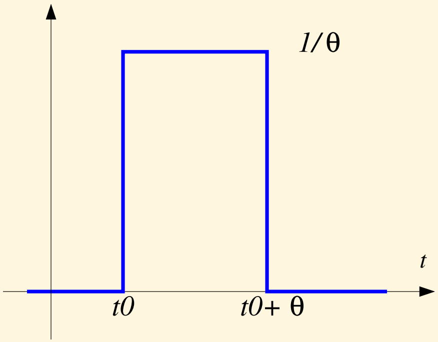


FIGURE I.4.6 – Exemple de fonction porte

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.2 Interprétation physique

Supposons que l'on veuille mesurer une grandeur physique analogique. Comme à toute grandeur analogique , se superpose une composante de bruit on prendra une moyenne de cette grandeur pendantun temps θ. Par exemple si on veut mesurer un courant I on peut utiliser le montage de la figure I.4.7. A l'instant t_0 on ferme l'interrupteur K pendant la durée θ, la tension lue par le voltmètre sera donc :

$$V_m = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+\theta} I dt + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+\theta} i_n(t) dt$$

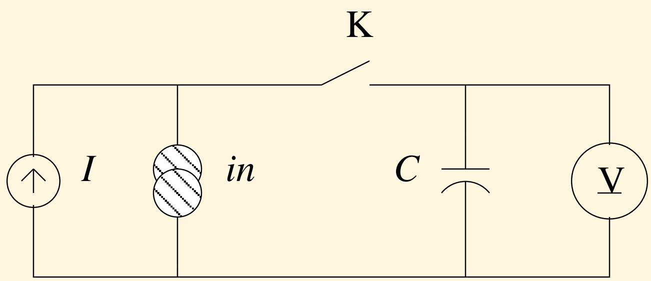


FIGURE I.4.7 – Mesure dun courant électrique superposé à un bruit

Si I est un courant constant la mesure sera donnée par

$$V_m = \frac{I\theta}{C} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+\theta} i_n(t) dt$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

le second terme représente la valeur moyenne du bruit qui tend vers 0 lorsque θ augmente. La mesure sera donc d'autant plus précise que θ sera grand.

Dans un cas plus général la durée d'une mesure est toujours non nulle (car il faut une certaine énergie pour identifier une grandeur). Il en résulte que la grandeur mesurée est la valeur moyenne estimée pendant le temps d'observation θ. Si $x(t)$ est la fonction représentant la grandeur physique, sa mesure est donnée par

$$X = \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)P_{\theta,t_0}(t)dt$$

où $P_{\theta,t_0}(t)$ est la fonction "porte" de largeur θ et de retard t_0 définie par :

$$P_{\theta,t_0}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & \text{si } t \in [t_0, t_0+\theta] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0, t_0+\theta] \end{cases}$$

Interprétation physique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.3 Autres fonctions de test

Toute fonction satisfaisant les propriétés énoncées précédemment peut être utilisée comme fonction de test

On peut citer :

Fonction exponentielle unilatérale

Fonction exponentielle bilatérale

Fonction Gaussienne

Fonction Triangle

Fonction Sinus cardinal

Fonction Sinus cardinal carré

Documents :
Document A.1.1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre II
Transformation de Laplace

Documents :
Document A.2.2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1 Intégrale de Laplace

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.1 Définition

Soit $u : t \mapsto u(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et supposée nulle pour $t < 0$ (Le signal u est alors dit causal).

On appelle *Transformée de Laplace de* $u(t)$ la fonction U de la variable complexe définie par

$$\boxed{U(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t) dt}$$

On note $U(p) = \mathscr{L}[u(t)]$. $\mathscr{L}$ signifiant la transformée de Laplace(Soit $\mathscr{L} : u(t) \mapsto U(p)$).

La transformée de Laplace n'existe que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t) dt$ est convergente.

Pour cela on est amené à imposer deux conditions à u :

1. être continue par morceaux sur tout fermé $[0, t_1]$.
2. être d'ordre exponentiel à l'infini, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ et σ tels que $|u(t)| < M \cdot e^{\sigma t}$ pour $t > t_0$. On démontre alors que si les hypothèses précédentes sont vérifiées la transformation de Laplace est définie pour $p > \sigma$ ou si p est complexe pour $\Re(p) > \sigma$. La région de convergence de $U(p)$ est donc l'ouvert $]\sigma, +\infty[$ ou le demi plan complexe défini par $\Re(p) > \sigma$.

Les conditions imposées à u ne sont que suffisantes. Elles sont toutefois vérifiées pour les fonctions que nous allons étudier

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

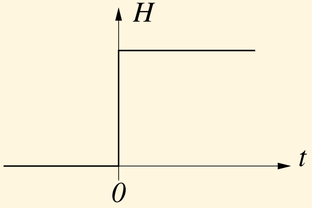
II.1.2 Exemples

Pour un certain nombre de fonctions élémentaires le calcul de la tranformation de Laplace est simple.

Fonction échelon unité

Elle est définie par :

$$\mathscr{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



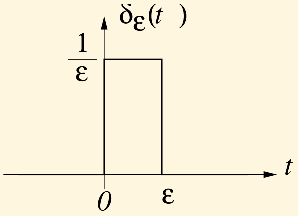
Alors $U(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p}$ si $\Re(p) > 0$. Donc

$$\mathscr{L}[\mathscr{H}(t)] = \frac{1}{p} \text{ si } \Re(p) > 0$$

Impulsion de Dirac."Fonction" impulsion unité.

Soit la famille de fonctions définie par

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } t \in [0, \varepsilon[\\ 0 & \text{si } t \notin [0, \varepsilon[\end{cases}$$

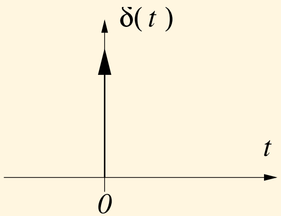


On remarque que $\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon(t)dt = 1$

Si ε tend vers 0, la limite des fonctions u_ε, qui n'est pas une fonction, définit la '**distribution**' de Dirac notée $\delta(t)$ qui sert à représenter en physique une action qui s'exerce durant un temps très court(impulsion).

L'écriture et la représentation symbolique de la distribution de Dirac est donnée ci dessous.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{indeterminé} & t = 0 \end{cases} \quad 0 \ \text{avec} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



On a

$$\mathscr{L}[u_\varepsilon(t)] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-pt}dt = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\varepsilon = \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$$

or $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1-e^{-u}}{u} = 1$ d'où

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

Fonctions puissances entières

Soit

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

c'est à dire $u_n(t) = t^n \cdot \mathscr{H}(t)$

Alors

$$U_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt = I_n$$

En intégrant par partie, en posant $u = t^n$ et $dv = e^{-pt}dt$ nous avons

$$I_n = \frac{-1}{p}\left[t^n e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt$$

Si $\Re(p) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^n \cdot e^{-pt} = 0$, on a alors la relation $I_n = \frac{n}{p} I_{n-1}$
c'est à dire $I_n = \frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p} \times \frac{n-2}{p} \times \cdots\cdots \times \frac{1}{p} \times I_0$

Or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$ d'où finalement

$$\mathscr{L}[t^n \mathscr{H}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \text{avec} \quad \Re(p) > 0$$

Cas des puissances non entières

Plus généralement on démontre que si $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\mathscr{L}[t^\alpha \mathscr{H}(t)] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

avec

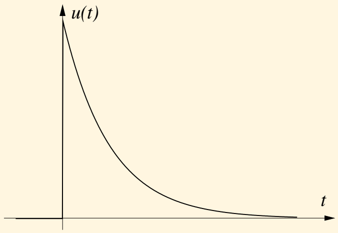
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}dt \quad \alpha > 0$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Fonctions exponentielles

$$u(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}$$



Soit

$$U(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt$$

or

$$\left|e^{-(p+a)t}\right| = \left|e^{-Re((p+a)t)}\right|$$

d'où si $\Re((p+a)t) > 0$ c'est à dire si

$$\Re(p) > -\Re(a)$$

on a

$$\mathscr{L}[e^{-at}\mathscr{H}(t)] = \frac{1}{p+a}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Propriétés de la Transformation de Laplace

II.2.1 Propriétés

Exemples :
Exemple B.1.1
Exemple B.1.2
Exemple B.1.3
Exemple B.1.4
Exemple B.1.5

Exercices :
Exercice C.2.1
Exercice C.2.2
Exercice C.2.3
Exercice C.2.4
Exercice C.2.5

Linéarité

Il résulte des propriétés de l'intégrale que la transformation de Laplace est linéaire

$$\mathcal{L}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(u_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(u_2)$$

Transformée de $u(at)$: Changement d'unité

Soit $g(t) = u(at)$ avec $a > 0$.

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(at)dt$$

On pose alors $at = x$, on a

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{a}\int e^{-\frac{p}{a}x} u(x)dx = \frac{1}{a}U\left(\frac{p}{a}\right)$$

Donc

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[u(at)] = \frac{1}{a}U\left(\frac{p}{a}\right)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Transformée de $u(t-a)$ Théorème du retard

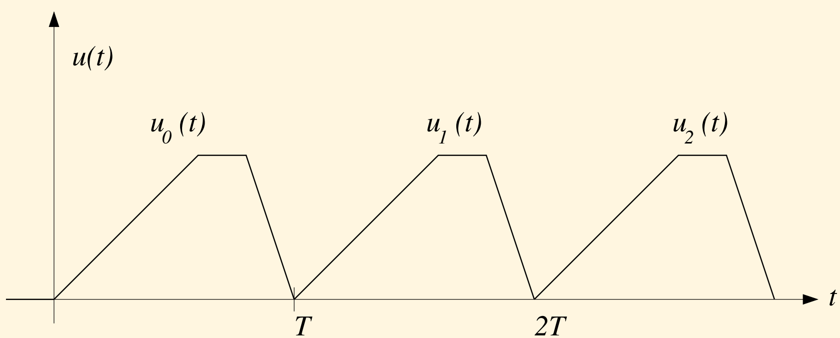
Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(t) = & u(t-a) \quad \text{si} \quad t \geq a \\ g(t) = & 0 \quad \text{si} \quad t < a \end{cases}$$

$\mathscr{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t-a)dt$
En posant x = t-a on a $\mathscr{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p(x+a)} u(x)dx$
Soit $\mathscr{L}[g(t)] = e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{ax} u(x)dx = e^{-pa} U(p)$
(e^{-pa} est le facteur de retard)
Donc :

$$\mathscr{L}[u(t)] = U(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}[u(t-a)] = e^{-pa} U(p)$$

Transformée d'une fonction périodique



u périodique pour $t > 0$ et de période T(u nulle pour $t < 0$)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Propriétés

Soit $\begin{cases} u_0(t) = & u(t) & \text{si} & t \in [0,T] \\ u_0(t) = & 0 & \text{si} & t \notin [0,T] \end{cases}$ Alors $u_n(t) = u_0(t-nT)$ pour $n \geq 1$

On a $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ et en appliquant la linéarité et le théorème du retard, il vient

$$U(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \mathscr{L}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)] = \sum_{0}^{+\infty} \mathscr{L}[u_n(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT} \mathscr{L}[u_0(t)]$$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1-e^{-pt}}$ si $\left|e^{-pt}\right| < 1$ c'est à dire pour Re(p) > 0 (Série géométrique)
D'où

$$U(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{\mathscr{L}[u_0(t)]}{1-e^{-pT}} = \frac{U_0(p)}{1-e^{-pT}}$$

Il suffit de connaître la transformée U_0 de la fonction u_0 qui coïncide avec $u(t)$ sur $[0,T]$.

