Algèbre linéaire en dimension finie

Troisième partie : diagonalisation

Johan MILLAUD

Département Génie Civil de l'IUT du Limousin

Février 2006 - version 2

Table des matières

Chapitre I
Avant-propos

I.1 Navigation dans le cours

I.1.1 LaTeX et Polytex

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale Polytex.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

Polytex est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de Polytex intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Panneau de navigation Acrobat

Le cours électronique produit par Polytex est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Acrobat Reader. Les versions récentes de ce logiciel disposent d'un panneau de navigation dans lequel apparaît la structure hiérarchique du cours (affichage par signets). On peut ainsi accéder directement à une page quand on connait son emplacement dans le cours.

Cette technique de navigation, dite navigation physique, ne doit donc être utilisée que lorsqu'on connait déjà bien le cours et qu'on cherche une information particulière. Dans tous les autres cas, il est vivement conseillé de fermer ce panneau de navigation et d'utiliser les liens actifs et les systèmes de navigation propres au cours.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).
On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et la table des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◄ précédent" permet de revenir au grain sur le panneau de navigation Acrobat, et le lien "► suivant" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◄ précédent" et "► suivant" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain n'excède jamais (ou presque) deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◄◄ et ►► situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans le cours. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

Exercices :
Exercice B.1.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain est en général associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Dans certains grains ou exemples, on pourra trouver des renvois à des grains ou exemples antérieurs. Pour ne pas multiplier les renvois et ne pas perdre le lecteur, cela

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ne se produira que très occasionnellement lorsque les grains ou exemples auront des contenus fortement liés et qu'ils seront chronologiquement très éloignés. Ces renvois particuliers sont unilatéraux : il n'y a pas de renvois permettant d'accéder rapidement à un grain ou exemple ultérieur. Dans de tels cas de figure, il est nécessaire de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

I.1.5 Le menu de navigation

On a conseillé plus tôt de limiter l'utilisation du panneau de navigation d'Acrobat Reader, surtout lors d'une première lecture. Cependant, même quand on connait bien le cours, et/ou quand on cherche une information précise, ce panneau n'est pas indispensable, car le cours possède son propre menu de navigation accessible depuis n'importe quelle page : c'est la liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit.

Ainsi, on peut à tout moment accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices. On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : il permet de basculer vers des documents d'approndissement et d'illustration du cours.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, Polytex associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Objectifs pédagogiques et choix didactiques

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.1 Objectifs pédagogiques

L'objectif principal de ce cours en 3 parties est de présenter les outils et techniques permettant de diagonaliser des matrices carrées d'ordre 2 et 3. Cette présentation doit permettre d'apprendre à utiliser ces outils et techniques mais aussi de les comprendre. Ainsi, à l'issue de l'apprentissage, on doit être capable de diagonaliser dans $\mathbb{R}$ une matrice (quand c'est possible) en complète autonomie, mais on doit, de plus, avoir acquis des bases suffisamment solides pour appréhender sereinement des prolongements vers la diagonalisation dans $\mathbb{C}$ et la triangularisation.

Pour atteindre l'objectif principal, on fixe deux étapes intermédiaires : maîtriser le calcul vectoriel en dimensions 2 et 3, et acquérir une bonne connaissance du calcul matriciel. Là aussi, on espère que l'apprenant aura assimilé ces notions au point d'entrevoir les généralisations possibles qu'on peut en faire en dimension finie quelconque et dans le cadre d'espaces vectoriels de natures très variées.

On traite ici la troisième et dernière étape. (La première étape a été traitée dans la "première partie : espaces vectoriels de dimension 2 et 3", et la seconde dans la "deuxième partie : calcul matriciel"). A l'issue de cette dernière partie, on doit connaître le vocabulaire de la diagonalisation et être capable de diagonaliser (quand c'est possible) en autonomie une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 (ou un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2 ou 3). Par ailleurs, on doit pouvoir trigonaliser une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 en étant guidé. Enfin, on doit pouvoir envisager "sereinement" une généralisation au cas des matrices carrées d'ordre supérieur ou égal à 4.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Pré-requis

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques très peu rencontrée dans l'Enseignement Secondaire. Ce cours en expose les bases de manière simplifiée : il est abordable avec les outils mathématiques traditionnellement enseignés dans les filières scientifiques et techniques du Lycée. Plus particulièrement, il est fortement souhaitable d'avoir assimilé la notion d'application et les résultats élémentaires concernant les polynômes réels à une indéterminée.

Une bonne connaissance de la géométrie vectorielle vue dans les classes antérieures facilitera la compréhension et la représentation des notions relatives aux espaces vectoriels, mais elle n'est pas indispensable.

En termes de calculs algébriques, on a signalé dès la première partie du cours la nécessité d'être à l'aise avec la résolution des systèmes d'équations linéaires, en particulier quand ces systèmes ne conduisent pas à une solution unique. Le lecteur peu habile dans ce type de résolution trouvera des rappels élémentaires et des conseils pratiques sur ce sujet dans la partie "Documents" de la première partie de ce cours (Première partie : espaces vectoriels de dimension 2 et 3). Il est recommandé de revenir à cette première partie si on ne maîtrise pas bien ce type de résolution.

Enfin, notons que les connaissances énoncées dans les deux premières parties de ce cours sont bien évidemment également des pré-requis pour cette troisième et dernière partie.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

On l'a évoqué auparavant : ce cours n'est qu'une présentation simplifiée de résultats élémentaires d'algèbre linéaire en dimensions 2 et 3. Il a été écrit avec l'objectif d'être compréhensible par un étudiant d'IUT (Génie Civil) en autonomie.