Tranformée d'une fonction définie par morceaux

Considérons la fonction triangle $u(t)$ représentée à la figure II.2.1. Cette fonction peut être définie par morceaux et résulte de la somme de deux fonction élémentaires. On a

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

où

$$u_1(t) = \frac{t}{\tau}\mathscr{H}(t)$$
$$u_2(t) = \frac{-2(t-\tau)}{\tau}\mathscr{H}(t-\tau)$$
$$u_3(t) = \frac{t-2\tau}{\tau}\mathscr{H}(t-2\tau)$$

En utilisant les théorèmes de linéarité et du retard on a

$$\mathscr{L}[u(t)] = \mathscr{L}[u_1(t)] + \mathscr{L}[u_2(t)] + \mathscr{L}[u_3(t)]$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et comme $u_2(t) = -2u_1(t-\tau)$, $u_3(t) = u_1(t-2\tau)$ et $\mathscr{L}[u_1(t)] = \dfrac{1}{\tau p^2}$ onobtient

$$U(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{1-2e^{-\tau p}+e^{-2\tau p}}{\tau p^2} = \frac{(1-e^{-\tau p})^2}{\tau p^2}$$

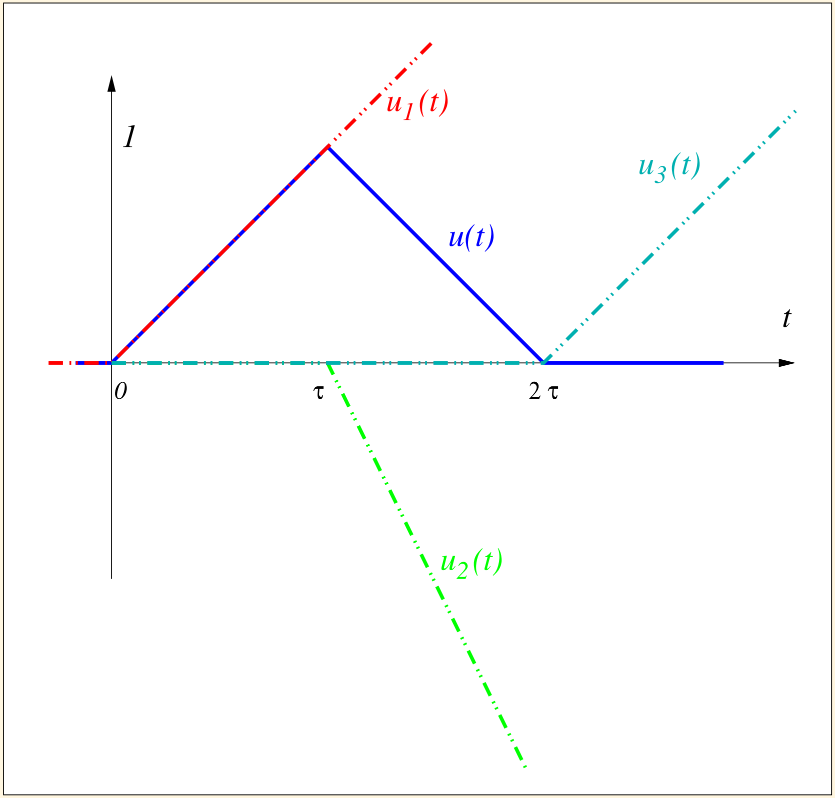


FIGURE II.2.1 – Décomposition d'une fonction en morceaux

II.2.2 Transformées de la dérivée et de la primitive d'une fonction $u(t)$

Soit $u(t)$ une fonction telle que $\mathscr{L}[u(t)] = U(p)$ et dont la dérivée $u'(t)$ est continue par morceaux sur tout fermé $[0, t_0]$.

Alors

$$\mathscr{L}[u'(t)] = pU(p) - u(0^+)$$

En effet $\mathscr{L}[u'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u'(t)dt$ et en intégrant par parties il vient

$$\mathscr{L}[u'(t)] = [e^{-pt} u(t)]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t)dt$$

or $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} u(t) = 0$ et donc $[e^{-pt} u(t)]_0^{+\infty}$ = -u(0^+) avec $u(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} u(t)$

Généralisation

Si u'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème on a

$$\mathscr{L}[u''(t)] = p\mathscr{L}[u'(t)] - u'(0^+) = p[p[\mathscr{L}[u(t)] - u(0^+)] - u'(0^+)$$

Soit

$$L[u''(t)] = p^2 U(p) - pu(0^+) - u'(0^+)$$

et plus généralement :

$$\mathscr{L}[u^{(n)}(t)] = p^n U(p) - p^{n-1} u(0^+) - p^{n-2} u'(0^+) \cdots - u^{(n-1)}(0^+)$$

Dériver $u(t)$ correspond à multiplier $U(p)$ par p

On peut alors considérer que la transformation de Laplace remplace le produit symbolique de u par l'opérateur $\dfrac{d}{dt}$ par le produit algébrique de U par p . $\dfrac{du}{dt} \leftrightarrow pU$, propriété largement exploitée dans l'intégration des équations différentiellles.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème de la valeur initiale

Nous avons $\mathcal{L}[u'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u'(t)dt = pU(p) - u(0^+)$ avec $(p \in \mathbb{R}^+)$
Or $t > 0 \Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} e^{-pt} = 0$
et en admettant que $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} u'(t)dt = 0$ (car fonction intégrable)
Alors

$$\lim_{p\to+\infty} pU(p) = u(0^+) = \lim_{t\to 0^+} u(t)$$

Théorème de la valeur finale

$\lim\limits_{p\to 0} e^{-pt} = 1$
et en admettant que $\lim\limits_{p\to 0} \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} u'(t)dt = u(+\infty) - u(0^+)$
Alors

$$\lim_{p\to 0} pU(p) = u(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} u(t)$$

Transformée de la primitive d'une fonction $u(t)$

Si $\mathcal{L}[(u(t)] = U(p)$ Alors

$$\mathcal{L}[\left[\int_0^t u(x)dx\right] = \frac{U(p)}{p} + \frac{1}{p}\lim_{t\to 0_+}\int_0^t u(x)dx$$

En effet en posant

$$g(t) = \int_0^t u(x)dx$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et

$$g(0^+) = \lim_{t \to 0_+} \int_0^t u(x) dx$$

(conditions initiales)
et en appliquant à g le théorème sur la transformée de la dérivée
on a

$$\mathscr{L}[g'(t)] = p\mathscr{L}[g(t)] - g(0^+)$$

Par ailleurs $\mathscr{L}[g'(t)] = \mathscr{L}[u(t)] = U(p)$ d'où $\mathscr{L}[g(t)] = \dfrac{U(p)}{p} + \dfrac{1}{p} g(0^+)$

Remarque Si $g(0^+) = 0$ Alors

$$\mathscr{L}[\int_0^t u(x) dx] = \frac{U(p)}{p}$$

et intégrer u c'est diviser U par p

II.3 Transformation de Laplace inverse

II.3.1 Définition, Propriétés

Exemples :
Exemple B.1.6

Soit U la transformée de Laplace de u.
On appelle transformée de Laplace inverse ou Original de U la fonction u.
On note

$$u(t) = \mathscr{L}^{-1}[U(p)]$$

On démontre que si les fonctions u considérées sont
- continues par morceaux sur tout fermé $[0, t_0]$
- d'ordre exponentiel à l'infini

L'original u d'une fonction U est unique sur tout sous-ensemble où il est continu.

Linéarité de la transformation de Laplace inverse

La réciproque d'une application linéaire est linéaire.
Donc $\mathscr{L}^{-1}(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) = \lambda_1 \mathscr{L}^{-1}(U_1) + \lambda_2 \mathscr{L}^{-1}(U_2)$
Ainsi $\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^3} - \frac{4}{p+1}) = (\frac{1}{2}t^2 - 4e^{-t})U(t)$

Original d'une fraction rationnelle.

Pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $U(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ on utilise la décomposition en éléments simples.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple

$$U(p) = \frac{p+1}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

Le calcul donne $A = \frac{1}{4} B = \frac{1}{4} C = -\frac{1}{4} D = -\frac{1}{4}$ d'où

$$\mathscr{L}^{-1}[U(p)] = u(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^2}) + \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p}) - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+4}) - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+4})$$

Soit

$$u(t) = (\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} \quad \frac{\sin 2t}{2})\mathscr{H}(t)$$

Original de $U(ap)$ $(a>0)$.