Par conséquent, les résultats énoncés ne sont pas systématiquement démontrés, mais on s'est efforcé d'apporter le plus souvent possible des éléments de justification. L'exception la plus notable concerne le calcul de déterminants dont les règles ont été posées sans ménagement (première et deuxième partie du cours).

Par ailleurs, une présentation axiomatique ne semble pas réaliste à ce niveau, surtout dans le cadre d'un cours électronique. C'est pourquoi, même si on a voulu conserver une certaine rigueur, le lecteur averti notera quelques raccourcis et libertés par rapport à une présentation plus académique ; on pourra regretter par exemple l'absence d'une définition claire et précise des notions d'espaces et sous-espaces vectoriels. Le lecteur novice, quant à lui, gardera à l'esprit que ce cours n'est qu'une première approche de l'algèbre linéaire et n'hésitera pas à se documenter à l'aide d'ouvrages plus conventionnels à la lumière de ce qu'il aura déjà acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Choix didactiques

On a parlé d'autonomie pour caractériser la situation didactique dans laquelle est placé un lecteur face à ce cours. En effet, on remarquera que les exercices proposés sont accompagnés de solutions relativement détaillées. On met en garde le lecteur en phase d'apprentissage : il serait illusoire de penser que l'on peut assimiler les notions introduites en se contentant de lire les solutions des exercices proposés. Ne vous laissez pas guider par la facilité : ayez un papier et un stylo pour chercher réellement les exercices avant de consulter leur solution.

Malgré l'autonomie évoquée plus haut, des phases de mise en commun régulières avec un enseignant et d'autres apprenants sont souhaitables : elles permettront à l'enseignant d'apprécier les progrès des étudiants, de remédier aux problèmes qu'ils rencontrent et de combler les inévitables manques de ce cours. L'étudiant, quant à lui, pourra bénéficier d'un retour personnalisé et poursuivre son apprentissage en étant certain de la solidité de ses acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.5 Temps d'apprentissage

L'un des grands avantages de l'enseignement en autonomie est de permettre à chacun d'évoluer à son rythme. Les temps d'apprentissage que l'on donne ici sont donc purement indicatifs et doivent surtout permettre de prévoir un découpage personnalisé du contenu sur la durée.

Parties du cours d'algèbre	Temps d'apprentissage
Avant-propos (Première Partie)	30 minutes
Document sur les systèmes (Première Partie)	3 heures
Notions de la Première Partie	7 heures
Notions de la Seconde Partie, chapitres II et III	6 heures
Notions de la Seconde Partie, chapitres III, IV et V	10 heures
Notions de la Troisième Partie	**7 heures**

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre II
Vocabulaire de la diagonalisation

II.1 Objectif du chapitre

Dans ce chapitre, on va apprendre à trouver, quand c'est possible, des bases dans lesquelles les endomorphismes sont représentés par des *matrices diagonales*, c'est à dire des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf (éventuellement) ceux de la *diagonale principale*.

Les résultats qu'on va établir reposent sur ceux que l'on a mis en évidence dans les parties précédentes du cours. Pour que ces résultats puissent être énoncés de manière concise, on commence par introduire un vocabulaire spécifique à la diagonalisation.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Valeurs propres

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.1

Comme on vient de le dire, l'objectif de ce chapitre est d'apprendre à trouver des bases par rapport auxquelles un endomorphisme f puisse être représenté par une matrice diagonale. Les coefficients apparaissant dans la diagonale principale d'une telle matrice portent le nom de **valeurs propres** de l'endomorphisme f : on va voir ici plus précisément à quelle condition un nombre réel peut être appelé valeur propre de l'endomorphisme f.

On se place pour cela dans un espace vectoriel E et on note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ une base de E par rapport à laquelle un endomorphisme f est représenté par la matrice diagonale D suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par définition, les colonnes de cette matrice D contiennent les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des images $f(\vec{e}_j)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$. Par conséquent, la première

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

colonne de D traduit le fait que $f(\vec{e}_1)$ a pour coordonnées :

$$f(\vec{e}_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ce qui, avec l'écriture en ligne, signifie : $f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$.

Les coefficients de la diagonale principale de D interviennent tous dans une relation de ce type, puisque la $j^{\text{ème}}$ colonne de D s'interprète par :

$$f(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$$

A partir de cette constation, on définit la notion de valeur propre d'un endomorphisme : **un nombre réel $\boldsymbol{\lambda}$ est appelé valeur propre de l'endomorphisme $\boldsymbol{f}$ si il existe au moins un vecteur non nul $\vec{\boldsymbol{u}}$ de $\boldsymbol{E}$ vérifiant la relation $\boldsymbol{f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}}$** . (On élimine le vecteur nul dans la définition, car sinon tout nombre réel pourrait être considéré comme une valeur propre de f).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Vecteurs propres et sous-espaces propres

Exemples :
Exemple A.2.2

Exercices :
Exercice B.2.2

On vient de voir que l'existence d'une valeur propre λ d'un endomorphisme f était conditionnée à l'existence d'au moins un vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire à sa propre image $f(\vec{u})$. Un tel vecteur est appelé ***vecteur propre* de $\boldsymbol{f}$ pour la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$**. C'est donc un vecteur qui vérifie la relation :

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

Cette relation peut également s'écrire :

$$f(\vec{u}) - \lambda\vec{u} = \vec{0}$$

Ou encore, en se souvenant que Id_E désigne *l'application identité* de E et que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, $Id_E(\vec{u}) = \vec{u}$:

$$\big(f - \lambda\, Id_E\big)(\vec{u}) = \vec{0}$$

Ce qui signifie que le vecteur $\vec{u}$ appartient au noyau $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\, Id_E)$ de l'application linéaire $f - \lambda\, Id_E$. On vérifie aisément que, réciproquement, tout vecteur non nul de ce noyau est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