Soit $u(t)$ l'original de $U(p)$ c'est à dire $u(t) = \mathscr{L}^{-1}[U(p)]$.
On a

$$U(ap) = \int_0^{+\infty} e^{-apt} u(t)dt$$

En posant $at = x$, alors $adt = dx$ et pour $t = 0$,$x = 0$ et pour $t = +\infty$, $x = +\infty$
Il vient

$$U(ap) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-px} u(\frac{x}{a})dx$$

d'où si $u(t) = \mathscr{L}^{-1}[U(p)]$ Alors

$$\mathscr{L}^{-1}[U(ap)] = \frac{1}{a}u(\frac{t}{a})$$

Original de $U(p+a)$

Soit $u(t) = \mathscr{L}^{-1}[U(p)]$. On a

$$U(p+a) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} u(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}[e^{-at}u(t)]dt$$

$U(p+a)$ est donc l'image de $e^{-at}u(t)$. Soit
Si

$$u(t) = \mathscr{L}^{-1}[U(p)]$$

Alors

$$\mathscr{L}^{-1}[U(p+a)] = e^{-at}u(t)$$

Exemples

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}\right) = e^{-at}\cos\omega t\mathscr{H}(t) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}\right) = e^{-at}\sin\omega t\mathscr{H}(t) \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.3.2 Original de $U'(p)$ et de $\int_p^\infty U(p)dp$

Exemples :
Exemple B.1.7
Exemple B.1.8

Original de $U'(p)$

Soit la fonction $u(t)$ dont la Transformée de Laplace est :

$$U(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt$$

On peut dériver l'expression précédente par rapport à p, on obtient alors

$$U'(p) = \frac{d}{dp}\left[\int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt\right] = \int_0^\infty u(t)\frac{d[e^{-pt}]}{dp}dt$$

d'où

$$U'(p) = \int_0^\infty -tu(t)e^{-pt}dt$$

et finalement :

$$\mathscr{L}[-t\cdot u(t)] = \frac{dU(p)}{dp} = U'(p)$$

En itérant la dérivation par rapport à p on obtient :

$$\mathscr{L}[(-1)^n t^n \cdot u(t)] = \frac{d^n U(p)}{dp^n} = U^{(n)}(p)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Original de $\int_p^\infty U(p)dp$

Soit la fonction $u(t)$ dont la Transformée de Laplace est :

$$U(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt$$

On peut intégrer l'expression précédente par rapport à p, on obtient alors

$$\int_p^\infty U(p)dp = \int_p^\infty \left[\int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt\right]dp$$

d'où en intervertissant l'ordre d'intégration

$$\int_p^\infty U(p)dp = \int_0^\infty u(t)\left[\int_p^\infty e^{-pt}dp\right]dt = \int_0^\infty u(t)\frac{[e^{-pt}]_p^\infty}{t}dt = \int_0^\infty \frac{u(t)}{t}e^{-pt}dt$$

et finalement :

$$\mathscr{L}[\frac{u(t)}{t}] = \int_p^\infty U(p)dp$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.3.3 Produit de convolution et transformation de Laplace.

Exemples :
Exemple B.1.9

Le produit de convolution de deux fonctions f et g nulles sur $]-\infty, 0[$ est la fonction h $= f \star g$ définie par

$$h(t) = (f \star g)(t) = \int_0^t f(\theta) g(t-\theta) d\theta$$

$(t > 0, t - \theta > 0$ donc $\theta \in [0, t]$ par suite

$$H(p) = \int_0^{+\infty} [\int_0^{+\infty} f(\theta) g(t-\theta) d\theta] e^{-pt} dt$$

Nous admettrons que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations. Alors

$$H(p) = \int_0^{+\infty} f(\theta) d\theta \int_0^{+\infty} g(t-\theta) e^{-pt} dt$$

or

$$\int_0^{+\infty} g(t-\theta) e^{-pt} dt = e^{-p\theta} G(p)$$

et ainsi

$$H(p) = \int_0^{+\infty} f(\theta) e^{-p\theta} G(p) d\theta = G(p) \int_0^{+\infty} f(\theta) e^{-p\theta} d\theta = G(p) \times F(p)$$

Théorème II.3.1. *La transformée de Laplace d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Laplace de chaque facteur*

$$\mathscr{L}[(f \star g)(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \times \mathscr{L}[g(t)]$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Inversement l'original du produit de deux fonctions est le produit de convolution desoriginaux

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)] \times G(p)] = (f \star g)(t)$$

Remarques

On montre que

$$f * g = g * f$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$\lambda f * g = \lambda(f * g)$$

II.4 Application de la Transformation de Laplace aux équations différentielles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.4.1 Equation différentielle linéaire.

Exemples :
Exemple B.1.10

Documents :
Document A.2.1

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = f(t)$$

On a vu que

$$\begin{array}{l} \mathscr{L}[y(t)] = Y(p) \\ \mathscr{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0) \\ \mathscr{L}[y''(t)] = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) \end{array}$$

et plus généralement

$$\mathscr{L}[y^{(n)}(t)] = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle de départ nous avons

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0) Y(p) + \Phi(p) = F(p)$$

équation dans laquelle $\Phi(p)$ représente un polynôme de degré $(n-1)$ en p contenant les conditions initiales $y(0), y'(0), \cdots, y^{(n-1)}$. On en déduit

$$Y(p) = \frac{F(p) - \Phi(p)}{a_n p^n + \cdots + a_0}$$

et par conséquent

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(p)]$$

Avantages de la méthode

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. L'équation différentielle est transformée en une équation algébrique.
   La solution y(t) est obtenue sans intégration en cherchant l'original de Y(p).
2. On obtient seulement la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales.

II.4.2 Résolution d'un système différentiel

L'utilsation de la transformée de Laplace facilite la résolution des systèmes différentiels du premier ordre et permet par la suite un traitement matriciel de la résolutions de ces systèmes.

Soit par exemple le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_1 + 4y_2 & ; \quad y_1(0) = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 4y_2 & ; \quad y_2(0) = 1 \end{array}\right.$$

Soit $\mathscr{L}(y_1) = Y_1$ et $\mathscr{L}(y_2) = Y_2$ on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} pY_1 = 4Y_1 + 4Y_2 \\ pY_2 - 1 = Y_1 + 4Y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (p-4)Y_1 - 4Y_2 = 0 \\ -Y_1 + (p-4)Y_2 = 1 \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1(p) = \dfrac{1}{p-6} - \dfrac{1}{p-2} \\ Y_2(p) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{p-6} + \dfrac{1}{p-2}) \end{array}\right.$$

Et en calculant les originaux on obtient finalement

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = e^{6t} - e^{2t} \\ y_2(t) = \dfrac{1}{2}(e^{6t} + e^{2t}) \end{array}\right.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre III
Transformation de Fourier

Documents :
Document A.3.1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1 Intégrale de Fourier

III.1.1 Définition

Remarque préliminaire

Si une fonction $u(t)$ est périodique et de période $T = \frac{1}{f}$ on a vu que

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j2\pi n f t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-j2\pi n f t} dt$$

avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation et f est la fréquence.

Nous allons définir une transformation analogue à $u \mapsto c_n$ quand u n'est plus périodique c'est à dire en quelque sorte quand T tend vers $+\infty$.

Définition

Soit $u : t \in \mathbb{R} \longmapsto u(t) \in \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes :

1. $u(t)$ est continue et dérivable une fois sur tout intervalle fermé $[-a, a]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. C'est à dire qu'en ces points de discontinuité, qu'il existe une limite à gauche et une limite à droite pour $u(t)$.
2. $u(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$; c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| \, dt$ est finie.

On appelle **transformée de Fourier** de u la fonction $U = \mathscr{F}[u(t)]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\boxed{\mathscr{F}[u(t)] = U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

L'application $\mathscr{F} : u(t) \mapsto U(f)$ est appelée la **Transformation de Fourier** (TF en abrégé).

On remarque que $U = \mathscr{F}(u)$ est bornée.

En effet

$$\left|U(f)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|\, dt$$

car $\left|e^{-j2\pi f t}\right| = 1$

De plus on démontre que U est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{f\to+\infty} \left|U(f)\right| = 0$

La courbe d'équation $y = \left|U(f)\right|$ est appelée le *spectre* de u. $\forall u$,le spectre de u possède l'axe Ox comme asymptote.

Lien entre Laplace et Fourier

On remarque que *la transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace* . Il suffit de poser $p = j2\pi f = j\omega$. La différence essentielle entre ces deux transformées est que les intégrales sont prises de $-\infty$ à $+\infty$ pour la transformée de Fourier alors qu'elles sont prises de 0 à $+\infty$ pour la transformée de Laplace qui nécessite donc de définir une condition initiale de la fonction $u(t)$. Il en résulte donc que la transformé de Laplace sera plus utile dans le calcul des régimes transitoires alors que la transformée de Fourier est plus adaptée au calcul des régimes permanents dans le domaine fréquentiel.

Fonctions paires et impaires

Dans le cas où la fonction $u(t)$ possède une propriété de parité ou d'imparité le calcul de l'intégrale de Fourier peut se mettre sous la forme d'une intégrale réelle. Dans le cas général la transformée de Fourier s'écrit

$$\mathscr{F}[u(t)] = U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\cos 2\pi f t + j \sin 2\pi f t\right) dt$$

Définition

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans cette expression on note que les fonctions cosinus et sinus sont respectivement paire et impaire

Fonction paire On a : $u(t) = u(-t)$ et la transformée de Fourier s'écrit :

$$\mathscr{F}[u(t)] = U(f) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cos 2\pi f t \, dt$$

Fonction impaire On a : $u(t) = -u(-t)$ d'où :

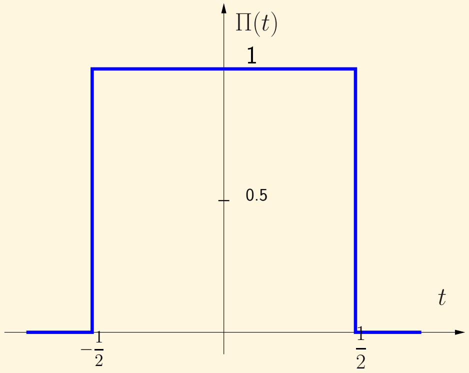
$$\mathscr{F}[u(t)] = U(f) = -2j\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\sin 2\pi f t \, dt$$

III.1.2 Exemples de Transformées

Exercices :
Exercice C.3.4

Certaines des fonctions élémentaires utilisées en traitement du signal admettent une Transformée de Fourier qui se calcule à partir de la définition de la Transformée. Pour les autres le calcul des transformées nécessite l'utilisation des propriétés qui seront vues ultérieurement