L'ensemble des vecteurs propres d'un endomorphisme $\boldsymbol{f}$ pour une valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$, auquel on adjoint le vecteur nul $\vec{0}$, est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$ et se note $\boldsymbol{E_\lambda}$. On vient de montrer que cet ensemble était le noyau d'une application linéaire : en particulier, c'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace E dans lequel on travaille. Formellement, on a :

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\, Id_E) = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.4 Polynôme caractéristique

Exemples :
Exemple A.2.3
Exemple A.2.4

Exercices :
Exercice B.2.3

D'après le paragraphe précédent, quand on sait qu'un nombre réel λ est une valeur propre de l'endomorphisme f d'un espace vectoriel E, alors on peut trouver le sous-espace propre E_λ (contenant les vecteurs propres associés à λ) en déterminant le noyau de l'application $f - \lambda\, Id_E$. La recherche de noyau est un problème qu'on a déjà étudié, cependant, il faut au préalable avoir déterminé la ou les valeur(s) propre(s) de f.

On remarque pour cela que, si λ est une valeur propre de f, alors le noyau de l'application $f - \lambda\, Id_E$ contient d'autres vecteurs que le vecteur nul. Par conséquent, l'application $f - \lambda\, Id_E$ n'est pas bijective, puisque des vecteurs différents de E ont pour image par cette application le vecteur nul $\vec{0}$. Or, on a vu, lorsqu'on a étudié les matrices inversibles, qu'un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice qui le représente est de déterminant non nul (quelle que soit la base par rapport à laquelle on travaille). On en déduit finalement que, si λ est une valeur propre de f et si on note A la matrice représentant f par rapport à une base $\mathcal{B}$ de E, alors le déterminant de la matrice $A - \lambda\, I_n$ est nul.

Ce résultat conduit à définir le **polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$ d'un endomorphisme f : c'est le polynôme d'indéterminée λ que l'on obtient en**

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

calculant le déterminant dét $(A - \lambda I_n)$ où A est une matrice représentative de f :

$$P_f(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I_n)$$

Par ailleurs, on peut montrer que la réciproque du résultat qu'on vient d'établir est vraie. On retiendra finalement le théorème suivant : **les racines réelles du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f sont les valeurs propres de f .** On appelle ***ordre de multiplicité*** d'une valeur propre son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre III
Pratique de la diagonalisation

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.1 Définition

Exercices :
Exercice B.3.1

Avec le vocabulaire introduit dans le chapitre précédent, on peut reformuler la problématique de cette dernière partie du cours : trouver une base par rapport à laquelle un endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale revient à trouver une base composée de vecteurs qui soient tous des vecteurs propres de f (pour diverses valeurs propres).

Cependant, rien ne garantit, dans ce qu'on a fait jusqu'à présent, qu'une telle base existe pour n'importe quel endomorphisme. On dira donc qu'**un endomorphisme f d'un espace vectoriel E est diagonalisable si il existe une base de E composée uniquement de vecteurs propres de f** . Diagonaliser f consiste alors à trouver une telle base de sorte que la matrice représentant f par rapport à cette base soit diagonale : on appellera ***matrice diagonale réduite*** cette matrice.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Théorème général de diagonalisation

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.2

On a dit qu'aucun des résultats vus jusqu'à présent ne garantissait que tous les endomorphismes étaient diagonalisables : on va voir ici que, effectivement, certains endomorphismes ne le sont pas, et on énoncera les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un endomorphisme pour être diagonalisable.

Par définition, pour qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E soit diagonalisable, il doit exister une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ de E composée exclusivement de vecteurs propres de f . Ces vecteurs $\vec{e}_j$ sont alors des vecteurs propres pour des valeurs propres réelles λ_j . Or, on a vu que les valeurs propres d'un endomorphisme correspondaient aux racines de son polynôme caractéristique : par conséquent, si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a pas de racines réelles (mais uniquement des racines complexes), alors cet endomorphisme ne peut pas être diagonalisable.

La nature des racines du polynôme caractéristique est un premier critère qui va discriminer les endomorphismes diagonalisables des autres. On montre qu'il existe un deuxième critère portant sur l'ordre de multiplicité des racines du polynôme caractéristique carac-

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

téristique. Plus précisément, on peut établir le théorème général de diagonalisation suivant.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si :

- **d'une part, son polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$ n'a que des racines réelles,**
- **et, d'autre part, la dimension du sous-espace propre E_λ de chaque valeur propre λ de f est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.**

Si les deux conditions sont vérifiées, on détermine une base de chaque sous-espace propre, et la famille composée des vecteurs de base de chaque sous-espace propre forme alors une base de E par rapport à laquelle f est représenté par une matrice diagonale.

Théorème général de diagonalisation

III.3 Cas particulier de diagonalisation

Exemples :
Exemple A.3.4

D'après le théorème énoncé dans le paragraphe précédent, pour justifier qu'un endomorphisme est diagonalisable, il est nécessaire de s'assurer que son polynôme caractéristique n'a que des racines réelles et que les ordres de multiplicité des différentes valeurs propres coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres correspondants.

Cependant, l'étude des dimensions des sous-espaces propres n'est pas nécessaire lorsque les racines du polynôme caractéristique sont toutes réelles et d'ordre de multiplicité égal à 1. En effet, dans ce cas-là, on peut montrer que les sous-espaces propres associés seront tous forcément de dimension égale à 1. Ainsi, **tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique n'a que des racines réelles d'ordre 1 est diagonalisable**.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.4 Cas des matrices symétriques

Exercices :
Exercice B.3.3

Outre le cas des endomorphismes dont le polynôme caractéristique n'a que des racines réelles simples, il existe un autre cas pour lequel il n'est pas utile de vérifier les deux conditions du théorème général de diagonalisation : c'est celui des *matrices symétriques*, c'est à dire des matrices égales à leur propre transposée.

En effet, on montre que **tout endomorphisme représenté par une matrice symétrique est diagonalisable**.

Cependant, si on souhaite trouver une base par rapport à laquelle l'endomorphisme est représenté par une matrice diagonale, il est toujours nécessaire de calculer le polynôme caractéristique, puis de déterminer les différents sous-espaces propres.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.5 Trigonalisation

Il est plus pratique et facile de manipuler une matrice diagonale qu'une matrice quelconque. C'est pour cela qu'on a appris à diagonaliser un endomorphisme. Cependant, on a vu que certains endomorphismes ne sont pas diagonalisables. Dans de tels cas, on peut parfois quand même trouver une base par rapport à laquelle l'endomorphisme est représenté par une matrice simple.

En effet, si seule la première condition du théorème général de diagonalisation est satisfaite, c'est à dire si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f n'a que des racines réelles, alors on peut trouver une base par rapport à laquelle f est représenté par une *matrice triangulaire supérieure* (c'est à dire dont les coefficients sous la diagonale principale sont tous nuls). On dit alors qu'on a **trigonalisé** ou **triangularisé** l'endomorphisme f.

Les théorèmes de trigonalisation sont plus lourds à exposer que ceux de diagonalisation : le lecteur intéressé est invité à consulter des ouvrages plus complets et rigoureux que ce cours pour les découvrir...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exemples

A.1 Exemples de l'avant-propos

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exercices :
Exercice B.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi ”Exemple A.1.1” depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi ”Exemple A.1.1” de l’exercice B.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l’un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exemples du chapitre II

Exemple A.2.1 Valeurs propres

Cours :
Valeurs propres

Exercices :
Exercice B.2.1

On a travaillé dans un exemple de la partie précédente du cours avec un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$. f était défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = \vec{i} + 4\vec{j}$$

La matrice de f par rappport à la base $\mathcal{B}$ était donc : $M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

On avait montré que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ suivants vérifiaient des relations particulières :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

En effet, on a :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\vec{e}_1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et :

$$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 3\vec{e}_2$$

Avec le vocabulaire que l'on a introduit dans le cours, on peut donc reformuler ces résultats en disant que l'endomorphisme f admet les nombres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ comme valeurs propres.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.2 Recherche des sous-espaces propres

Cours :
Sous-espaces propres

Exercices :
Exercice B.2.2

On reprend les données de l'exemple précédent dans lequel on a constaté que les nombres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ étaient des valeurs propres de l'endomorphisme f étudié.

Par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$, f était représenté par la matrice $M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ vérifiaient les relations :

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 \quad \text{ et } f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_2$$

Le vecteur $\vec{e}_1$ est donc, d'après le vocabulaire introduit dans le cours, un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda_1 = 2$, tandis que le vecteur $\vec{e}_2$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$.

En particulier, le vecteur $\vec{e}_1$ appartient au sous-espace propre $E_{\lambda_1} = E_2$ qui contient tous les vecteurs propres de f pour la valeur propre $\lambda_1 = 2$. On sait que ce sous-espace propre E_2 est un sous-espace vectoriel de E. Pour le déterminer, il suffit de chercher

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

les vecteurs $\vec{u}$ de E vérifiant la relation : $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$. On résout donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_2 &\iff f(\vec{u}) = 2\vec{u} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Les deux équations obtenues sont proportionnelles et donc équivalentes. Par conséquent, le sous-espace propre E_2 est caractérisé par l'équation cartésienne : $y = x$. En dimension 2, cette équation correspond à une droite vectorielle : on a donc montré que E_2 était la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_1$ (puisque les coordonnées de $\vec{e}_1$ vérifient l'équation).

De la même façon, on peut montrer que le sous-espace propre $E_{\lambda_2} = E_3$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_2$.

Cet exemple a donc permis d'illustrer les termes *vecteur propre* et *sous-espace propre*, et de donner la technique permettant de déterminer les sous-espaces propres. On a travaillé en dimension 2, mais la technique reste la même en dimension 3 : la différence se fait sur l'interprétation des résultats, puisque un sous-espace propre peut alors être soit un plan vectoriel caractérisé par une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = 0$, soit une droite vectorielle caractérisée par un système de deux équations cartésiennes de plans non proportionelles.

Exemple A.2.2
Recherche des sous-espaces propres

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.3 Recherche de valeurs propres

Cours :
Polynôme caractéristique

Exemples :
Exemple A.2.4

Exercices :
Exercice B.2.3

On travaille encore avec les mêmes données que dans les deux exemples précédents. Jusqu'à présent, on a déterminé les sous-espaces propres associés aux valeurs propres que l'on avait *remarquées* auparavant. Vérifions que ces valeurs propres correspondent aux racines du polynôme caractéristique de f .

Par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$, f était représenté par la matrice $M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, donc le polynôme caractéristique de f est :

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= \text{dét}\,(M_{f,\mathcal{B}} - \lambda\, I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On a utilisé la combinaison $C_1 \to C_1 + C_2$ pour faire apparaître un facteur commun

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

dans les deux coefficients de la première colonne, de sorte que :

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{avec la combinaison } L_2 \to L_2 - L_1 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $P_f(\lambda)$ correspondent bien aux valeurs propres avec lesquelles on avait travaillé.