Fonction porte



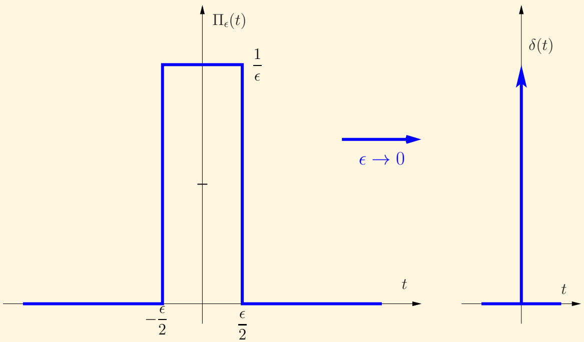
Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Compte tenu que $\Pi(t) = 0$ pour $|t| > 1/2$, on a

$$U(f) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}\right] = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Fonction impulsion de Dirac



En appliquant le résultat précédent à la fonction $\Pi_\epsilon(t)$ on obtient

$$\mathscr{F}[\Pi_\epsilon(t)] = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\sin \pi\epsilon f}{\pi\epsilon f}$$

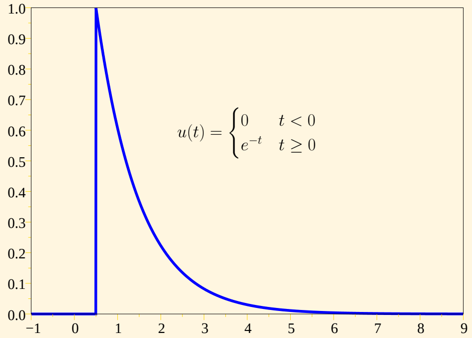
La fonction $\Pi_\epsilon(t)$ tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ lorsque $\epsilon \to 0$ d'où

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{F}[\Pi_\epsilon(t)] = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin \pi\epsilon f}{\pi\epsilon f} = 1$$

et finalement

$$\boxed{\mathscr{F}[\delta(t)] = 1}$$

Fonction exponentielle unilatérale



On a dans ce cas

$$U(f) = \int_0^{\infty} exp^{-(j2\pi f+1)t} dt = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

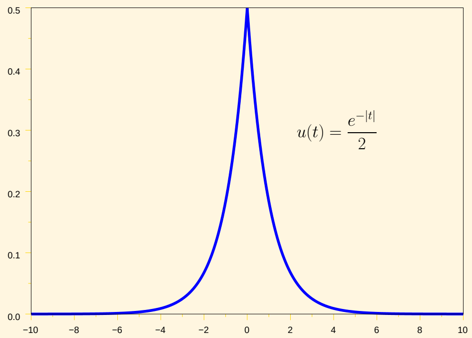
On note que la fonction $U(f)$ est une fonction complexe de la variable réelle f ou $\omega = 2\pi f$. Les parties réelle et imaginaire sont données par

$$\Re[U(\omega)] = \frac{1}{1+\omega^2} \quad ; \quad \Im[U(\omega)] = -\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Fonction exponentielle bilatérale



Dans ce cas l'intégrale de Fourier s'écrit $U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(|t|+j2\pi f t)}}{2} dt$ et doit être décomposée en deux intégrales suivant que $t < 0 \Rightarrow e^{-|t|} = e^{t}$ ou $t > 0 \Rightarrow e^{-|t|} = e^{-t}$. On a

$$U(f) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} \cdot e^{-(-1+j2\pi f)t} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-(1+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{2(1-j2\pi f)} + \frac{1}{2(1+j2\pi f)}$$

d'où

$$\boxed{U(f) = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}}$$

qui est une fonction purement réelle car $u(t)$ est paire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Propriétés de la Transformée de Fourier

III.2.1 Transformée de Fourier inverse

Exercices :
Exercice C.3.6

Définition

On admettra que la transformation de Fourier admet une transformation inverse $\mathscr{F}^{-1}$ telle que en un point où $u(t)$ est continue on a :

$$\boxed{u(t) = \mathscr{F}^{-1}[U(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{j2\pi f t}\, df}$$

si $u(t)$ est discontinue en t alors :

$$\mathscr{F}^{-1}[U(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{j2\pi f t}\, df = \frac{1}{2}\left(u(t-0) + u(t+0)\right)$$

Si U est paire $u(t) = 2\int_0^{+\infty} U(f)\cdot\cos(2\pi f t)dt$
Si U est impaire $u(t) = 2j\int_0^{+\infty} U(f)\cdot\sin(2\pi f t)dt$

Exemple : calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$

On a vu que $\mathscr{F}[\pi(t)] = \dfrac{\sin \pi f}{\pi f}$ donc $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{\sin \pi f}{\pi f}\right] = \begin{cases} \pi(t) & \text{si} \quad |t| \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad |t| = \frac{1}{2} \end{cases}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi f}{\pi f} \cdot e^{j2\pi f t} df = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

et par exemple pour t = 0 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi f}{\pi f} df = 1$

et en posant $\pi f = t$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

Remarque

L'expression de la TF et de la TF inverse, valable en tout point où u est continue, démontre une symétrie parfaite dans les formules.

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad \Leftrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) e^{j2\pi f t} df$$

On passe donc de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}^{-1}$ en échangeant $\begin{cases} u \text{ en } U \\ t \text{ en } f \\ j \text{ en } -j \end{cases}$

Il s'en suit que toute propriété de $\mathscr{F}$ est donc vraie pour $\mathscr{F}^{-1}$ en tenant compte de cette transposition.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.2 Linéarité de la Transformée de Fourier

La Transformation de Fourier de même que son inverse sont des opérations linéaires.
Si $\mathscr{F}(u_1(t)) = U_1(f)$, $\mathscr{F}(u_2) = U_2$ et λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathscr{F}[\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t))\, e^{-j2\pi f t} dt$$

et, d'après les propriétés de linéarité de l'intégration,

$$\boxed{\mathscr{F}[\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t)] = \lambda_1 \mathscr{F}[u_1(t)] + \lambda_2 \mathscr{F}[u_2(t)]}$$

De même pour la transformée inverse

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[\lambda_1 \cdot U_1(f) + \lambda_2 \cdot U_2(f)] = \lambda_1 \mathscr{F}^{-1}[U_1(f)] + \lambda_2 \mathscr{F}^{-1}[U_2(f)]}$$

Cette propriété de linéarité est fondamentale et est largement utilisée dans le calcul des transformées de Fourier.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.3 Transformée de $u(at)$

Définition

Soit $g(t) = u(at)$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors $\mathscr{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(at) e^{-j2\pi f t} dt$

En posant $at = x$ et en remarquant que les bornes sont inchangées si $a > 0$ et inversées si $a < 0$ on obtient

$$\mathscr{F}[g(t)] = \text{signe}(a) \times \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-j2\pi f \cdot \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-j2\pi \frac{f}{a} x} dx$$

Si $\mathscr{F}(u) = U$ Alors

$$\boxed{\mathscr{F}[u(at)] = \frac{1}{|a|} U\left(\frac{f}{a}\right)}$$

Exemple

Soit $u(t) = \Pi\left(\frac{t}{2t_0}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\dfrac{t}{2t_0}\right| \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \left|\dfrac{t}{2t_0}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ on a $a = \frac{1}{2t_0} > 0$ et $\mathscr{F}[\Pi(t)] = \dfrac{\sin \pi f}{\pi f}$ d'où

$$\mathscr{F}[\pi(\frac{t}{2t_0})] = 2t_0 \frac{\sin \pi f 2t_0}{\pi f 2t_0}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.4 Transformée de $u(t-t_0)$

Exercices :
Exercice C.3.1

théorème

Soit $g(t) = u(t-t_0)$ Alors $\mathscr{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-t_0)e^{-j2\pi f t}dt$
En posant $x = t - t_0$, $dx = dt$ et les bornes sont inchangées d'où

$$\mathscr{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j2\pi f(t_0+x)}dx = e^{-j2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-j2\pi f x}dx$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{F}[u(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0}\mathscr{F}[u(t)]}$$

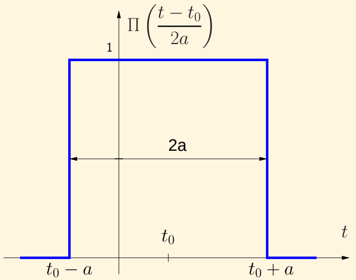
de même en tenant compte des symétries de la TF et de la TF inverse

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[U(f-f_0)] = e^{j2\pi f_0 t}\mathscr{F}^{-1}[U(f)]}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Transformée d'une "porte" décalée



$$\Pi\left(\frac{t-t_0}{2a}\right) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{2} \le \frac{t-t_0}{2a} \le \frac{1}{2} \Rightarrow t_0 - a \le t \le t_0 + a \\ 1 & t < t_0 - a \quad \text{et} \quad t > t_0 + a \end{cases}$$

Dans le cas où $a = \frac{1}{2}$ la transformée de la porte décalée s'obtient très simplement en remarquant que

$$\mathscr{F}[\Pi(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} \cdot \mathscr{F}[\Pi(t)] = e^{-j2\pi f t_0} \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Le cas où $a \neq \dfrac{1}{2}$ est laissé à titre d'exercice.

Transformée des fonctions sinusoidales

D'après le théorème sur la translation de fréquence, translater la fonction $U(f)$ de f_0 revient à multiplier la fonction $u(t)$ par la quantité $e^{j2\pi f_0 t}$. Par ailleurs la symétrie des formules de TF et TF inverse fait que

$$\mathscr{F}^{-1}[\delta(f)] = 1$$

on a donc

$$\begin{cases} \mathscr{F}^{-1}[\delta(f - f_0)] = 1 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \\ \mathscr{F}^{-1}[\delta(f + f_0)] = 1 \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \end{cases}$$

En utilisant la propriété de linéarité de la TF et de la TF inverse on a

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\right] = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \cos(2\pi f_0 t)$$

Transformée de $u(t - t_0)$

Sommaire
Concepts

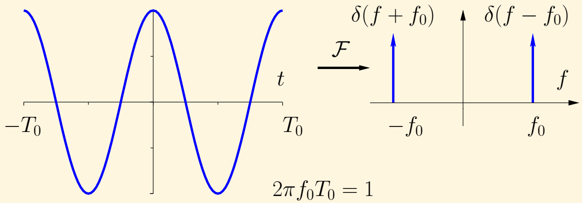
Exemples
Exercices
Documents

ou de façon équivalente

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}}$$

De même on démontre facilement que

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\sin(2\pi f_0 t)\right] = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}}$$



Le spectre est donc constitué par deux raies aux fréquences $-f_0$ et f_0

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.5 Transformée de $u'(t)$

Exercices :
Exercice C.3.2
Exercice C.3.4
Exercice C.3.5

On suppose que $u(t)$ et $u'(t)$ admettent des transformées de Fourier, on a

$$\mathscr{F}[u'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

On pose $u'(t)dt = du$ et $v(t) = e^{-j2\pi f t}$ et on intègre par parties

$$\mathscr{F}[u'(t)] = \left[u(t)e^{j2\pi f t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\pi t}dt$$

Or $\lim_{|t|\to+\infty} \left|u(t)\, e^{-j2\pi f t}\right| = \lim_{|t|\to+\infty} |u(t)| = 0$ puisque u est intégrable sur $\mathbb{R}$.
D'où

$$\mathscr{F}[u'(t)] = j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Si $\mathscr{F}[u(t)] = U(f)$ alors

$$\boxed{\mathscr{F}[u'(t)] = (j2\pi f)U(f)}$$

et de même

Transformée de $u'(t)$

Si $\mathscr{F}^{-1}[U(f)] = u(t)$ alors

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[U'(f)] = (-j2\pi t)u(t)}$$

Plus généralement

$$\mathscr{F}[u^{(n)}(t)] = (j2\pi f)^n U(f)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[U^{(n)}(f)] = (-j2\pi t)^n t^n u(t$$

ce que l'on écrit aussi

$$\boxed{\mathscr{F}[t^n u(t)] = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n U^{(n)}(f)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.6 Transformée du produit de convolution

Le produit de convolution des fonctions $u(t)$ et $v(t)$ est défini par

$$u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) \cdot v(t-\theta) d\theta$$

Si $\mathscr{F}[u(t)] = U(f)$ et $\mathscr{F}[v(t)] = V(f)$ alors

$$\mathscr{F}(u * v) = U(f) \cdot V(f)$$

et

$$\mathscr{F}^{-1}(U * V) = u(t) \cdot v(t)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.7 Formule de Parseval

On a défini au chapitre 1 un produit scalaire sur les fonctions par

$$< f/g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g(t)}dt$$

Si $\mathscr{F}(u) = U$ et $\mathscr{F}(v) = V$ on démontre sous réserve de convergence que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\overline{v(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f)\cdot\overline{V(f)}df$$

On dit que la transformation de Fourier conserve le produit scalaire.
En particulier si $v = u$ on obtient la formule de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|U(f)\right|^2\,df$$

Il y a conservation de l'énergie dans la transformation de Fourier.

Cette formule est à rapprocher de la formule de Bessel - Parseval qui exprime la puissance moyenne pour les séries de Fourier

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |u(t)|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Sommaire
Concepts

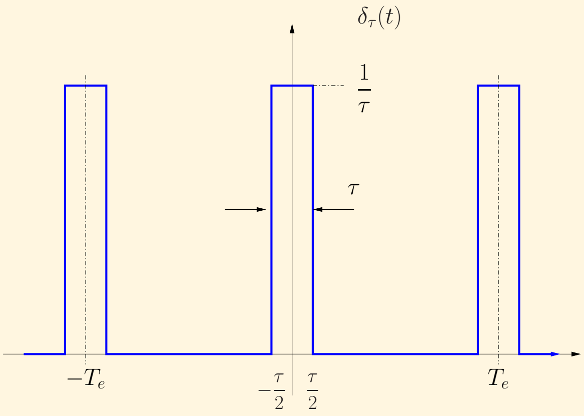
Exemples
Exercices
Documents

III.2.8 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Documents :
FFT

Définition

On considère une fonction $u(t)$ admettant une transformée de Fourier $U(f)$. Si on multiplie cette fonction par la fonction d'échantillonnage $\delta_\tau(t)$ constituée d'une série d'impulsions périodiques de période T_e on obtient la fonction $u_e(t)$ qui est dite échantillonnée.



Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

La fonction $\delta_\tau(t)$ peut se décomposer en série de Fourier

$$\begin{cases} \delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j2\pi n f_e t} \\ c_n = f_e \cdot \dfrac{\sin \pi n f_e \tau}{\pi n f_e \tau} \end{cases}$$

la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée s'écrit alors

$$\mathscr{F}[u_e(t)] = \mathscr{F}[u(t)\cdot\delta_\tau(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j2\pi n f_e t}\right) u(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

et, puisque l'opération d'intégration est linéaire, on peut inverser les signes $\int$ et $\sum$

$$\mathscr{F}[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi(f-nf_e)t} dt\right)$$

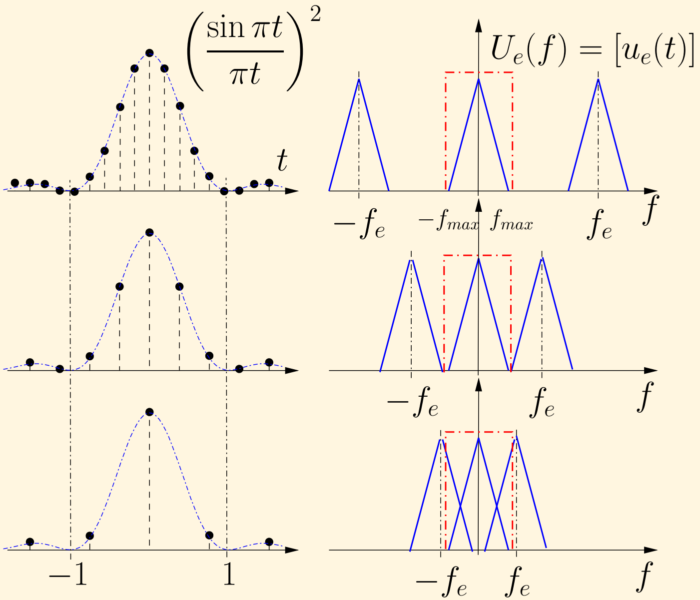
Le terme intégral n'est autre que la transformée de Fourier $U(f)$ translatée de nf_e $n \in \mathbb{Z}$. De plus si la largeur des impulsions d'échantillonnage tend vers 0 (peigne de Dirac) on a $\lim_{\tau\to 0} c_n = f_e$

$$\boxed{\mathscr{F}[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_e \cdot U(f - nf_e)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème de Shannon-Nyquist



Le spectre de la fonction $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ échantillonné à la fréquence f_e est représenté à la figure précédente pour 3 valeurs de f_e. Soit f_{max} la fréquence maximum du spectre du signal de départ $u(t)$. On constate que ce signal original peut être récupéré par un filtre idéal s'il n'y a pas de recouvrement de spectre. Cette condition est satisfaite si $f_e - f_{max} > f_{max}$ ou de façon équivalente si

$$\boxed{f_e > 2f_{max}}$$

Cette condition est connue sous le nom de Shannon et la fréquence $2f_{max}$ est dite fréquence de Nyquist.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Documents

A.1 Documents du chapitre I

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document A.1.1 Fonction exponentielle unilatérale

$$\varphi_{\theta,t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} & t \geq 0 \end{cases}$$

simulation

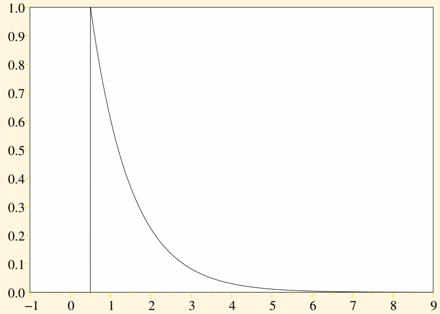


FIGURE A.1.1 – Fonction Exponentielle Unilatérale : $t_0 = 0.5 \quad \theta = 1$

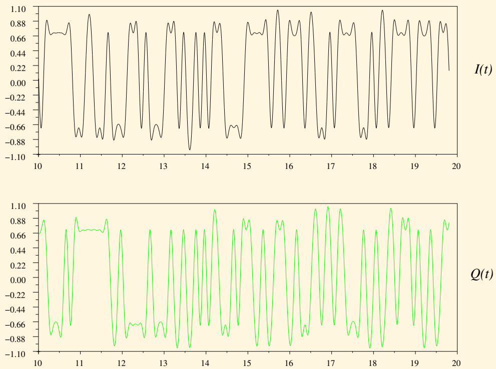
Retour au grain

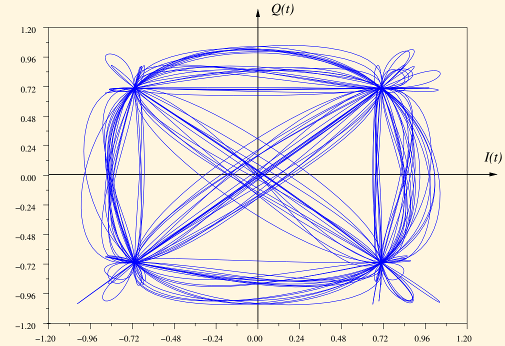
Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document A.1.2 Représentation des signaux en télécommunications

En télécommunications on utilise des modulations dites vectorielles. C'est à dire qu'un signal modulé s'écrit $s(t) = I(t) + jQ(t)$. Dans le cas d'une modulation à 4 états de phase les signaux $I(t)$ et $Q(t)$ ont l'allure représentée ci-dessous et le signal $s(t)$ parcourt une constellation.





Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Documents du chapitre II

Document A.2.1 Transformée de Laplace et Physique

Cours :
Produit de convolution et transformation de Laplace.

De nombreux systèmes physiques (électriques, mécaniques...) associent à une grandeur d'entrée fonction du temps $e(t)$ une grandeur de sortie $s(t)$. $s(t)$ est souvent appelée *réponse du système* à *l'excitation* $e(t)$.

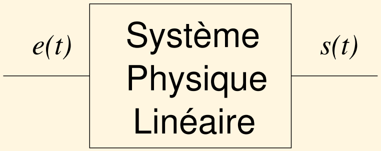


FIGURE A.2.2 –

Lorsque $s(t)$ est liée à $e(t)$ par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la forme la plus générale peut s'écrire :

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + a_0 e(t) \quad m \leq n$$

le système est alors dit linéaire d'ordre n.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Fonction de transfert.