On remarque qu'on a utilisé les propriétés des déterminants pour obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée et ainsi déterminer ses racines aisément. En dimension 2, ce n'est pas indispensable, car le polynôme caractéristique est alors toujours de degré 2 et on est capable de trouver ses racines à partir d'un simple calcul de discriminant. Par contre, en dimension 3, le polynôme caractéristique est de degré 3, donc pour trouver ses racines, on a intérêt à s'inspirer de ce qu'on a fait dans cet exemple : il s'agit de trouver une combinaison qui fasse apparaître un facteur de la forme $(\lambda-\alpha)$ commun à tous les coefficients d'une même ligne ou d'une même colonne pour, ensuite, pouvoir rendre nuls la plupart des coefficients de cette ligne ou colonne.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.4 Ordre de multiplicité des valeurs propres

Cours :
Polynôme caractéristique

Exemples :
Exemple A.2.3

Exercices :
Exercice B.2.3

Il est conseillé, lors du calcul du polynôme caractéristique, d'utiliser les propriétés des déterminants afin d'avoir un résultat sous forme factorisée : les racines (donc les valeurs propres) sont alors aisément identifiables.

Et, en plus de cela, on peut également lire facilement *l'ordre de multiplicité* d'une valeur propre donnée : c'est l'exposant du facteur annulé par cette valeur propre.

Ainsi, si un endomorphisme f admet le polynôme caractéristique suivant :

$$P_f(\lambda) = -(\lambda + 5)(\lambda - 4)^2$$

alors :
- $\lambda_1 = -5$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité égal à 1, car le facteur $(\lambda + 5)$ n'a pas d'exposant, ce qui signifie qu'il est élevé à la puissance 1. On dit aussi que $\lambda_1 = -5$ est une ***valeur propre simple*** de f .
- $\lambda_2 = 4$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité égal à 2, puisque le facteur $(\lambda - 4)$ figure avec un exposant 2. On parle aussi de ***valeur propre double***.

Attention cependant à avoir factorisé le polynôme caractéristique avec des facteurs irréductibles, c'est à dire sous forme de produit de polynômes de degré 1 (éventuellement élevé à une certaine puissance) et de polynômes du second degré de discriminant

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

strictement négatif (éventuellement élevé à une certaine puissance). Par exemple, si le polynôme caractéristique obtenu est :

$$P_f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)$$

alors il faut le réécrire à l'aide de l'identité remarquable "$a^2 - b^2$" sous la forme suivante :

$$P_f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

On peut alors voir que -1 est une valeur propre double et que 1 est une valeur propre simple de f.

A.3 Exemples du chapitre III

Exemple A.3.1 Endomorphisme non diagonalisable

Cours :
Diagonalisation (théorème général)

Exemples :
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.2

Si un endomorphisme est diagonalisable, alors il existe une base par rapport à laquelle sa matrice est diagonale. On a appelé valeurs propres les coefficients réels figurant dans la diagonale principale de cette matrice et on a dit que ces valeurs propres étaient les racines réelles du polynôme caractéristique de l'endomorphisme. Par conséquent, ce polynôme doit avoir des racines réelles pour que l'endomorphisme soit diagonalisable. Or, ce n'est pas toujours le cas.

En effet, considérons l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = -\vec{i}$$

Sa matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_f(\lambda) = \text{dét}\,(A - \lambda\, I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.1
Endomorphisme non diagonalisable

Ainsi, le polynôme caractéristique de f n'a pas de racine réelle et f ne peut pas être diagonalisable.

Remarquons qu'on pouvait démontrer que f n'a pas de valeur propre réelle directement, c'est à dire sans passer par le théorème sur le polynôme caractéristique. Effectivement, si λ était une valeur propre réelle de f, alors il devrait exister un vecteur $\vec{u}$ de E non nul vérifiant la relation : $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Si on appelle x et y les coordonnées de ce vecteur $\vec{u}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$, on devrait donc avoir :

$$f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -\lambda x \\ x = \lambda \times (-\lambda x) = -\lambda^2 x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = -\lambda x \\ (\lambda^2 + 1)x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, quelle que soit la valeur (réelle) de λ, seul le vecteur nul vérifie la relation $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, ce qui signifie bien que f n'admet aucune valeur propre réelle.

Exemple A.3.2 Dimension des sous-espaces propres

Cours :
Diagonalisation (théorème général)

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.2

Dans l'exemple précédent, on a vu le cas d'un endomorphisme qui n'était pas diagonalisable car son polynôme caractéristique n'avait pas (que) des racines réelles. On va ici illustrer l'importance de la deuxième condition du théorème général de diagonalisation en étudiant un endomorphisme pour lequel la dimension des sous-espaces propres ne coïncide pas avec l'ordre de multiplicité des valeurs propres correspondantes.

Cet endomorphisme, noté f, est défini par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ de l'espace vectoriel E par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} \quad \text{et } f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$$

Sa matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que le vecteur $\vec{i}$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda = 1$. Regardons si f admet d'autres valeurs propres en calculant son polynôme caractéristique :

$$P_f(\lambda) = \text{dét}\,(A - \lambda\, I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de f et elle est d'ordre de multiplicité égal à 2. D'après le théorème général de diagonalisation, puisque le polynôme caractéristique n'a que des racines réelles, pour que f soit diagonalisable, il faudrait que le sous-espace propre $E_\lambda = E_1$ soit de dimension 2. Mais, puisque E est lui-même de dimension 2, cela signifie que le sous-espace propre E_1 devrait être égal à E tout entier, c'est à dire que tous les vecteurs de E devraient être des vecteurs propres de f pour la valeur propre $\lambda = 1$. Or on sait que : $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \neq \vec{j}$, donc E_1 est différent de E et n'est pas de dimension égale à 2. Ainsi, d'après le théorème, f n'est pas diagonalisable.

Par ailleurs, on peut ici justifier que f n'est pas diagonalisable sans utiliser le théorème. En effet, si f était diagonalisable, alors il existerait une base $\mathcal{B}'$ par rapport à laquelle la matrice représentative de f serait une matrice diagonale D ayant comme coefficients dans la diagonale principale les valeurs propres de f. Puisque f n'admet que $\lambda = 1$ comme valeur propre, D serait donc la matrice unité I_2. Or on sait que deux matrices représentant le même endomorphisme par rapport à deux bases différentes sont reliées entre elles par une formule mettant en jeu les matrices de passage entre les deux bases. Si on appelle $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ celle de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, cette formule s'écrit ici :

$$A = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times D \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

Mais, D étant égale à I_2 et les matrices de passage étant inverses l'une de l'autre :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times D \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times I_2 \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = I_2$$

Ainsi, on aboutit à une contradiction puisque A n'est pas égale à la matrice unité, ce qui implique bien que f n'était pas diagonalisable.

Exemple A.3.2
Dimension des sous-espaces propres

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.3 Application du théorème de diagonalisation

Cours :
Diagonalisation (théorème général)

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2

Exercices :
Exercice B.3.2

Dans les deux exemples précédents, on a montré l'importance des deux conditions apparaissant dans le théorème général de diagonalisation en présentant deux endomorphismes non diagonalisables pour des raisons différentes. On va maintenant voir comment appliquer le théorème pour démontrer qu'un endomorphisme est diagonalisable. On illustrera les propos avec l'endomorphisme f déjà utilisé auparavant et dont la matrice par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ de E était $M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Pour démontrer qu'un endomorphisme f est diagonalisable à l'aide du théorème général de diagonalisation, on procède selon les étapes suivantes :

– On commence par chercher les valeurs propres de f et leurs ordres de multiplicité en calculant le polynôme caractéristique de f sous forme factorisée. Dans le cas de l'application f étudiée précédemment, on avait trouvé $P_f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Par conséquent, f admettait les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ qui étaient toutes les deux des valeurs propres simples (c'est à dire d'ordre de multiplicité égal à 1).

– Si le polynôme caractéristique n'a pas que des racines réelles, on peut conclure

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

que l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et s'arrêter là. Sinon, on détermine tous les sous-espaces propres : la dimension et une base pour chacun d'eux. Avec l'application f d'illustration, on avait trouvé que les deux sous-espaces propres étaient des droites vectorielles (donc de dimension 1) et qu'elles étaient engendrées l'une par le vecteur $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et l'autre par le vecteur $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

– Si la dimension de l'un des sous-espaces propres n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée, on peut conclure que l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et s'arrêter là. Sinon, on conclut que l'endomorphisme est diagonalisable : en réunissant les vecteurs des bases de chaque sous-espace propre, on forme une base par rapport à laquelle l'endomorphisme est représenté par une matrice diagonale dont les coefficients non nuls sont les valeurs propres trouvées précédemment (le rangement des valeurs propres dans la diagonale principale doit correspondre à l'ordre des vecteurs propres associés dans la nouvelle base formée). Dans le cas de l'exemple, les sous-espaces propres étant de dimension égale à 1, c'est à dire égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres associées, f est diagonalisable. La famille $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ forme une base $\mathcal{B}'$ par rapport à laquelle f est représenté par la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple A.3.3
Application du théorème de diagonalisation

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.4 Cas particulier de diagonalisation

Cours :
Diagonalisation (théorème particulier)

Quand le polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a que des racines réelles simples, alors cet endomorphisme n'a que des valeurs propres simples et les sous-espaces propres associés sont nécessairement des droites vectorielles. Par conséquent, dans ce cas particulier, la deuxième condition du théorème général de diagonalisation est toujours satisfaite et il n'est pas utile de la vérifier.

Ainsi, dans le cas de l'endomorphisme f utilisé de manière récurrente dans les exemples précédents et qui admettait $P_f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ comme polynôme caractéristique, on pouvait affirmer que f était diagonalisable avant même de rechercher les sous-espaces propres associés. Cependant, pour connaître une base par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale, il est nécessaire de chercher un vecteur propre pour chaque valeur propre simple.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

B.1 Exercices de l'avant-propos

Exercice B.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exercice B.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exercice B.1.1" de l'exemple A.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.2 Exercices du chapitre II

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.1 Valeur propre nulle

Cours :
Valeurs propres

Exemples :
Exemple A.2.1

On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ défini par :

$$f(\vec{i}) = 5\vec{i} - \vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

1. Ecrire la matrice M représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution
2. Déterminer le noyau de f. Solution
3. L'endomorphisme f admet-il la valeur $\lambda = 0$ comme valeur propre ? Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.2 Recherche de sous-espaces propres

Cours :
Sous-espaces propres

Exemples :
Exemple A.2.2

Dans l'espace vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(\vec{i}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}\ ,\ f(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

1. Calculer l'image par f du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Solution
2. Le nombre $\lambda = -2$ est-il une valeur propre de f ? Si oui, déterminer le sous-espace propre E_{-2} associé : nature, dimension et base. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.3 Calcul de polynôme caractéristique

Cours :
Polynôme caractéristique

Exemples :
Exemple A.2.3
Exemple A.2.4

On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ défini par :

$$f(\vec{i}) = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = 13\vec{i} - 8\vec{j} + 11\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = 11\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f sous forme factorisée. (*Indication : on cherchera, pour commencer, une combinaison simple entre seulement 2 lignes ou 2 colonnes faisant apparaître une ligne ou une colonne pratique à manipuler dans la suite du calcul. . .*) Solution
2. Faire la liste des valeurs propres en précisant leurs ordres de multiplicité respectifs. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.3 Exercices du chapitre III

Exercice B.3.1 Matrice diagonale réduite

Cours :
Diagonalisation (définition)

On travaille ici dans un espace vectoriel E de dimension 5. On dispose d'un endomorphisme f de E dont on sait qu'il est diagonalisable. On a trouvé une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5)$ formée de vecteurs propres de f ; plus précisément, on sait que :

- $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont des vecteurs propres de f pour la valeur propre triple $\lambda_1 = -1$.
- $\vec{e}_4$ et $\vec{e}_5$ sont des vecteurs propres de f pour les valeurs propres simples respectives $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 4$.

Ecrire la matrice diagonale réduite représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.2 Diagonalisation complète et application

Cours :
Diagonalisation (théorème général)

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{et } f(\vec{k}) = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f .
   Indication Solution
2. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable et le diagonaliser.
   Solution
3. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres. Quelle formule relie la matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ et la matrice D représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}'$? Solution
4. Calculer la matrice inverse P^{-1} . Solution
5. Calculer la matrice D^7 . Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

6. Comment peut-on calculer la matrice A^7 en n'effectuant que deux multiplications de matrices ? (On ne demande pas de faire le calcul) Solution

Exercice B.3.3 Diagonalisation rapide

Cours :
Diagonalisation des matrices symétriques

Un endomorphisme f de l'espace vectoriel E est représenté par la matrice A suivante par rapport à une base $\mathcal{B}$ de E :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est diagonalisable et donner sa matrice diagonale réduite.

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Evaluation finale

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Evaluation sommative finale

On trouvera un sujet d'évaluation abordant l'essentiel des notions introduites dans les 3 parties de ce cours d'algèbre linéaire sur le site d'IUTenLigne (à la même URL que ce fichier).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Solution des exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.1 Mise en garde

Attention, les pages qui suivent ne sont pas censées être lues de manière linéaire : elles n'ont un sens que si on y accède depuis la page contenant l'énoncé de l'exercice auquel elles font référence, et après avoir cherché cet exercice.

Document C.2.2 Valeur propre nulle (1)

Exercices :
Exercice B.2.1

La matrice M contient, en colonnes, les coordonnées de $f(\vec{i})$ et de $f(\vec{j})$ par rapport à $\mathcal{B}$, c'est à dire :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.3 Valeur propre nulle (2)

Exercices :
Exercice B.2.1

Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs annulant f. Soit alors $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur du noyau $\mathrm{Ker}f$; on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Ker}f \quad & \Longleftrightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \\
& \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} 15y + 2y = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, le noyau de f ne contient que le vecteur nul : $\mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.4 Valeur propre nulle (3)

Exercices :
Exercice B.2.1

Par définition, $\lambda = 0$ est une valeur propre de f si il existe au moins un vecteur $\vec{v}$ non-nul tel que :

$$f(\vec{v}) = 0.\vec{v} \quad \text{c'est à dire} \quad f(\vec{v}) = \vec{0}$$

Un tel vecteur appartiendrait donc nécessairement au noyau de f. Or, on a vu à la question précédente que $\mathrm{Ker} f$ ne contenait que le vecteur nul. Par conséquent, $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de f.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.5 Recherche de sous-espaces propres (1)

Exercices :
Exercice B.2.2

La matrice M représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Et l'image par f de $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est :

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -2\vec{u}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.6 Recherche de sous-espaces propres (2)

Exercices :
Exercice B.2.2

D'après la question précédente, $f(\vec{u}) = -2\vec{u}$: cela signifie que $\lambda = -2$ est une valeur propre de f et que le vecteur $\vec{u}$ proposé est un vecteur propre pour cette valeur propre.

Déterminons alors l'ensemble des vecteurs propres de f pour cette valeur propre $\lambda = -2$, c'est à dire le sous-espace propre E_{-2}. On a :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_{-2} \iff f(\vec{v}) = -2\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + y - 3z = -2x \\ 6x - y - 3z = -2y \\ 6x + y - 5z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + y - 3z = 0 \\ 6x + y - 3z = 0 \\ 6x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff 6x + y - 3z = 0$$

L'équation obtenue est une équation cartésienne de plan vectoriel. Le vecteur $\vec{u}$ de

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

la question appartient à ce plan, ainsi que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ car ses coordonnées vérifient l'équation obtenue. Or, ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de ce plan.

Finalement, le sous-espace propre E_{-2} est le plan vectoriel (de dimension 2) engendré par ces vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Document C.2.7 Calcul de polynôme caractéristique (1)

Exercices :
Exercice B.2.3

La matrice M représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 11 \\ -1 & -8 & -7 \\ 1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et le polynôme caractéristique de f est :

$$P_f(\lambda) = \text{dét}(f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 13 & 11 \\ -1 & -8-\lambda & -7 \\ 1 & 11 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 13 & 11 \\ -1 & -8-\lambda & -7 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad (\text{avec } L_3 \to L_3 + L_2)$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 13 & 11 \\ -1 & -8-\lambda & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 11 \\ -1 & -1-\lambda & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 - C_3)$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -2-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + C_2)$$

$$= (3-\lambda)(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(2+\lambda)(-1-\lambda-2)$$

Ainsi : $P_f(\lambda) = (3-\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)$.

Document C.2.7
Calcul de polynôme caractéristique (1)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.8 Calcul de polynôme caractéristique (2)

Exercices :
Exercice B.2.3

Les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique comptées avec leur ordre de multiplicité. Or on a trouvé à la question précédente :

$$P_f(\lambda) = (3-\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)$$

Par conséquent, f n'a que des valeurs propres simples qui sont : $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ et $\lambda = -3$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.9 Matrice diagonale réduite (1)

Exercices :
Exercice B.3.1

Les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ étant des vecteurs propres de f pour la valeur propre triple $\lambda_1 = -1$, on peut écrire :

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$$

De même, $\vec{e}_4$ et $\vec{e}_5$ étant des vecteurs propres de f pour les valeurs propres respectives $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 4$, on a :

$$f(\vec{e}_4) = \vec{0} \qquad f(\vec{e}_5) = 4\vec{e}_5$$

Or, la matrice diagonale réduite D représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ est la matrice contenant en colonnes les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$, ... , $f(\vec{e}_5)$ par rapport à $\mathcal{B}$. D'où :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.10 Diagonalisation complète et application (1)

Exercices :
Exercice B.3.2

Pour calculer le polynôme sous forme factorisée, on peut commencer par transformer le déterminant de $(f - \lambda Id)$ en remplaçant la première colonne par la somme des 3 colonnes. . .

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.11 Diagonalisation complète et application (2)

Exercices :
Exercice B.3.2

La matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Calculons le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned}
P_f(\lambda) &= \text{dét}(f - \lambda Id_E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \to L_2 - L_1) \\ (L_3 \to L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\,[(2-\lambda)(-6-\lambda) + 12] \\
&= (4-\lambda)[\lambda^2 + 4\lambda] = (4-\lambda)\,\lambda\,(4+\lambda)
\end{aligned}$$

Ainsi : $P_f(\lambda) = \lambda(4-\lambda)(4+\lambda)$.

Document C.2.11
Diagonalisation complète et application (2)

Document C.2.12 Diagonalisation complète et application (3)

Exercices :
Exercice B.3.2

On a vu à la question précédente que le polynôme caractéristique de f n'avait que des racines réelles (0, 4 et -4) toutes d'ordre de multiplicité égal à 1. Pour montrer que f est diagonalisable, il reste donc à montrer que les sous-espaces propres E_0 , E_4 et E_{-4} , sont tous de dimension égale à 1, c'est à dire qu'il s'agit de droites vectorielles.

Recherche de E_0 :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_0 \iff f(\vec{v}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases} 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

On reconnait un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle. Les coordon-

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

nées du vecteur $\vec{e}_1$ suivant vérifient ce système :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Donc E_0 est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_1$.

Recherche de E_4 :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_4 \iff f(\vec{v}) = 4\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 4z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ 2x + 4y - 2z = 4z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ x - 2y + x = 0 \\ 2x + 4y - 6x = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ y = x \end{array} \right.$$

On reconnait un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle. Les coordonnées du vecteur $\vec{e}_2$ suivant vérifient ce système :

$$\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Donc E_4 est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_2$.

Recherche de E_{-4} :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_{-4} \iff f(\vec{v}) = -4\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 4z = -4x \\ x + 2y + z = -4y \\ 2x + 4y - 2z = -4z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ x + 6y - x = 0 \\ 2x + 4y - 2x = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ y = 0 \end{array} \right.$$

On reconnait un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle. Les coordonnées du vecteur $\vec{e}_3$ suivant vérifient ce système :

$$\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Donc E_{-4} est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_3$.

Finalement, f est bien diagonalisable, et la famille $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E formée de vecteurs propres, par rapport à laquelle f est représentée par la matrice diagonale D suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque : suivant l'ordre dans lequel on a déterminé les sous-espaces propres, on peut obtenir une matrice D avec des coefficients diagonaux positionnés dans un ordre différent.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.13 Diagonalisation complète et application (4)

Exercices :
Exercice B.3.2

Attention : la réponse à cette question dépend du choix des vecteurs propres $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ fait à la question précédente et de l'ordre dans lequel on avait déterminé les sous-espaces propres...

Avec les vecteurs déterminés précédemment, on obtient la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors la relation : $D = P^{-1}AP$ ou encore $A = PDP^{-1}$.

Document C.2.14 Diagonalisation complète et application (5)

Exercices :
Exercice B.3.2

La matrice P^{-1} s'obtient à l'aide de la formule :

$$P^{-1} = \frac{1}{\text{dét}P} \, {}^t\text{Com}P$$

D'où :

$$P^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.15 Diagonalisation complète et application (6)

Exercices :
Exercice B.3.2

On met en évidence ici une propriété spécifique des matrices diagonales :

$$D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Ainsi, D^2 s'obtient en élevant les coefficients diagonaux au carré, ce qui n'est pas vrai pour une matrice quelconque en général.

On généralise aisément cette propriété au cas de n'importe quelle puissance entière positive. En particulier :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^7 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^7 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.16 Diagonalisation complète et application (7)

Exercices :
Exercice B.3.2

En utilisant la formule reliant A et P, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A^7 &= (PDP^{-1})^7 \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \end{aligned}$$

Or, les produits $P^{-1}P$ étant égaux à la matrice unité I_3, on a finalement :

$$A^7 = PDDDDDDDP^{-1} = PD^7P^{-1}$$

Ainsi, on obtient A^7 en multipliant tout d'abord P et D^7 (calculée précédemment) et en multipliant la matrice obtenue à P^{-1} : seules 2 mutliplications suffisent.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.17 Diagonalisation rapide (1)

Exercices :
Exercice B.3.3

La matrice A étant symétrique, elle est nécessairement diagonalisable. De plus, pour trouver sa matrice diagonale réduite, il suffit de trouver les valeurs propres, c'est à dire les racines du polynôme caractéristique :

$$
\begin{aligned}
P_f(\lambda) &= \text{dét}(f - \lambda\, Id_E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \to L_2 - L_1) \\ (L_3 \to L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= -(\lambda+1)(2-\lambda)^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, les valeurs propres de f sont $\lambda = -1$ (simple) et $\lambda = 2$ (double), et on peut

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

trouver une base formée de vecteurs propres par rapport à laquelle f est représenté par la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Index des notions