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente. Supposons pour simplifier, que le système part du repos c'est à dire que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ ainsi que leurs dérivées sont nulles à l'instant $t = 0$. On a alors

$$(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + ... + b_0) S(p) = (a_m p^m + \cdots + a_0) E(p)$$

D'où

$$S(p) = \frac{a_m p^m + \cdots + a_0}{b_n p^n + \cdots + b_0} E(p)$$

Par définition

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + \cdots + a_0}{b_n p^n + \cdots + b_0}$$

est appelée la **fonction de transfert** du système.

La fonction de transfert apparaît donc comme un opérateur multiplicatif qui caractérise le système dans le domaine de Laplace.

Conformément à la relation entre Transformée de Laplace et la convolution on a :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) \quad \Leftrightarrow \quad s(t) = h(t) \star e(t)$$

Elle permet d'obtenir la réponse à une fonction d'entrée donnée.

Réponse impulsionnelle

Supposons que nous appliquions une impulsion de Dirac à l'entrée du système linéaire on a :

$$E(p) = \mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On en tire

$$S(p) = H(p)$$

et la réponse temporelle du système est l'original de sa fonction de transfert

$$s(t) = h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(p)]$$

appelée réponse impulsionnelle du système

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document A.2.2 Tables des Transformées de Laplace

	$u(t)\,;\ u(t) \equiv 0\ \forall t < 0$	$\mathscr{L}[u(t)] = U(p) = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt$
PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE		
Translation	$u(t-a)$	$e^{-pa}U(p)$
Modulation	$e^{-at}u(t)$	$U(p+a)$
Changement d'échelle	$u(at)$	$\frac{1}{a}U\left(\frac{p}{a}\right)$
Dérivation / t	$\frac{du(t)}{dt}$	$pU(p) - u(0^+)$
Dérivation d'ordre n /t	$\frac{d^n u(t)}{dt^n}$	$p^n U(p) - p^{n-1}u(0^+) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$
Intégration / t	$\int_0^t u(x)dx$	$\frac{U(p)}{p} + \lim_{t\to 0_+} \int_0^t u(x)dx$
Dérivation / p	$-tu(t)$	$\frac{dU(p)}{dp}$
Dérivation d'ordre n / p	$(-1)^n t^n u(t)$	$\frac{d^n U(p)}{dp^n}$
Intégration / p	$\frac{u(t)}{t}$	$\int_p^\infty U(x)dx$
TRANSFORMÉES DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES		
Echelon unité	$\mathscr{H}(t)$	$\frac{1}{p}$
Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
Polynôme	$t^n\mathscr{H}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Retour au grain

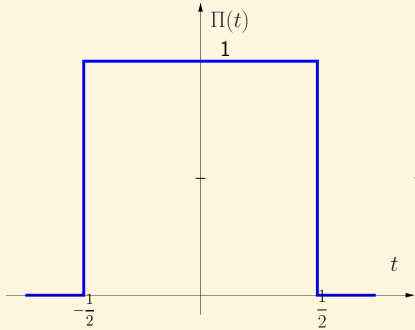
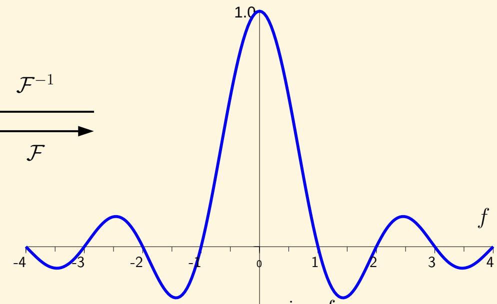
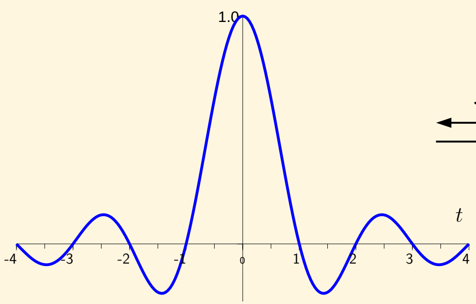
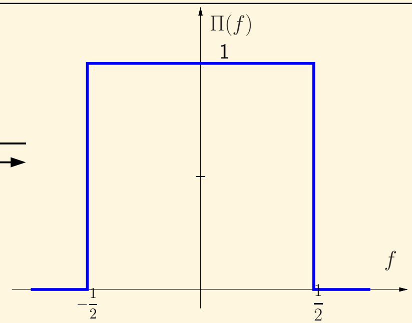
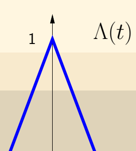
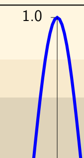
A.3 Documents du chapitre III

Document A.3.1 Tables des Transformées de Fourier

	$u(t)$	$\mathscr{F}[u(t)] = U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi f t}dt$ $\mathscr{F}^{-1}[U(f)] = U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f)e^{j2\pi f t}df$
PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER		
Translation	$u(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}U(f)$
Modulation	$e^{-j2\pi f_0 t}u(t)$	$U(f+f_0)$
Changement d'échelle	$u(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}U\left(\frac{f}{a}\right)$
Dérivation / t	$\frac{du(t)}{dt}$	$j2\pi f\cdot U(f)$
Dérivation d'ordre n /t	$\frac{d^n u(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n U(f)$
Dérivation / f	$tu(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{dU(f)}{df}$
Dérivation d'ordre n / f	$t^n u(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n U(f)}{df^n}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Impulsion temporelle $\Pi(t)$	Impulsion en sinc(f)
 $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t \rvert \le 1/2 \\ 0 & \lvert t \rvert > 1/2 \end{cases}$	$\underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}}$  $\mathcal{F}[\Pi(t)] = \dfrac{\sin \pi f}{\pi f}$
Impulsion en sinc(t)	**impulsion fréquentielle $\Pi(f)$**
 $\mathcal{F}[\Pi(t)] = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$	$\underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}}$  $\Pi(f) = \begin{cases} 1 & \lvert f \rvert \le 1/2 \\ 0 & \lvert f \rvert > 1/2 \end{cases}$
Impulsion triangulaire $\Lambda(t)$	**Impulsion en sinc$^2(f)$**
	

Document A.3.1
Tables des Transformées de Fourier

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

B.1 Exemples du chapitre II

Exemple B.1.1 Transformées de fonctions trigonométriques.

Nous avons calculé $\mathscr{L}[e^{-at}\mathscr{H}(t)] = \dfrac{1}{p+a}$ si $\Re(p) > -\Re(a)$
Posons $a = j\omega$; $\Re(a) = 0$ donc pour $\Re(p) > 0$ on aura :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{-j\omega t}\cdot\mathscr{H}(t)] &= \frac{1}{p+j\omega} = \frac{p-j\omega}{p^2+\omega^2} \\
\mathscr{L}[e^{+j\omega t}\cdot\mathscr{H}(t)] &= \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

D'après la linéarité de l'intégrale

$$\mathscr{L}[\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\mathscr{H}(t)] = \mathscr{L}[\cos\omega t\cdot\mathscr{H}(t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

et de même

$$\mathscr{L}[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\mathscr{H}(t)] = \mathscr{L}[\sin\omega t\cdot\mathscr{H}(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Exemples

- $f(t) = 3t^2 - 2t + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}[f(t)] = F(p) = 3\dfrac{2!}{p^3} - 2\dfrac{1!}{p^2} + 1\dfrac{0!}{p} = \dfrac{6}{p^3} - \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{1}{p}$
- $f(t) = \cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}[f(t)] = F(p) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+4}\right]$
- $\begin{cases} f(t) = \cosh \omega t & \Rightarrow \quad F(p) = \dfrac{p}{p^2-\omega^2} \\ f(t) = \sinh \omega t & \Rightarrow \quad F(p) = \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2} \end{cases}$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3 Transformation d'une série entière

Dans le cas où la fonction est définie par une série entière convergente

Si f(t) = $\sum_0^{+\infty} a_n t^n$

Alors

$$F(p) = \mathscr{L}\left[\sum_0^{+\infty} a_n t^n\right] = \sum_0^{+\infty} a_n \mathscr{L}(t^n) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$$

sous réserve de convergence de la série.

On peut faire la même remarque pour une série de Fourier puisqu'on sait transformer les cosinus et sinus.

Retour au grain

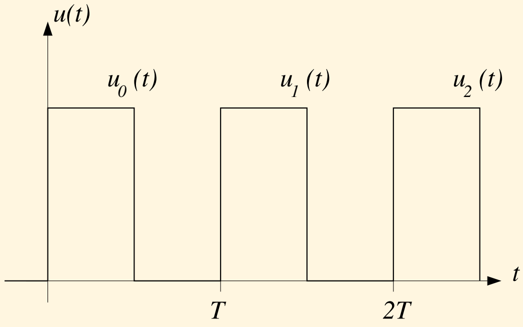
Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4 Fonction rectangulaire

Soit la fonction périodique de période T définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0(t) = & A & \text{si} & t \in [0,\tau] \\ u_0(t) = & 0 & \text{si} & t > \tau \end{cases} \quad u(t+T) = u(t)$$



On a : $u_0(t) = A[\mathscr{H}(t) - \mathscr{H}(t-\tau)]$
et $U_0(p) = \dfrac{A}{p}(1 - e^{-p\tau})$ d'où

$$U(p) = \frac{A}{p}\frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}$$

Retour au grain

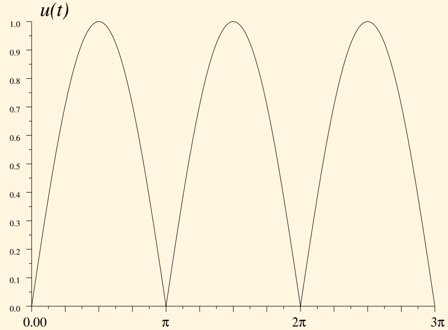
Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.5 Transformée de $u(t) = |\sin t|$

Soit la fonction correspondant à une onde redressée double alternance :

$$\begin{cases} u_0(t) = & \sin t & \text{si} & t \in]0, \pi] \\ u_0(t) = & 0 & \text{si} & t > \pi \end{cases}$$



On a de la même façon $u_0(t) = \sin t \mathcal{H}(t) + \sin(t-\pi)\mathcal{H}(t-\pi)$

Donc $U_0(p) = \dfrac{1}{1+p^2} + \dfrac{e^{-p\pi}}{1+p^2} = \dfrac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2}$

D'où

$$U(p) = \frac{U_0(p)}{1-e^{-p\pi}} = \frac{1}{1+p^2}\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.6 Exemples d'originaux de fonctions simples

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2}) = t\mathcal{H}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+4}) = \cos 2t\mathcal{H}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-ap}}{p}) = \mathcal{H}(t-a)$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.7 Utilisation de l'original d'une dérivée

1.
$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}] = e^{-3t} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(p+3)^2}] = te^{-3t}$$

2. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p^2+1}] = \sin t$ or $\int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = [Arc\tan u]_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - Arc\tan p = Arc\tan \frac{1}{p}$

   d'où $\mathscr{L}^{-1}[Arc\tan \frac{1}{p}] = \frac{\sin t}{t}$ pour $(t>0)$ c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt = Arc\tan \frac{1}{p}$$

   En particulier si p tend vers 0 on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.8 Utilisation de l'original d'une primitive

On veut calculer la Transformée de Laplace de $\dfrac{\sin t}{t}$ On a

$$\mathscr{L}[\frac{\sin t}{t}] = \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1}$$

or

$$\int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = [Arc\tan u]_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - Arc\tan p = Arc\tan \frac{1}{p}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt = Arc\tan \frac{1}{p}$$

En particulier si p tend vers 0 on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.9 Calcul de l'original d'une fonction par convolution

Soit à calculer l'original de

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p^2} \times \frac{1}{p+1}$$

Nous avons

$$\mathscr{L}^{-1}(\left(\frac{1}{p^2}\right) = t$$

et

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1})\right) = e^{-t}$$

d'où

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p+1)})\right) = \int_0^t xe^{-(t-x)}dx = e^{-t}\int_0^t xe^x dx$$

Pour $\int_0^t xe^x dx$, intégrons par parties. En posant $u = x$ et $dv = e^x dx$ on a

$$\int_0^t xe^x dx = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x dx = te^t - e^t + 1$$

d'où

$$\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^2(p+1)}) = (t - 1 + e^t)\mathscr{H}(t)$$

(On aurait aussi pu décomposer la fraction rationnelle en éléments simples).

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.10 Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = te^t \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

où $y = y(t)$

$$\mathscr{L}(y'' - 2y' + y) = \mathscr{L}(y'') - 2\mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = (p^2 Y - p) - 2(pY - 1) + Y$$

et

$$\mathscr{L}(te^t) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

il vient donc

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) - p + 2 = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$Y(p) = [\frac{1}{(p-1)^2} + (p-1) - 1]\frac{1}{(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^4} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1}$$

Soit

$$y(t) = e^t[\frac{t^3}{6} - t + 1]\mathscr{H}(t)$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Exercices

C.1 Exercices du chapitre I

Exercice C.1.1 Études de quelques fonctions complexes

Cours :
Fonctions complexes

Déterminer les parties réelles $X(\omega)$ et imaginaires $Y(\omega)$ des fonctions complexes suivantes.Étudier leurs variations pour $\omega \in \mathbb{R}$. Tracer les représentations des parties réelles et imaginaires et de la fonction dans le plan complexe.

f1

$$Z(\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}$$

f2

$$Z(\omega) = \frac{1+j\omega}{1+2j\omega}$$

f3

$$Z(\omega) = \frac{e^{-j\omega/4}}{1+j\omega}$$

f4

$$Z(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1-\frac{\omega^2}{100}+2j\omega)}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.2 Calcul d'une série complexe

Cours :
Fonctions complexes

Calculer les sommes

$$S_1 = \cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cdots + \cos\left[\alpha + (m-1)\delta\right]$$

$$S_2 = \sin\alpha + \sin(\alpha+\delta) + \cdots + \sin\left[\alpha + (m-1)\delta\right]$$

On calculera d'abord la somme $S = S_1 + jS_2$ et on exprimera les sommes S_1 et S_2 sous la forme :

$$S_1 = \cos\left[\alpha + (m-1)\frac{\delta}{2}\right] \cdot \frac{\sin\left(\frac{m\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sin\left[\alpha + (m-1)\frac{\delta}{2}\right] \cdot \frac{\sin\left(\frac{m\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.3 Signaux sinusoidaux

Cours :
Séries de Fourier

1 Donner l'expression d'un signal sinusoidal quelconque en mettant en évidence sa période T , puis sa fréquence f

2 Représenter le diagramme de Fresnel de ce signal

3 Donner l'amplitude A, la phase instantanée , la phase à l'origine, la pulsation, la fréquence et la période des signaux donnés dans le tableau suivant

	Amplitude	Phase	Phase à t=0	Pulsation	Fréquence	Période
$u_1(t) = 3\cos 6t$						
$u_2(t) = \sqrt{2}\cos(t+1)$						
$u_3(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})$						
$u_4(t) = \sin(a\pi t + b\pi)$						

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.4 Fonction Porte

Cours :
Fonctions de test

On considère la fonction $P_\tau(t)$ définie par

$$P_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0 & t \notin [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$$

a) Représenter la fonction $P_\tau(t)$ dans les deux cas suivants : $\tau = 1$ et $\tau = 0.5$

b) On prend $\tau = 1$. Représenter la fonction $P_\tau(t - t_0)$ dans les deuxcas suivants : $t_0 = 0.5$ et $t_0 = 2$

c) Quel est le support de $P_\tau(t)$. Quelle est sa limite lorsque $\tau \to 0$?

d) Calculer $A = \int_{-\infty}^{\infty} P_\tau(t)dt$. Calculer la limite de A lorsque $A \to 0$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.5 Fonction Triangle

Cours :
Fonctions de test

On considère la fonction $Tr_\tau(t)$ définie par

$$Tr_\tau(t) = \begin{cases} \frac{4}{\tau^2}(t-t_0)+\frac{2}{\tau} & t \in [t_0-\frac{\tau}{2}\ ,\ t_0] \\ -\frac{4}{\tau^2}(t-t_0)+\frac{2}{\tau} & t \in [t_0\ ,\ t_0+\frac{\tau}{2}] \\ 0 & t \notin [t_0-\frac{\tau}{2}\ ,\ t_0+\frac{\tau}{2}] \end{cases}$$

a) Représenter la fonction $Tr_\tau(t)$ dans les deux cas suivants : $t_0 = 0$; $\tau = 1$ et $t_0 = 2$; $\tau = 0.5$

b) Quel est le support de $Tr_\tau(t)$. Quelle est sa limite lorsque $\tau \to 0$?

d) Calculer $A = \int_{-\infty}^{\infty} Tr_\tau(t)dt$. Calculer la limite de A lorsque $\tau \to 0$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.6 Fonction Gaussienne

Cours :
Fonctions de test

On considère la fonction $G_\sigma(t)$ définie par

$$G_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

a) Représenter la fonction $G_\sigma(t)$ dans les deux cas suivants :$\sigma = 1$ et $\sigma = 2$

b) Sachant que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

montrer que

$$A = \int_{-\infty}^\infty G_\sigma(t) dt = 1$$

c) Que devient la fonction $G_\sigma(t)$ lorsque $\sigma \to 0$?

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.7 Fonction orthogonales

Cours :
Convolution graphique

On considère les fonctions Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 représentées à la figure C.1.1.

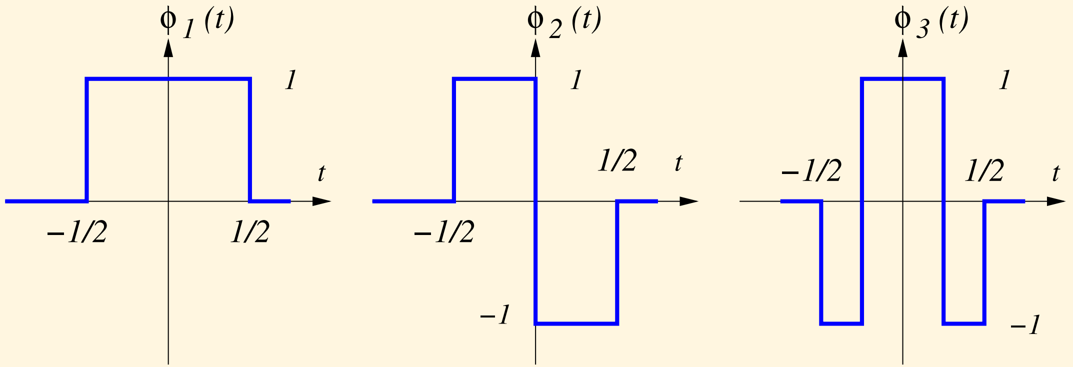


FIGURE C.1.1 – Représentation des fonctions de base

a) Montrer que ces fonctions forment une base orthonormale sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$

b) Déterminer les coefficients C_1 C_2 C_3 de la décomposition du signal $x(t) = \cos 2\pi t$ dans la base précédente.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

c) Déterminer l'erreur quadratique intégrale entre le signal $x(t)$ et son approximation définie par

$$\hat{x}(t) = C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t) + C_3\Phi_3(t)$$

L'erreur quadratique est définie par

$$\epsilon_N = \int_{1/2}^{1/2} \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 dt$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.8 Séries de Fourier complexes

Déterminer les coefficients du développement en série de Fourier complexe des fonctions suivantes. On procèdera par identification en utilisant les identités suivantes

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

a) $u(t) = A\cos\omega_0 t$

b) $u(t) = A\sin\omega_0 t$

c) $u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

d) $u(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.9 Développement d'un fonction rectangulaire en Série de Fourier

Soit la fonction $u(t)$ périodique de période T définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0\,,\, \frac{T}{2}] \\ -1 & \in [\frac{T}{2}\,,\, T] \end{cases}$$

a) Développer $u(t)$ en série de Fourier réelle

b) En déduire les coefficients de la série de Fourier complexe

c) Effectuer le même travail avec $u(t+\frac{T}{4})$ et $u(t-\frac{T}{2})$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.1.10 Utilisation des séries de Fourier pour le calcul de sommes de série

On considère la fonction numérique, périodique de période $T = 2\pi$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ dans un repère orthonormé.
2. Vérifier que $f(x)$ est paire. En déduire la valeur des coefficients de Fourier b_p des termes en sinus.
3. Déterminer ω et les coefficients a_0 et a_1 de la série de Fourier représentant $f(x)$. Montrer que pour $p \geq 1$ on a $a_{2p} = \dfrac{2\sqrt{2}}{(4p^2-1)\pi}$ et $a_{2p+1} = 0$. Ecrire la série de Fourier de $f(x)$.
4. En utilisant la convergence de la série de Fourier pour $x = 0$, montrer que :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Exercices du chapitre II

Exercice C.2.1 Calcul de Transformées directes

Déterminer les Transformée de Laplace des fonctions $u(t)$ suivantes :

$u(t) = \left(t^2-1\right)^2 \cdot H(t)$	$u(t) = (\sin(2t) - 3\cdot\cos(2t))\cdot H(t)$	$u(t) = \sin^2 t \cdot H(t)$
$u(t) = \sin(\omega t)\cdot\cos(\Omega t)\cdot H(t)$	$u(t) = e^{-t}\cos(3t)\cdot H(t)$	$u(t) = e^{-2t}\cdot(t^3+1)\cdot H(t)$
$u(t) = t^n \cdot e^{-\alpha t}\cdot H(t)$	$u(t) = e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega t)\cdot H(t)$	$u(t) = e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega t)\cdot H(t)$
$u(t) = t\cdot\cos(\omega t)\cdot H(t)$	$u(t) = t^n\cdot\cos(\omega t)\cdot H(t)$	$u(t) = t^n\cdot\sin(\omega t)\cdot H(t)$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.2 Fonctions retardées

On considère les fonctions suivantes

$\tau > 0$	$\tau > 0$	$\tau < 0$
$u_1(t) = \begin{cases} \alpha(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$	$u_2(t) = \begin{cases} \alpha(t-\tau) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$u_3(t) = \begin{cases} \alpha(t-\tau) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement les fonctions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$
2. Calculer leur Transformée de Laplace

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.3 Transformée de Laplace d'une rampe

On considère la fonction définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ 2 & a < t < 2a \\ 3 & 2a < t < 3a \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction $u(t)$
2. Mettre cette fonction sous la forme d'une série d'échelons retardés
3. En déduire sa transformée de Laplace

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.4 Fonctions triangle

On considère les fonctions suivantes nulles pour $t < 0$ et $t > 2\tau$

$$u_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} & 0 \le t \le \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} & 0 \le t \le \tau \\ -\dfrac{t}{\tau} + 2 & \tau \le t \le 2\tau \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement les fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$
2. En déduire leur Transformée de Laplace

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.5 Fonctions Carrée périodique

1. On considère la fonctions $u_1(t)$ suivante $u_1(t) = \begin{cases} A & t \in [a,b] \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}$

   Représenter graphiquement cette fonction et calculer sa Transformée de Laplace

2. Soit maintenant les deux fonctions périodiques de période T.

$$u_2(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$
$$u_2(t+T) = u_2(t)$$

$$u_3(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq tT \end{cases}$$
$$u_3(t+T) = u_3(t)$$

   (a) Représenter graphiquement ces deux fonctions

   (b) Calculer leur Transformée de Laplace

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.6 Calcul des originaux des Transformées de Laplace

Déterminer les originaux des Transformées de Laplace suivantes

$\dfrac{1}{p^2-9}$	$\dfrac{p}{p^2-16}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	$\dfrac{p^2}{(p-1)\cdot(p+3)}$	$\dfrac{p}{(p-1)^2\cdot(p+2)}$
$\dfrac{2p-1}{p\cdot(p^2+3)}$	$\dfrac{p+1}{p^2+p+2}$	$\dfrac{p-5}{p^2+8p+15}$	$\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$	$\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.7 Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide de la Transformée de Laplace. On suppose $y' = \frac{dy(t)}{dt}$ et $y'' = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$

$y'' - y = \sin(2t)$	$y(0) = 1$	$y'(0) = -1$
$y'' + 4y = \cos t$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 0$
$y''2y' + 5y = e^t \cdot \sin(2t)$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 1$
$y''2y' + y = e^t$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 0$

Représenter les graphes des solutions obtenues. (On pourra utiliser Scilab)

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.2.8 Équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' + 2m \cdot \omega_0 \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'0) = 1 \end{cases}$$

1. Résoudre cette équation différentielle dans les trois cas suivants : $m < 1 \quad m = 1 \quad m > 1$
2. Représenter les courbes des solutions pour $\omega_0 = 1$ et $m < 0.5 \quad m = 1 \quad m > 2$

Représenter les graphes des solutions obtenues. (On pourra utiliser Scilab)

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

C.3 Exercices du chapitre III

Exercice C.3.1 Calcul direct de $\Pi((t-t_0)/2a)$

Cours :
Théorème du retard

La fonction porte $\Pi(t)$ est définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de la fonction $\Pi\left(\dfrac{t-t_0}{2a}\right)$ pour les couples de valeurs de a et t_0 suivantes
   - $t_0 = 0$; $a = 1/2$
   - $t_0 = 2$; $a = 1$
   - $t_0 = -1$; $a = 2$
2. Calculer la transformée de Fourier de $\Pi\left(\dfrac{t-t_0}{2a}\right)$ dans le cas général
3. Retrouver ce résultat en utilisant les propriétés de changement d'échelle et du retard

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.2 Calcul de $t\Pi(t)$ et $t^2\Pi(t)$

Cours :
Transformée de la dérivée temporelle

La fonction porte $\Pi(t)$ est définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Représenter les graphes des fonctions $u_1(t) = t \cdot \Pi(t)$ et $u_2(t) = t^2 \cdot \Pi(t)$
2. En utilisant la formule de la transformée de la fonction porte calculer les transformées $U_1(f) = \mathscr{F}[t \cdot \Pi(t)$ et $U_2(f) = \mathscr{F}[t^2 \cdot \Pi(t)$
3. Utiliser les développements en série suivants

$$\begin{cases} \cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} & x \approx 0 \\ \sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} & x \approx 0 \end{cases}$$

   calculer les valeurs de $U_1(f)$ et $U_2(f)$ pour $f = 0$
4. Vérifier par un calcul direct que l'on a

$$U_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \Pi(t)dt \text{ et } U_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \Pi(t)dt$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.3 Calcul de la TF d'une fonction parabolique

Cours :
Transformée de la dérivée temporelle

La fonction parabolique $u(t)$ est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de la fonction $u(t)$ de sa dérivée $u'(t)$ et de sa dérivéee seconde $u''(t)$
2. Montrer en particulier que
$$u''(t) = -2\Pi(\frac{t}{2}) + 2\delta(t-1) + 2\delta(t+1)$$
3. Calculer la TF $U_2(f) = \mathscr{F}[u''(t)]$
4. En déduire $U_1(f) = \mathscr{F}[u'(t)]$ et $U_0(f) = \mathscr{F}[u(t)]$. Vérifier que l'on a bien
$$U_0(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.4 Calcul de la TF de fonctions exponentielles

Cours :
Transformées élémentaires
Transformée de la dérivée temporelle

La fonction parabolique $u(t)$ est définie par

$$u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \quad a > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

1. Représenter les graphe des fonctions $u(t)$, $t \cdot u(t)$ et $t^2 \cdot u(t)$
2. Calculer la TF $U(f) = \mathscr{F}[u(t)]$ et représenter graphiquement $|U(f)|$ et $\arg(U(f)$
3. En déduire $U_1(f) = \mathscr{F}[t \cdot u(t)]$ et $U_2(f) = \mathscr{F}[t^2 \cdot u(t)]$.
4. Vérifier que l'on a bien

$$U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt\,;\; U_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)dt\,;\; U_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2u(t)dt$$

5. Utiliser les résultats précédents pour trouver $U_n(f) = \mathscr{F}[t^n \cdot u(t)]$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.5 Calcul de la TF d'une fonction Triangulaire

Cours :
Transformées élémentaires
Transformée de la dérivée temporelle
TF du produit de convolution

La fonction triangulaire $\Lambda(t)$ est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de la fonction $\Lambda(t)$ et de sa dérivée $\Lambda'(t)$
2. Montrer en particulier que
$$\Lambda'(t) = \Pi(t+\frac{1}{2}) - \Pi(t-\frac{1}{2})$$
3. Calculer la TF $U_1(f) = \mathscr{F}[\Lambda'(t)]$
4. En déduire $U(f) = \mathscr{F}[\Lambda(t)]$
5. Vérifier que $\Lambda(t) = \Pi(t) \star \Pi(t)$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.6 Symétrie de la TF, Théorème de Parseval

Cours :
Transformées élémentaires
Transformée de Fourier inverse
Formule de Parseval

1. Calculer la TF de Fourier inverse de $U(f) = e^{-a|f|}$; $a > 0$ et représenter la fonction $u(t) = \mathscr{F}^{-1}[U(f)]$
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{1+t^2} dt$$
3. Calculer la TF $U_1(f) = \mathscr{F}[\Lambda'(t)]$
4. Utiliser le théorème de Parseval pour calculer l'intégrale
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice C.3.7 TF d'une Gaussienne

Cours :
Transformée de la dérivée temporelle
Formule de Parseval

On désire calculer la transformée de Fourier $G(f)$ de la fonction $g(t) = e^{-\pi t^2}$ soit : $G(f) = \mathscr{F}\left[g(t)\right]$

1. Représenter le graphe de la fonction $g(t)$.
2. Donner la définition de la transformée de Fourier de $g(t)$. Dans cette expression, on pose : $du = e^{-j2\pi f t}dt$ et $v = e^{-\pi t^2}$. En utilisant la formule d'intégration par parties montrer que la transformée de Fourier $G(f)$ de $g(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$G(f) = -\frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{dG(f)}{df}$$

3. L'équation différentielle précédente est à variables séparables. Résoudre cette équation pour exprimer $G(f)$.
4. Utiliser le théorème de Parseval et la relation $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$ pour calculer la constante d'intégration.

Retour au grain

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts