Algèbre linéaire en dimension finie

Deuxième partie : calcul matriciel

Johan MILLAUD

Département Génie Civil de l'IUT du Limousin

Février 2006 - version 2

Table des matières

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre I
Avant-propos

I.1 Navigation dans le cours

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 LaTeX et Polytex

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale Polytex.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

Polytex est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de Polytex intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Panneau de navigation Acrobat

Le cours électronique produit par Polytex est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Acrobat Reader. Les versions récentes de ce logiciel disposent d'un panneau de navigation dans lequel apparaît la structure hiérarchique du cours (affichage par signets). On peut ainsi accéder directement à une page quand on connait son emplacement dans le cours.

Cette technique de navigation, dite navigation physique, ne doit donc être utilisée que lorsqu'on connait déjà bien le cours et qu'on cherche une information particulière. Dans tous les autres cas, il est vivement conseillé de fermer ce panneau de navigation et d'utiliser les liens actifs et les systèmes de navigation propres au cours.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).

On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et la table des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◀ précédent" permet de revenir au grain sur le panneau de navigation Acrobat, et le lien "▶ suivant" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◀ précédent" et "▶ suivant" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain n'excède jamais (ou presque) deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◀◀ et ▶▶ situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans le cours. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

Exercices :
Exercice B.1.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain est en général associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Dans certains grains ou exemples, on pourra trouver des renvois à des grains ou exemples antérieurs. Pour ne pas multiplier les renvois et ne pas perdre le lecteur, cela

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ne se produira que très occasionnellement lorsque les grains ou exemples auront des contenus fortement liés et qu'ils seront chronologiquement très éloignés. Ces renvois particuliers sont unilatéraux : il n'y a pas de renvois permettant d'accéder rapidement à un grain ou exemple ultérieur. Dans de tels cas de figure, il est nécessaire de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

I.1.5 Le menu de navigation

On a conseillé plus tôt de limiter l'utilisation du panneau de navigation d'Acrobat Reader, surtout lors d'une première lecture. Cependant, même quand on connait bien le cours, et/ou quand on cherche une information précise, ce panneau n'est pas indispensable, car le cours possède son propre menu de navigation accessible depuis n'importe quelle page : c'est la liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit.

Ainsi, on peut à tout moment accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices. On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : il permet de basculer vers des documents d'approndissement et d'illustration du cours.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, Polytex associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient. . .

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Objectifs pédagogiques et choix didactiques

I.2.1 Objectifs pédagogiques

L'objectif principal de ce cours en 3 parties est de présenter les outils et techniques permettant de diagonaliser des matrices carrées d'ordre 2 et 3. Cette présentation doit permettre d'apprendre à utiliser ces outils et techniques mais aussi de les comprendre. Ainsi, à l'issue de l'apprentissage, on doit être capable de diagonaliser dans $\mathbb{R}$ une matrice (quand c'est possible) en complète autonomie, mais on doit, de plus, avoir acquis des bases suffisamment solides pour appréhender sereinement des prolongements vers la diagonalisation dans $\mathbb{C}$ et la triangularisation.

Pour atteindre l'objectif principal, on fixe deux étapes intermédiaires : maîtriser le calcul vectoriel en dimensions 2 et 3, et acquérir une bonne connaissance du calcul matriciel. Là aussi, on espère que l'apprenant aura assimilé ces notions au point d'entrevoir les généralisations possibles qu'on peut en faire en dimension finie quelconque et dans le cadre d'espaces vectoriels de natures très variées.

On traite ici la deuxième étape. (La première étape a été traitée dans la "première partie : espaces vectoriels de dimension 2 et 3"). A l'issue de cette deuxième partie, on doit commencer avoir une bonne représentation de ce qu'est une application linéaire. On doit maîtriser les règles de calcul matriciel, afin notamment de savoir :

- additionner, multiplier et inverser des matrices
- obtenir sous forme factorisée l'expression d'un déterminant dépendant d'un paramètre
- connaître l'influence de la base sur les coefficients d'une matrice

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Pré-requis

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques très peu rencontrée dans l'Enseignement Secondaire. Ce cours en expose les bases de manière simplifiée : il est abordable avec les outils mathématiques traditionnellement enseignés dans les filières scientifiques et techniques du Lycée. Plus particulièrement, il est fortement souhaitable d'avoir assimilé la notion d'application et les résultats élémentaires concernant les polynômes réels à une indéterminée.

Une bonne connaissance de la géométrie vectorielle vue dans les classes antérieures facilitera la compréhension et la représentation des notions relatives aux espaces vectoriels, mais elle n'est pas indispensable.

En termes de calculs algébriques, on a signalé dès la première partie du cours la nécessité d'être à l'aise avec la résolution des systèmes d'équations linéaires, en particulier quand ces systèmes ne conduisent pas à une solution unique. Le lecteur peu habile dans ce type de résolution trouvera des rappels élémentaires et des conseils pratiques sur ce sujet dans la partie "Documents" de la première partie de ce cours (Première partie : espaces vectoriels de dimension 2 et 3). Il est recommandé de revenir à cette première partie si on ne maîtrise pas bien ce type de résolution.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

On l'a évoqué auparavant : ce cours n'est qu'une présentation simplifiée de résultats élémentaires d'algèbre linéaire en dimensions 2 et 3. Il a été écrit avec l'objectif d'être compréhensible par un étudiant d'IUT (Génie Civil) en autonomie.

Par conséquent, les résultats énoncés ne sont pas systématiquement démontrés, mais on s'est efforcé d'apporter le plus souvent possible des éléments de justification. L'exception la plus notable concerne le calcul de déterminants dont les règles ont été posées sans ménagement (première et deuxième partie du cours).

Par ailleurs, une présentation axiomatique ne semble pas réaliste à ce niveau, surtout dans le cadre d'un cours électronique. C'est pourquoi, même si on a voulu conserver une certaine rigueur, le lecteur averti notera quelques raccourcis et libertés par rapport à une présentation plus académique ; on pourra regretter par exemple l'absence d'une définition claire et précise des notions d'espaces et sous-espaces vectoriels. Le lecteur novice, quant à lui, gardera à l'esprit que ce cours n'est qu'une première approche de l'algèbre linéaire et n'hésitera pas à se documenter à l'aide d'ouvrages plus conventionnels à la lumière de ce qu'il aura déjà acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Choix didactiques

On a parlé d'autonomie pour caractériser la situation didactique dans laquelle est placé un lecteur face à ce cours. En effet, on remarquera que les exercices proposés sont accompagnés de solutions relativement détaillées. On met en garde le lecteur en phase d'apprentissage : il serait illusoire de penser que l'on peut assimiler les notions introduites en se contentant de lire les solutions des exercices proposés. Ne vous laissez pas guider par la facilité : ayez un papier et un stylo pour chercher réellement les exercices avant de consulter leur solution.

Malgré l'autonomie évoquée plus haut, des phases de mise en commun régulières avec un enseignant et d'autres apprenants sont souhaitables : elles permettront à l'enseignant d'apprécier les progrès des étudiants, de remédier aux problèmes qu'ils rencontrent et de combler les inévitables manques de ce cours. L'étudiant, quant à lui, pourra bénéficier d'un retour personnalisé et poursuivre son apprentissage en étant certain de la solidité de ses acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.5 Temps d'apprentissage

L'un des grands avantages de l'enseignement en autonomie est de permettre à chacun d'évoluer à son rythme. Les temps d'apprentissage que l'on donne ici sont donc purement indicatifs et doivent surtout permettre de prévoir un découpage personnalisé du contenu sur la durée.

Parties du cours d'algèbre	Temps d'apprentissage
Avant-propos (Première Partie)	30 minutes
Document sur les systèmes (Première Partie)	3 heures
Notions de la Première Partie	7 heures
Notions de la Seconde Partie, chapitres II et III	**6 heures**
Notions de la Seconde Partie, chapitres III, IV et V	**10 heures**
Notions de la Troisième Partie	7 heures

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre II
Applications linéaires

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1 Objectif du chapitre

Dans les chapitres qui suivent, on va introduire les matrices qui sont des outils de calcul très performants pour résoudre des problèmes portant sur l'étude de plusieurs grandeurs liées entre elles (les projections F_x, F_y et F_z suivant 3 axes d'un vecteur force $\overrightarrow{F}$, par exemple) et dépendant de plusieurs grandeurs (les coordonnées d'espace x, y et z, par exemple).

Ces matrices pourraient être présentées comme de simples tableaux de nombres qu'on manipule suivant certaines règles de calcul, mais une telle présentation ne permettrait pas de saisir pleinement le sens des opérations effectuées.

Pour plus de clarté, on choisit donc dans ce chapitre d'introduire les matrices comme des représentations d'un certain type de fonctions appelées applications linéaires.

II.2 Définition

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.1
Exercice B.2.2

Soit E un espace vectoriel ; **une application linéaire sur E, ou encore un *endomorphisme* de E, est une fonction f admettant E comme ensemble de définition et comme "ensemble d'arrivée", et telle que, pour toute combinaison linéaire $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ de vecteurs de E, on a :**

$$\boldsymbol{f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\, f(\vec{u}) + \mu\, f(\vec{v})}$$

L'exemple le plus simple d'application linéaire est l'homothétie vectorielle, c'est à dire la fonction définie sur E par :

$$f(\vec{u}) = 5\vec{u}$$

(On a choisi arbitrairement le rapport d'homothétie égal à 5)
En effet, l'image, par cette application, d'une combinaison linéaire $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est :

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = 5\,(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = 5\lambda\vec{u} + 5\mu\vec{v} = \lambda \cdot 5\vec{u} + \mu \cdot 5\vec{v} = \lambda\, f(\vec{u}) + \mu\, f(\vec{v})$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Noyau d'une application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.2

Exercices :
Exercice B.2.3

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors, en choisissant λ et μ nuls dans la formule de linéarité de la définition précédente, on a (quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) :

$$f(0\,\vec{u}+0\,\vec{v})=0\,f(\vec{u})+0\,f(\vec{v})$$

Autrement dit :

$$f(\vec{0})=\vec{0}$$

On dit que **le vecteur nul $\vec{0}$ *annule* l'application f**. Cela est vrai pour n'importe quel endomorphisme f. Cependant, pour certains endomorphismes, il existe d'autres vecteurs qui annulent f. On appelle alors **noyau de l'endomorphisme f, et on note $\mathrm{Ker} f$, l'ensemble contenant tous les vecteurs de E qui annulent f**. Formellement, il s'écrit :

$$\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}=\{\vec{\boldsymbol{u}}\in \boldsymbol{E}\,/\,\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{u}})=\vec{\mathbf{0}}\}$$

On peut montrer que le noyau de toute application linéaire est *stable par addition et par multiplication externe*, et donc que c'est un *sous-espace vectoriel* de E. En

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

particulier, en dimension 3, la recherche du noyau d'une application linéaire conduit toujours soit au seul vecteur nul, soit à une droite vectorielle, soit à un plan vectoriel, soit à l'espace E tout entier.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.4 Notation avec deux indices

On anticipe, dans ce paragraphe, sur des problèmes de notations afin d'alléger les paragraphes suivants.

Pour ne pas avoir à distinguer si on travaille en dimension 2 ou 3, voire même en dimension supérieure à 3, on a intérêt, quand on veut nommer les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque, à utiliser une même lettre (x par exemple) accompagnée d'un indice. Ainsi, dans un espace vectoriel E de dimension n et muni d'une base $\mathcal{B}$, on dit que le vecteur quelconque $\vec{v}$ a pour $i^{\text{ème}}$ coordonnée par rapport à $\mathcal{B}$ le nombre x_i, c'est à dire :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Pour désigner, en dimension n, les coordonnées d'un nombre n de vecteurs quelconques, l'indice simple n'est cependant plus suffisant et on utilise alors un indice double.

En effet, plaçons nous dans le cadre général d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$, et supposons que l'on connaisse l'image de chaque vecteur de cette base par un endomorphisme f de E. Cela signifie que l'on

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

connaît par exemple les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$f(\vec{e}_1)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n$$

Pour pouvoir nommer facilement les coordonnées de chaque image $f(\vec{e}_j)$, on a introduit un double indice : a_{ij} désigne donc la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur $f(\vec{e}_j)$. Par exemple, a_{23} se lit "a-deux-trois" et non pas "a-vingt-trois" et désigne la deuxième coordonnées du vecteur $f(\vec{e}_3)$. On a alors :

$$f(\vec{e}_j)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

Notation avec deux indices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.5 Base et application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.3

Exercices :
Exercice B.2.4

La particularité essentielle des applications linéaires, conséquence directe de la formule de linéarité, est qu'il suffit de connaître l'image de seulement quelques vecteurs pour pouvoir calculer l'image de n'importe quel autre vecteur. En particulier, la connaissance des images des vecteurs d'une base est suffisante, du fait du caractère générateur d'une telle famille de vecteurs.

Voyons cela en considérant, dans un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$, un endomorphisme f de E par lequel les images $f(\vec{e}_j)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$ sont :

$$f(\vec{e}_j) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \iff f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

Cherchons alors l'image d'un vecteur quelconque $\vec{v}$ de coordonnées x_1, x_2, $\ldots$,

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

x_n, par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) \\ &\qquad +x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n) \\ &\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad +x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) \end{aligned}$$

Réorganisons cette expression en factorisant par chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\,\vec{e}_1 \\ &\qquad +(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\,\vec{e}_2 \\ &\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad +(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\,\vec{e}_n \end{aligned}$$

Finalement, on a trouvé l'expression des coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ en fonction de celles de $\vec{v}$ et de celles des $f(\vec{e}_j)$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée y_i de $f(\vec{v})$ est donnée par la formule :

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

En particulier, on a montré que **toute application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base**.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre III
Matrice d'une application linéaire

III.1 Définition

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2

Exercices :
Exercice B.3.1

Pour calculer l'image d'un vecteur par un endomorphisme, on a vu qu'on pouvait utiliser une formule faisant intervenir les coordonnées des images des vecteurs d'une base. Cependant, cette formule n'est pas forcément très facile à retenir, et elle doit être appliquée et adaptée pour obtenir chaque coordonnée du vecteur image, l'une après l'autre. Les matrices, qu'on va introduire ici, permettent de pallier à ces deux inconvénients à la fois : grâce à elles, comme on le verra plus loin, on calcule, suivant une technique très simple à retenir, l'image de n'importe quel vecteur en une seule étape.

Soient E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ et f un endomorphisme de E défini par les images $f(\vec{e}_j)$, où j est un entier compris entre 1 et n, des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$f(\vec{e}_j) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \iff f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Définition

On appelle matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ le tableau noté entre parenthèses et contenant, en colonnes, les coordonnées des images $f(\vec{e}_j)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On nomme en générale les matrices à l'aide de lettres majuscules : A, B, C... On peut aussi, comme on l'a fait ci-dessus, être plus explicite en les nommant par la lettre M (comme *Matrice*) indicée par le nom de l'endomorphisme (ici f) et la base dans laquelle on s'est placée (ici $\mathcal{B}$).

On dit que $M_{f,\mathcal{B}}$ est une matrice carrée d'ordre n (on se souvient que n est la dimension de l'espace vectoriel E). Remarquons que le coefficient a_{ij} se trouve sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne : en calcul matriciel, de manière générale, on donne toujours l'information faisant référence à la ligne en premier, et celle faisant référence à la colonne en second.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Calculer avec une matrice

Exemples :
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.2

On a justifié l'introduction des matrices d'applications linéaires par leur intérêt dans le calcul systématique des images de vecteurs par un endomorphisme. Voyons comment se mène un tel calcul.

On se place encore une fois dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ et on travaille avec l'endomorphisme f défini par :

$$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

On considère un vecteur $\vec{v}$ et son image par f de coordonnées respectives par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad f(\vec{v}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Calculer avec une matrice

On a vu précédemment que la $i^{\text{ème}}$ coordonnée y_i de $f(\vec{v})$ était donnée par la formule :

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

On peut retrouver cette formule en utilisant la matrice $M_{f,\mathcal{B}}$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ en posant le calcul de la façon suivante :

$$\begin{matrix} & & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \boxed{y_i} \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

Pour obtenir y_i , il suffit en effet d'additionner tous les produits effectués suivant des "diagonales" entre la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de f et la colonne des coordonnées de $\vec{v}$.

III.3 Influence de la base

Exemples :
Exemple A.3.4

Exercices :
Exercice B.3.3

Dans la définition des matrices, on a parlé de matrice d'un endomorphisme ***par rapport à une base***, et effectivement, les nombres apparaissant dans une matrice sont les coordonnées, par rapport à une base, des images des vecteurs de cette base. Par conséquent, un endomorphisme va être représenté par une matrice différente dès qu'on voudra travailler par rapport à une autre base.

On verra, dans la troisième partie de ce cours, qu'il existe parfois certaines bases par rapport auxquelles un endomorphisme va être représenté par une matrice particulièrement "simple" (c'est à dire contenant un grand nombre de coefficients nuls), et on apprendra à trouver de telles bases.

On insiste ici seulement sur le fait qu'une matrice d'application linéaire dépend toujours d'une base donnée. On peut voir les coefficients d'une matrice comme les coordonnées d'un endomorphisme : de la même manière que les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on se place, la matrice d'un endomorphisme varie suivant la base par rapport à laquelle on le représente.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre IV
Calculs avec des matrices

IV.1 Déterminant d'une matrice

Exemples :
Exemple A.4.1

On va voir dans ce chapitre les différents calculs que l'on peut réaliser avec des matrices. Le premier d'entre eux est le calcul du déterminant d'une matrice (carrée).

En effet, on a défini la matrice A d'un endomorphisme f par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ comme le tableau dont les colonnes sont constituées des coordonnées des n vecteurs $f(\vec{e}_j)$, par rapport à la base $\mathcal{B}$. On appelle alors **déterminant de la matrice A le déterminant, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, ... , $f(\vec{e}_n)$:**

$$\textbf{dét}\, \boldsymbol{A} = \textbf{dét}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\, \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{e}}_1); \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{e}}_2); \cdots; \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{e}}_n)\,)$$

On a, jusqu'ici, défini uniquement le déterminant de 2 vecteurs en dimension 2 et de 3 vecteurs en dimension 3. On anticipe donc un peu sur la suite en parlant de déterminant d'ordre n : on verra effectivement un peu plus loin comment généraliser la notion de déterminant, et les différentes techniques pour en calculer…

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.2 Transposée d'une matrice

Exemples :
Exemple A.4.2

On a signalé un peu plus tôt que, dans une matrice d'endomorphisme, les informations pertinentes étaient consignées dans les colonnes et non pas dans les lignes. Cependant, on verra plus tard que, pour certains calculs, on a besoin d'échanger le rôle des lignes et des colonnes d'une matrice.

On introduit donc ici la notion de transposée d'une matrice : on appelle **matrice transposée de la matrice $\boldsymbol{A}$, et on note ${}^t\boldsymbol{A}$, la matrice dont les coefficients dans la $\boldsymbol{j}^{\text{ème}}$ colonne sont les coefficients de la $\boldsymbol{j}^{\text{ème}}$ ligne de $\boldsymbol{A}$**.

Autrement dit, si on note a_{ij} le coefficient sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, alors a_{ij} se retrouve sur la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^tA$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.3 Addition de matrices

Exemples :
Exemple A.4.3

Exercices :
Exercice B.4.1

On a introduit les matrices comme des représentations d'un certain type de fonctions. Or on sait additionner des fonctions. On va donc pouvoir définir une addition entre matrices. On admettra ici que la somme de deux endomorphismes d'un même espace vectoriel est encore un endomorphisme de cet espace vectoriel.

L'addition de fonctions n'est possible qu'entre fonctions ayant le même ensemble de définition et le même "ensemble d'arrivée". Or, pour une application linéaire, ces ensembles influent sur le format de la matrice associée. On ne va donc définir une addition que pour des matrices de même format.

Soient alors f et g des endomorphismes d'un même espace vectoriel E, et A et B leurs matrices par rapport à une même base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$. Appelons S la matrice représentant l'application $f+g$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de S doit donc contenir les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de $(f+g)(\vec{e}_j)$. Or $(f+g)(\vec{e}_j) = f(\vec{e}_j) + g(\vec{e}_j)$, et les coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ correspondent à la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, tandis que celles de $g(\vec{e}_j)$ se retrouvent dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. Par conséquent, la $j^{\text{ème}}$ colonne de S s'obtient en additionnant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement, on dit que la matrice S est la somme des matrices A et B et elle s'obtient en ajoutant les coefficients des deux matrices deux à deux :

$$\begin{aligned} S = A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV.4 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Exemples :
Exemple A.4.4

Outre l'addition de fonctions, une des opérations usuelles sur les fonctions est la multiplication par un réel. On admet ici que toute fonction obtenue en multipliant un endomorphisme par un nombre réel est encore un endomorphisme. C'est cette propriété qui permet de définir la multiplication d'un réel avec une matrice à partir de la multiplication entre réels et applications linéaires.

Soit λ un nombre réel et soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et A sa matrice par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$. Appelons P la matrice représentant l'application $\lambda \cdot f$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de P doit donc contenir les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de $(\lambda \cdot f)(\vec{e}_j)$. Or $(\lambda \cdot f)(\vec{e}_j) = \lambda\, f(\vec{e}_j)$, et les coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ correspondent à la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Par conséquent, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P s'obtient en multipliant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement, on dit que la matrice P est le produit du réel λ avec la matrice A et elle s'obtient en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \cdots & \lambda\, a_{1n} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} & \cdots & \lambda\, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n1} & \lambda\, a_{n2} & \cdots & \lambda\, a_{nn} \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.5 Produit de matrices

Exemples :
Exemple A.4.5

Exercices :
Exercice B.4.2
Exercice B.4.3

Les résultats vus précédemment sur l'addition de matrices et sur la multiplication par un réel reposaient sur le fait qu'on pouvait additionner des applications linéaires et les multiplier à des réels, et que le résultat de telles opérations était encore une application linéaire. Les choses sont un peu différentes en ce qui concerne ce qu'on appelle le produit de matrices, car on ne définit pas de multiplication entre applications linéaires.

En réalité, le produit de matrices est associé à la *composition des endomorphismes*, car (et encore une fois, on l'admettra) la composée de deux endomorphismes d'un espace vectoriel est encore un endomorphisme de cet espace vectoriel.

Le lien entre la composée de deux endomorphismes et la règle de multiplication des matrices associées est assez fastidieux à exposer : on se bornera ici à donner cette règle de calcul sans la justifier. . .

Considérons alors deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$. On note A, B et C les matrices de f, g et $g \circ f$ par rapport à la base $\mathcal{B}$, et a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} les coefficients de ces matrices. La matrice C est égale au produit de la matrice B avec la matrice A : $C = B \times A$; ses coefficients s'obtiennent

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

en posant le calcul :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{pj} & \cdots \end{pmatrix} \\
C = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Le coefficient sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de C s'obtient donc en additionnant les produits en diagonale des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de B avec ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$$

La multiplication de matrices ne consiste donc pas en la multiplication des coefficients situés aux mêmes positions ($c_{ij} \neq b_{ij} \times a_{ij}$). Une conséquence importante est que cette multiplication n'est pas commutative : en général, le produit $B \times A$ est différent du produit $A \times B$. On pourra consulter l'exemple et l'exercice pour s'en assurer.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.6 Matrice unité

Exercices :
Exercice B.4.4

On a vu que la multiplication des matrices diffère de la multiplication des réels en ce qu'elle n'est pas commutative. Par contre, on retrouve un point commun aux deux multiplications : l'existence d'un ***élément neutre***, c'est à dire un élément qui n'a aucune influence dans une multiplication. Chez les nombres, cet élément neutre est le nombre 1 ; on va déterminer ici la matrice qui joue ce rôle pour le produit de matrices.

Pour cela, on considère, dans un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$, l'application linéaire notée Id_E et définie, pour tout entier j compris entre 1 et n, par :

$$Id_E(\vec{e}_j) = \vec{e}_j$$

Comme elle transforme tout vecteur de la base $\mathcal{B}$ en lui-même, du fait de la propriété de linéarité, il en va de même pour tous les vecteurs de l'espace E :

$$Id_E(\vec{v}) = \vec{v} \ , \ \forall \vec{v} \in E$$

Cette application est appelée ***application identité* de** E, d'où la notation Id_E. On note I_n sa matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de I_n doit contenir les coordonnées, par rapport à $\mathcal{B}$, de $Id_E(\vec{e}_j)$ c'est à dire de $\vec{e}_j$. Or ce vecteur étant le

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Matrice unité

$j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$, toutes ses coordonnées sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$ qui est égale à 1.

Par conséquent, I_n est la matrice carrée d'ordre n qui ne contient que des 1 dans la diagonale principale et des 0 ailleurs :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme l'endomorphisme Id_E n'a aucun effet sur les vecteurs qu'on lui applique, la composée de Id_E avec n'importe quel endomorphisme f de E a les mêmes propriétés que f :

$$f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$$

La composition d'endomorphismes se traduisant par une multiplication de matrices, si on note A la matrice représentative de f par rapport à la base $\mathcal{B}$, alors la relation précédente s'écrit matriciellement :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

La matrice I_n joue donc le rôle d'élément neutre dans la multiplication des matrices : on l'appelle **matrice unité d'ordre n**.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.7 Inverse d'une matrice

Exemples :
Exemple A.4.6
Exemple A.4.7

Exercices :
Exercice B.4.5

L'existence d'une matrice jouant, chez les matrices, le même rôle que le nombre 1 joue chez les réels conduit tout naturellement à la notion d'inverse d'une matrice. En effet, on dit que deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1 : par analogie, on dira que **deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont inverses l'une de l'autre si leur produit est égal à la matrice $\boldsymbol{I_n}$ unité d'ordre $\boldsymbol{n}$** (si on travaille dans un espace vectoriel de dimension n), c'est à dire si :

$$\boldsymbol{A \times B = B \times A = I_n}$$

(On admettra que si le produit $A \times B$ est égal à I_n, alors le produit $B \times A$ l'est aussi).

Cependant, à la différence de ce qui se passe chez les nombres réels, la matrice nulle n'est pas la seule matrice n'ayant pas d'inverse. Effectivement, considérons deux matrices A et B inverses l'une de l'autre et représentant deux endomorphismes f et g par rapport à une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E. Le fait que le produit de ces matrices soit égal à la matrice unité implique que la composée des endomorphismes qu'elles représentent est égale à l'application identité, c'est à dire :

$$f \circ g(\vec{v}) = g \circ f(\vec{v}) = Id_E(\vec{v}) = \vec{v} \ , \ \forall \vec{v} \in E$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Cette relation traduit le fait que les applications f et g sont réciproques l'une de l'autre, et donc en particulier, qu'elles sont *bijectives*. (On peut consulter un cours d'analyse pour des rappels sur ces notions ; les exemples les plus connus de fonctions bijectives et réciproques l'une de l'autre sont les fonctions logarithme et exponentielle qui vérifient bien une relation de même nature que la précédente : $\ln(e^x) = x$).

Comme les endomorphismes ne sont pas tous bijectifs, on en déduit que les matrices n'ont pas toutes d'inverse. On dispose alors du critère suivant (donné sans démonstration) pour savoir si une matrice admet un inverse : **une matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible, c'est à dire admet une matrice inverse, si son déterminant est non-nul. On note alors $\boldsymbol{A^{-1}}$ sa matrice inverse qui vérifie la relation : $\boldsymbol{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n}$.**

IV.8 Résolution de systèmes

Exemples :
Exemple A.4.8

Exercices :
Exercice B.4.6

On verra plus loin diverses utilisations des matrices inverses, mais on peut déjà en donner une simple et pratique concernant la résolution des systèmes d'équations linéaires.

On considère pour cela un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues écrit sous sa forme la plus générale :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

On a donc noté a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équation, et b_i est le terme constant figurant dans le second membre de la $i^{\text{ème}}$ équation.

On remarque alors que ce système peut s'écrire comme l'égalité entre, d'une part, le produit d'une matrice A carrée d'ordre n de coefficient général a_{ij} avec une colonne

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

X contenant les inconnues x_j, et d'autre part, une colonne B de coefficients b_i :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En abrégé, on a donc :

$$A \times X = B$$

Si la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible, on peut alors multiplier chaque terme de l'égalité précédente par A^{-1} (en plaçant A^{-1} à gauche de chaque terme de l'égalité pour que les produits aient un sens) :

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$$

Or le produit $A^{-1} \times A$ est égal à la matrice unité I_n qui n'a pas d'influence dans les multiplications (entre matrices de même format et aussi entre matrices et colonnes de coordonnées). Donc la colonne X contenant les inconnues x_j du système se calcule en faisant :

$$X = A^{-1} \times B$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre V
Calcul de déterminants

V.1 Mineur et cofacteur

Exemples :
Exemple A.5.1

Exercices :
Exercice B.5.1

On a eu l'occasion de voir à plusieurs reprises l'intérêt du déterminant : caractérisation des vecteurs formant une base, des vecteurs liés, des matrices inversibles... On verra plus loin que cet outil a bien d'autres usages et que la formule de calcul utilisée jusque là n'est pas toujours bien adaptée. On va donc donner quelques règles de calcul supplémentaires (sans justification mais seulement avec des illustrations en exemple).

La formule de calcul des déterminants d'ordre 3 vue dès la première partie de ce cours n'était en fait qu'un cas particulier de la formule générale utilisable à n'importe quel ordre. Pour décrire cette formule générale de manière simple, on introduit un vocabulaire spécifique.

En effet, on a vu, lors du calcul des déterminants d'ordre 3, qu'on se ramenait au calcul de déterminants d'ordre 2 obtenus en barrant la ligne et la colonne contenant un coefficient donné. On parle alors de *mineur* de ce coefficient. Plus précisément, si

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Mineur et cofacteur

on considère le déterminant d'une matrice A carrée d'ordre n :

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

alors on appelle **mineur du coefficient $\boldsymbol{a_{ij}}$, et on note $\boldsymbol{D_{ij}}$, le déterminant d'ordre $\boldsymbol{n-1}$ obtenu en supprimant la $\boldsymbol{i}^{\text{ème}}$ ligne et la $\boldsymbol{j}^{\text{ème}}$ colonne du déterminant de $\boldsymbol{A}$**.

Dans la formule de calcul d'un déterminant d'ordre 3, on multiplie donc les coefficients de la première colonne avec leurs mineurs respectifs, puis on *ajoute ou soustrait* les résultats obtenus. Pour savoir quels sont les produits qui sont ajoutés et quels sont ceux qui sont soustraits, on complète la notion de mineur par celle de *cofacteur* : on appelle **cofacteur du coefficient $\boldsymbol{a_{ij}}$, et on note $\boldsymbol{A_{ij}}$, le nombre $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}}$**. Ainsi, on a calculé jusque là les déterminants d'ordre 3 en additionnant les produits entre les coefficients de la première colonne et leurs cofacteurs respectifs.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.2 Développement suivant une ligne ou une colonne

Exemples :
Exemple A.5.2

Exercices :
Exercice B.5.2

Avec le vocabulaire et les notations que l'on vient d'introduire, la formule permettant le calcul d'un déterminant d'ordre 3 que l'on a appliquée jusqu'à présent s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

Dans cette formule, les coefficients de la première colonne jouent un rôle prépondérant par rapport aux autres : on dit qu'*on a développé le déterminant suivant la première colonne*. On montre qu'on obtient le même résultat en développant de façon analogue suivant la deuxième ou la troisième colonne, et même suivant l'une des trois lignes.

Plus précisément, on dit qu'**on calcule un déterminant d'ordre n par développement suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne quand on utilise la formule** :

$$\textbf{dét}\, \boldsymbol{A} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}}_{\text{suivant la colonne } j}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

D'autre part, à la différence des matrices qui se lisent suivant les colonnes, les déterminants font jouer un rôle symétrique aux lignes et aux colonnes. Ainsi, on dit qu'**on calcule un déterminant d'ordre n par développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne quand on utilise la formule** :

$$\text{dét}\, A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}}_{\text{suivant la colonne } i}$$

Développement suivant une ligne ou une colonne

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.3 Opérations sur les lignes et colonnes

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

Outre le choix de la ligne ou de la colonne pour le développement d'un déterminant, il existe d'autres propriétés qui permettent de simplifier le calcul d'un déterminant d'ordre n. Ces propriétés sont données sans justification ; elles sont illustrées dans les exemples référencés ci-dessus.

Propriété 1 : si on multiplie les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) par un réel λ, la valeur du déterminant est multipliée par λ. En particulier, si tous les termes d'une colonne (ou d'une ligne) sont nuls, le déterminant est nul.

Propriété 2 : si on permute 2 colonnes (ou 2 lignes), la valeur du déterminant est multipliée par -1. En particulier, un déterminant ayant 2 colonnes (ou 2 lignes) identiques ou proportionnelles est nul.

Propriété 3 : par ajout aux éléments d'une colonne (ou d'une ligne) d'une même combinaison linéaire des éléments correspondants **d'autres** colonnes (ou lignes) la valeur du déterminant ne change pas.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.4 Application au calcul des matrices inverses

Exemples :
Exemple A.5.7

Exercices :
Exercice B.5.6

On a vu que le déterminant est un outil permettant de savoir quand des vecteurs forment une base, quand des vecteurs sont liés, ou encore quand une matrice est inversible. Sur ce dernier point, on a en effet constaté que seules les matrices de déterminant non nul étaient inversibles. Cependant, pour trouver les inverses de telles matrices, on ne dispose que de la relation $A \times A^{-1} = I_n$ qui permet de déterminer les coefficients de A^{-1} en résolvant n systèmes à n équations et n inconnues, ce qui est vite fastidieux dès que n augmente. Il existe en fait une formule (qu'on admettra...) basée sur des calculs de déterminants et qui permet de calculer l'inverse d'une matrice sans avoir à résoudre de système d'équations.

Ainsi, si A est une matrice de déterminant non nul, on calcule son inverse A^{-1} en commençant par chercher sa ***comatrice* : c'est la matrice, notée Com A, et obtenue en remplaçant dans A chaque coefficient par son cofacteur**.

La matrice inverse A^{-1} est alors égale, à un coefficient multiplicatif près, à la **transposée** de la comatrice de A :

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A}\, {}^t\text{Com}\, A}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre VI
Matrices et changement de base

VI.1 Matrice de changement de base

Exemples :
Exemple A.6.1

Exercices :
Exercice B.6.1

On a vu, dans la première partie de ce cours, comment déterminer les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base quand on connait ses coordonnées par rapport à une autre base. Le raisonnement se ramène souvent à une résolution de système : on va donc reprendre ce raisonnement dans les paragraphes qui suivent à la lumière des résultats vus dans les deux chapitres précédents à propos des résolutions matricielles de systèmes d'équations et des calculs de matrices inverses.

On considère pour cela un espace vectoriel E muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1{}'; \vec{e}_2{}'; \cdots; \vec{e}_n{}')$. On suppose connues les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_j{}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{e}_j{}' \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \vec{e}_j{}' = p_{1j}\vec{e}_1 + p_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + p_{nj}\vec{e}_n$$

On a donc noté p_{ij} la $i^{\text{ème}}$ coordonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{B}'$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Matrice de changement de base

Pour obtenir les coordonnées d'un vecteur ou la matrice d'une application linéaire par rapport à une nouvelle base, on utilisera la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ suivante :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Ses colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

VI.2 Coordonnées de vecteur et matrice de passage

Exemples :
Exemple A.6.2

Exercices :
Exercice B.6.2

On va voir ici comment utiliser la matrice de passage introduite précédemment pour relier les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base et les coordonnées de ce même vecteur par rapport à une autre base.

On reprend les notations du paragraphe précédent où l'espace vectoriel E est muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \cdots; \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1{}'; \vec{e}_2{}'; \cdots; \vec{e}_n{}')$, et où p_{ij} désigne le terme général de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, c'est à dire la $i^{\text{ème}}$ coordonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{B}'$.

Soit alors $\vec{v}$ un vecteur de E dont les colonnes de coordonnées par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont notées $X_{\mathcal{B}}$ et $X'_{\mathcal{B}'}$ avec :

$$X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et } X'_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

L'écriture en ligne du vecteur $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\vec{v} = x'_1\vec{e}_1{}' + x'_2\vec{e}_2{}' + \cdots + x'_n\vec{e}_n{}'$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Or, on connait les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ de chacun des vecteurs de cette écriture en ligne. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x'_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + x'_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \cdots + x'_n \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ce qui s'écrit sous forme de système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ x_2 = p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n \end{array} \right.$$

Comme on l'a vu dans la section précédente, ce système peut s'écrire comme l'égalité entre une colonne de coordonnées et le produit d'une matrice avec une autre colonne de coordonnées .

Coordonnées de vecteur et matrice de passage

Le système précédent se reformule donc en :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Finalement, on a établi la relation suivante entre les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport à une base $\mathcal{B}$ et les coordonnées du même vecteur par rapport à une base $\mathcal{B}'$:

$$\boldsymbol{X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X_{\mathcal{B}'}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

VI.3 Matrice de passage inverse

Exemples :
Exemple A.6.3

Exercices :
Exercice B.6.3

On a vu qu'une matrice carrée admettait un inverse à condition que son déterminant soit non nul. Or une matrice de passage, d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$, contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, le déterminant de cette matrice de passage correspond au déterminant, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des vecteurs de $\mathcal{B}'$: ce déterminant est forcément non nul puisque $\mathcal{B}'$ est une base. Ainsi, **toute matrice de passage est inversible**.

Plus précisément, notons $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ d'une part, et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ d'autre part, et considérons un vecteur $\vec{v}$ de l'espace vectoriel E dont $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases. Si $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}_{\mathcal{B}'}$ désignent respectivement les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors on a les relations :

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \vec{v}_{\mathcal{B}'} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times \vec{v}_{\mathcal{B}}$$

En combinant ces deux relations, on obtient donc :

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \vec{v}_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times (P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times \vec{v}_{\mathcal{B}})$$

Par conséquent :

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}) \times \vec{v}_{\mathcal{B}} = \vec{v}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ce qui signifie que le produit $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ n'a pas d'influence dans la multiplication avec des colonnes de coordonnées : il est égal à la matrice unité I_n. Finalement, on a montré que **l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$** :

$$\boldsymbol{(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}}$$

VI.4 Relation entre matrices d'un même endomorphisme

Exemples : Exemple A.6.4

Exercices : Exercice B.6.4

On a appris à utiliser les matrices de passage pour chercher des coordonnées de vecteur. Or on sait que les matrices d'endomorphismes dépendent également de la base dans laquelle on travaille. On va donc établir ici une formule permettant de trouver la matrice d'un endomorphisme par rapport à une base à partir de la matrice de cet endomorphisme par rapport à une autre base.

Pour cela, plaçons nous dans un espace vectoriel E muni de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et considérons un endomorphisme f de E. On note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ d'une part, et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ d'autre part. On note par ailleurs A et A' les matrices représentant f respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Enfin, X et X' désignent les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Les coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ se calculent alors en faisant :

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = A' \times X' \qquad (1)$$

Cependant, si on ne connaît pas la matrice A', on peut commencer par calculer les coordonnées de $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ à partir des coordonnées par rapport à $\mathcal{B}'$:

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X'$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

puis on en déduit les coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à $\mathcal{B}$:

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}} = A \times X = A \times (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X')$$

et enfin, connaissant les coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à $\mathcal{B}$, on obtient celles par rapport à $\mathcal{B}'$ en faisant :

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times f(\vec{v})_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times \big(A \times (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times X')\big)$$

Finalement, on peut obtenir les coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à $\mathcal{B}'$ soit avec la formule (1), soit avec la formule (2) suivante :

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) \times X' \qquad (2)$$

En comparant les deux formules, on met donc en évidence le lien entre les matrices A et A' représentant f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$\boldsymbol{A' = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$$

Ou encore, si on note simplement P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$\boldsymbol{A' = P^{-1} \times A \times P}$$

puisqu'on a vu précédemment que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ n'est autre que l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exemples

A.1 Exemples de l'avant-propos

Exemple A.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exercices :
Exercice B.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exemple A.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exemple A.1.1" de l'exercice B.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exemples du chapitre II

Exemple A.2.1 Linéarité d'une application

Cours :
Application linéaire

Exercices :
Exercice B.2.1
Exercice B.2.2

La propriété de linéarité d'un endomorphisme permet de faire certains calculs très rapidement en réutilisant des résultats connus.

Soit, par exemple, f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour images respectives par f : $f(\vec{u}) = 3\vec{u} - \vec{v}$ et $f(\vec{v}) = -2\vec{u} + 5\vec{v}$, et soit enfin un vecteur $\vec{w}$ combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$. Alors, on peut calculer $f(\vec{w})$ à l'aide de $f(\vec{u})$ et de $f(\vec{v})$, puisque :

$$f(\vec{w}) = f(4\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\,f(\vec{u}) + 2\,f(\vec{v}) = 4\,(3\vec{u} - \vec{v}) + 2\,(-2\vec{u} + 5\vec{v}) = 8\vec{u} + 6\vec{v}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.2 Détermination du noyau d'un endomorphisme

Cours :
Noyau d'un endomorphisme

Exercices :
Exercice B.2.3

Chercher le noyau d'une application linéaire, c'est chercher tous les vecteurs qui annulent cette application. Or, pour connaître un vecteur, il suffit de connaître ses coordonnées par rapport à une base. C'est pourquoi, quand on cherche un noyau, on s'efforce en général de déterminer les conditions que doivent vérifier les coordonnées des vecteurs qui appartiennent à ce noyau.

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, considérons l'application linéaire f (on admet qu'elle est bien linéaire) définie pour tout vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par :

$$f(\vec{v}) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x + 2y - 3z)\vec{i} + (-3x - 6y + 9z)\vec{j} + (2x + 4y - 6z)\vec{k}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.2
Détermination du noyau d'un endomorphisme

Pour déterminer son noyau, on raisonne par équivalences en regardant à quelle(s) condition(s) un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées x, y et z appartient à ce noyau :

$$\begin{aligned}
\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\vec{v}) = \vec{0} \\
&\iff (x+2y-3z)\vec{i} + (-3x-6y+9z)\vec{j} + (2x+4y-6z)\vec{k} = \vec{0} \\
&\iff \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -3x-6y+9z=0 \\ 2x+4y-6z=0 \end{cases} \\
&\iff x+2y-3z=0
\end{aligned}$$

Les équations du système obtenu étant toutes proportionnelles, on n'en garde qu'une et on reconnaît l'équation cartésienne d'un plan vectoriel. On remarque que les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ne sont pas colinéaires et vérifient l'équation précédente. On peut donc conclure que le noyau de f est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.3 Expression analytique d'un endomorphisme

Cours :
Base et application linéaire

Exercices :
Exercice B.2.4

On reprend ici le raisonnement du paragraphe de cours dans le cadre d'un espace vectoriel E de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et avec un endomorphisme f tel que :

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \text{ et } f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

On cherche donc à montrer qu'avec ces seules données concernant f, on est à même de calculer l'image de n'importe quel vecteur de E.

Regardons tout d'abord si on peut calculer l'image d'un vecteur particulier, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par exemple.

L'écriture en ligne du vecteur $\vec{u}$ est : $\vec{u} = -2\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$, donc son image par f est :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(-2\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2) \\ &= -2\,f(\vec{e}_1) + 7\,f(\vec{e}_2) \\ &= -2\,(3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) + 7\,(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \\ &= 8\vec{e}_1 + 31\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.3
Expression analytique d'un endomorphisme

Ainsi, on a bien été capable de trouver les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ de l'image $f(\vec{u})$ du vecteur particulier $\vec{u}$.

Or, on peut reprendre un raisonnement identique pour n'importe quel vecteur. Reprenons donc le calcul avec un vecteur quelconque $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$; cela donne :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \\ &= x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2) \\ &= x\,(3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) + y\,(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \\ &= (3x + 2y)\vec{e}_1 + (-5x + 3y)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

On s'aperçoit que les coordonnées X et Y de $f(\vec{v})$ dépendent directement des coordonnées x et y de $\vec{v}$ via les relations :

$$\begin{cases} X = 3x + 2y \\ Y = -5x + 3y \end{cases}$$

Dans ces deux relations, les coefficients qui apparaissent devant les "x" ne sont autres que les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$, et ceux devant les "y" sont les coordonnées de $f(\vec{e}_2)$. On a donc "réétabli" le résultat trouvé dans le paragraphe de cours dans le cas particulier de la dimension 2 et avec un endomorphisme f fixé, à savoir que : **la donnée des images des vecteurs d'une base suffit à déterminer entièrement un endomorphisme**.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.3 Exemples du chapitre III

Exemple A.3.1 Ecriture d'une matrice

Cours :
Matrice d'endomorphisme

Exemples :
Exemple A.3.2

Exercices :
Exercice B.3.1

Reprenons les données de l'exemple précédent où E est un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et f est un endomorphisme défini par :

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \text{ et } f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

La matrice $M_{f,\mathcal{B}}$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Insistons sur le fait qu'une matrice se note entre parenthèses à la différence d'un déterminant qui s'écrit entre barres verticales...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.2 Lecture d'une matrice

Cours :
Matrice d'endomorphisme

Exemples :
Exemple A.3.1

Exercices :
Exercice B.3.1

On a vu dans l'exemple précédent comment écrire une matrice à partir de la connaissance des images des vecteurs d'une base. Inversement, il faut être capable de déduire, de la lecture d'une matrice, des informations concernant les images des vecteurs de base.

Ainsi, dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, soit f l'endomorphisme de E admettant comme matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Alors, la première colonne traduit la relation :

$$f(\vec{i}) = -2\vec{i} + \vec{j} \text{ c'est à dire } f(\vec{i}) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Et la deuxième colonne donne :

$$f(\vec{j}) = 8\vec{i} + 5\vec{j} \text{ c'est à dire } f(\vec{j}) \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Signalons qu'une matrice d'endomorphisme ne se lit qu'en colonnes : une ligne de matrice ne traduit aucune relation entre les vecteurs et leurs images par l'endomorphisme.

Exemple A.3.3 Calculer l'image d'un vecteur avec une matrice

Cours :
Calculer avec une matrice

Exercices :
Exercice B.3.2

Reprenons les données de l'exemple précédent pour illustrer la façon de calculer l'image d'un vecteur par un endomorphisme à l'aide de la matrice de cet endomorphisme. Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, on utilise donc l'endomorphisme f défini par :

$$f(\vec{i}) = -2\vec{i} + \vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = 8\vec{i} + 5\vec{j}$$

et dont la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Cherchons par exemple l'image du vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$:

– en utilisant explicitement la linéarité de f :

$$f(\vec{v}) = f(-3\vec{i} + \vec{j}) = -3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = -3\,(-2\vec{i} + \vec{j}) + (8\vec{i} + 5\vec{j}) = 14\vec{i} + 2\vec{j}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.3
Calculer l'image d'un vecteur avec une matrice

– en utilisant la matrice A de f :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times(-3)+8\times 1 \\ 1\times(-3)+5\times 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Les deux méthodes conduisent donc bien au même résultat. Dans la suite, on utilisera systématiquement les matrices pour faire ce type de calcul.

Exemple A.3.4 Effet d'un changement de base sur une matrice

Cours :
Base et matrice d'endomorphisme

Exercices :
Exercice B.3.3

On va donner ici un exemple d'endomorphisme qui est représenté par une *matrice dite diagonale* quand on travaille par rapport à une base particulière.

Pour cela, considérons l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = \vec{i} + 4\vec{j}$$

Sa matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Introduisons maintenant les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Ces vecteurs forment une base de E car leur déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est différent de 0. En effet :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$$

On appelle $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ cette nouvelle base.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.4
Effet d'un changement de base sur une matrice

Pour déterminer la matrice de f par rapport à cette nouvelle base, il faut connaître $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$. Calculons donc :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Attention alors à ne pas conclure trop rapidement : on a obtenu les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$ et de $f(\vec{e}_2)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Or la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$ doit contenir les coordonnées de ces mêmes vecteurs par rapport à la base $\mathcal{B}'$. Ces coordonnées sont très faciles à trouver, à condition de remarquer que :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\,\vec{e}_1 \text{ et } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 3\,\vec{e}_2$$

Les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ayant comme coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, on en déduit les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$:

$$f(\vec{e}_1) = 2\,\vec{e}_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \text{ et } f(\vec{e}_2) = 3\,\vec{e}_2 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Finalement, on peut écrire la matrice représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}'$:

$$M_{f,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On dit que cette matrice est **diagonale**, car tous ses coefficients sont nuls sauf ceux qui se trouvent sur la *diagonale principale* (diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit).

A.4 Exemples du chapitre IV

Exemple A.4.1 Déterminant d'une matrice

Cours :
Determinant d'une matrice

Le calcul du déterminant de la matrice d'une application linéaire se calque sur le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs.

Ainsi, en dimension 3, si E est un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, et si f est l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} \text{ et } f(\vec{k}) = \vec{i} + 4\vec{k}$$

alors la matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A s'écrit tout simplement en échangeant les grandes parenthèses avec des barres verticales, et se calcule de la même façon que le déterminant

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

de 3 vecteurs en dimension 3 :

$$\begin{aligned}
\text{dét}\, A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 28 + 2 \times 9 + 5 \times (-7) \\
&= 11
\end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.2 Matrice symétrique

Cours :
Transposée d'une matrice

La notion de transposée de matrice permet de caractériser des matrices qui présentent une symétrie particulière.

En effet, le plus souvent, une matrice et sa transposée sont différentes. C'est le cas par exemple de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque sa matrice transposée est :

$$^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle alors ***matrice symétrique* toute matrice égale à sa propre transposée**. La matrice S suivante est un exemple de matrice symétrique :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -5 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple A.4.2
Matrice symétrique

Plus généralement, on voit que les coefficients d'une matrice symétrique sont "symétriques" par rapport à la *diagonale principale*, c'est à dire la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit de la matrice.

Exemple A.4.3 Addition de matrices

Cours :
Addition de matrices

Exercices :
Exercice B.4.1

L'addition de matrices se définit et se justifie à partir de l'addition des endomorphismes, mais elle est malgré tout assez naturelle.

Ainsi, si f et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ définis par :

$$f(\vec{i}) = 5\vec{i} + 11\vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = -6\vec{i} + \vec{j}$$

et :

$$g(\vec{i}) = 2\vec{i} - 7\vec{j} \text{ et } g(\vec{j}) = 15\vec{i} - 3\vec{j}$$

alors f et g sont représentés, par rapport à la base $\mathcal{B}$, par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme $f + g$ est alors représenté par la somme $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.4 Multiplication d'une matrice par un réel

Cours :
Multiplication entre réels et matrices

Pour illustrer la règle de multiplication entre matrices et réels, considérons l'application f de l'exemple précédent qui admettait comme matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit de cette matrice A par le réel $\lambda = 5$ (choisi arbitrairement) est :

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -30 \\ 55 & 5 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.5 Produit de matrices

Cours :
Produit de matrices

Exercices :
Exercice B.4.2
Exercice B.4.3

La règle de multiplication des matrices n'est pas très naturelle, mais elle se retient très facilement après l'avoir appliquée deux ou trois fois. Voyons ici un premier exemple avec des endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, dont les matrices représentatives par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire $g \circ f$ admet alors comme matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ le produit $C = B \times A$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Le coefficient c_{11} se calcule à partir de la première ligne de B et de la première colonne de A :

$$c_{11} = -1 \times 3 + 4 \times (-2) = -11$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Le coefficient c_{12} se calcule à partir de la première ligne de B et de la deuxième colonne de A :

$$c_{12} = -1 \times 5 + 4 \times 4 = 11$$

Le coefficient c_{21} se calcule à partir de la deuxième ligne de B et de la première colonne de A :

$$c_{21} = 7 \times 3 - 3 \times (-2) = 27$$

Le coefficient c_{22} se calcule à partir de la deuxième ligne de B et de la deuxième colonne de A :

$$c_{22} = 7 \times 5 - 3 \times 4 = 23$$

Finalement, la matrice de $g \circ f$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 27 & 23 \end{pmatrix}$$

En appliquant la même règle de calcul, on vérifie que la multiplication n'est pas commutative en calculant la matrice $D = A \times B$ représentant l'endomorphisme $f \circ g$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} & \\ D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 32 & -3 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} \neq C \end{matrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.6 Matrice inversible

Cours :
Matrice inverse

Exemples :
Exemple A.4.7

Exercices :
Exercice B.4.5

D'après le paragraphe de cours, une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0. Illustrons ce théorème avec la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\text{dét}\, A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - (-5) \times 2 = 4 \neq 0$$

Or cette matrice est bien inversible et admet pour inverse la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.6
Matrice inversible

En effet, on a :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

B est donc bien la matrice inverse de la matrice A : on la note A^{-1} **et NON PAS** $\frac{1}{A}$ car on ne définit pas de division par une matrice.

Exemple A.4.7 Matrice non inversible

Cours :
Matrice inverse

Exemples :
Exemple A.4.6

Exercices :
Exercice B.4.5

Après avoir constaté sur un exemple qu'une matrice de déterminant non-nul était inversible, regardons, toujours sur un exemple, le cas d'une matrice de déterminant nul et assurons-nous qu'elle n'est pas inversible.

On considère pour cela la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans difficulté que son déterminant est nul. Or, si elle admettait une matrice inverse B avec :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors on devrait avoir : $A \times B = I_2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.7
Matrice non inversible

Cependant, on a par équivalences :

$$A \times B = I_2 \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -3a+6c & -3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, il faudrait trouver des nombres a et c tels que : $a-2c=1$ et $-3a+6c=0$. En remarquant que : $-3a+6c=-3\,(a-2c)$, on voit qu'il n'est pas possible de satisfaire les deux équations à la fois.

Par conséquent, comme le prédit le théorème, A n'a pas de matrice inverse.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.8 Matrices et résolution de systèmes

Cours :
Résolution matricielle de systèmes

Exercices :
Exercice B.4.6

On a vu précédemment que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ était inversible et d'inverse la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, si on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ -5x + 6y = -5 \end{cases}$$

on l'interprétera comme étant le produit :

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

En multipliant chaque terme de l'égalité par A^{-1}, et comme $A^{-1} \times A = I_2$, on en déduit :

$$I_2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.8
Matrices et résolution de systèmes

Or I_2 n'a aucune influence dans une multiplication :

$$I_2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'où finalement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A.5 Exemples du chapitre V

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.1 Mineur et cofacteur

Cours :
Mineur et cofacteur

Exercices :
Exercice B.5.1

Jusqu'ici, quand on a calculé un déterminant d'ordre 3, on a manipulé des mineurs et des cofacteurs sans les avoir définis. En effet, dans le calcul de déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

les trois déterminants d'ordre 2 correspondent aux mineurs des coefficients auxquels ils sont multipliés.

Ainsi, dans le produit $4 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$, le déterminant $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ est le mineur D_{11} du coefficient $a_{11} = 4$. Ce coefficient, étant situé sur la première ligne et la première colonne du déterminant d'ordre 3 initial, son mineur et son cofacteur sont identiques :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = D_{11}$$

Il n'en va pas de même avec le mineur $D_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ du coefficient $a_{21} = 3$. En effet, son cofacteur est : $A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = -D_{21}$. C'est pour cela que, dans

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

le calcul du déterminant d'ordre 3, le produit $3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ est retranché aux autres termes et non pas ajouté.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.2 Différents développements du déterminant

Cours :
Developpement d'un déterminant

Exercices :
Exercice B.5.2

Vérifions sur un cas particulier qu'un déterminant peut être calculé de diverses manières suivant la ligne ou la colonne choisie pour le développer.

Pour cela, on considère le déterminant D suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Si on le calcule classiquement en le développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} D &= 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 2 - 5 \times 13 - 1 \times 8 = -67 \end{aligned}$$

Si on choisit plutôt de développer D suivant la deuxième colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} D &= -1 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times 5 + 2 \times (-1) - 3 \times 20 = -67 \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On obtient bien le même résultat, et on remarque que, dans ce développement, ce sont les premier et troisième produits qui font intervenir des cofacteurs de signe opposé aux mineurs correspondants.

Regardons enfin ce que l'on obtient en développant suivant la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} D &= -5 \times \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5 \times 13 + 2 \times (-1) - 0 = -67 \end{aligned}$$

Encore une fois, on obtient bien le même résultat, et on remarque que ce dernier choix est le plus judicieux des trois dans la mesure où il n'est pas nécessaire de calculer l'un des déterminants d'ordre 2, puisqu'il est multiplié à 0.

De manière générale, on a intérêt à choisir de développer un déterminant par rapport à la ligne ou à la colonne qui contient le plus de coefficients nuls.

Exemple A.5.2
Différents développements du déterminant

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.3 Multiplication d'une colonne dans un déterminant

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

Testons la propriété 1 du cours en comparant les déterminants D_1 et D_2 suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$

Les deux premières colonnes de ces déterminants sont identiques, et la troisième colonne de D_2 est le triple de la troisième colonne de D_1 . Calculons ces déterminants en les développant suivant la première colonne. On a :

$$\begin{aligned} D_1 &= 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 17 - 4 \times 11 + 1 \times 13 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et :

$$\begin{aligned} D_2 &= 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 51 - 4 \times 33 + 1 \times 39 \\ &= 9 = 3 \times D_1 \end{aligned}$$

Ainsi, multiplier tous les coefficients d'une colonne par 3 revient à multiplier le déterminant par 3.

En utilisant la même propriété (mais appliquée à la fois aux lignes et aux colonnes), le déterminant D_3 suivant se calcule très simplement :

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 8 & 40 & -4 \\ -4 & -6 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 8 & 40 & -4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 2 \times \begin{vmatrix} 8 & 20 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -8 \times D_1 = -24 \end{aligned}$$

Exemple A.5.3
Multiplication d'une colonne dans un déterminant

Exemple A.5.4 Permutation de deux lignes

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

Constatons maintenant l'effet d'une permutation de lignes sur la valeur d'un déterminant. On utilise le déterminant D_1 de l'exemple précédent qu'on compare au déterminant D_4 obtenu à partir de D_1 en échangeant les lignes 2 et 3 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} D_4 &= 2 \times \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-17) - 1 \times 13 + 4 \times 11 = -3 = -D_1 \end{aligned}$$

La permutation de lignes a donc bien eu pour effet de changer le signe du déterminant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4
Permutation de deux lignes

En utilisant cette même propriété (mais appliquée aux colonnes), on peut calculer très simplement le déterminant D_5 suivant :

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = D_1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.5 Combinaisons de lignes ou de colonnes

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

Voyons enfin l'effet sur un déterminant de l'ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes. On travaille toujours avec le déterminant D_1 des deux exemples précédents :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

Construisons, à partir de ce déterminant, un déterminant D_6 ayant deux 0 dans la première colonne de sorte qu'il soit très facile à développer suivant cette première colonne. Pour cela, on soustrait, à la première ligne, deux fois la troisième (on note : $L_1 \rightarrow L_1 - 2\,L_3$), et on soustrait, à la deuxième ligne, la première et deux fois la troisième (on note : $L_2 \rightarrow L_2 - L_1 - 2\,L_3$).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a donc :

$$D_6 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} (L_2 \to L_2 - L_1 - 2\,L_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 13 & -7 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} (L_1 \to L_1 - 2\,L_3)$$

En développant D_6 suivant la première colonne, on obtient :

$$D_6 = 1 \times \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3 = D_1$$

Le déterminant D_6 obtenu en ajoutant à certaines lignes de D_1 des combinaisons linéaires des autres lignes de D_1 a donc la même valeur que le déterminant d'origine D_1 .

Exemple A.5.5
Combinaisons de lignes ou de colonnes

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.6 Transformations interdites

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

Dans l'exemple précédent, on a vu que la propriété 3 pouvait être utilisée pour faire apparaître des coefficients nuls dans les déterminants, afin qu'ils soient faciles à développer suivant une ligne ou une colonne donnée.

Attention cependant à ne pas faire subir n'importe quelle transformation au déterminant.

On rencontre par exemple souvent l'**erreur suivante** qu'on illustre à nouveau à l'aide du déterminant D_1 des exemples précédents :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 7 & 4 & 4 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_1 + L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 + L_2 \end{array}$$

Avec cette triple transformation, on obtient un déterminant contenant 3 lignes identiques. Or, d'après la propriété 2, quand un déterminant possède (au moins) deux lignes (ou colonnes) identiques ou proportionnelles, alors ce déterminant est nul.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Vérifions cette affirmation sur le calcul qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} D_1 &= 7 \times 4 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 56 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= 0 \text{ !!!} \end{aligned}$$

L'erreur commise dans ce calcul est difficile à expliquer par écrit et de manière concise : on se contera de dire qu'elle réside à la première étape, au cours de laquelle on a transformé les 3 lignes à la fois...

Pour être certain d'appliquer correctement la propriété 3, on retiendra les conseils suivants :

– ne pas effectuer plus d'une transformation de ligne ou de colonne par étape de calcul ;
– toujours appliquer une transformation qui s'écrit :

$$L_i \to \boxed{1 \times L_i} + \text{ une combinaison de lignes } L_j \text{ où } \boxed{j \neq i}$$

ou :

$$C_i \to \boxed{1 \times C_i} + \text{ une combinaison de colonnes } C_j \text{ où } \boxed{j \neq i}$$

Par exemple, des transformations du type "$L_3 \to 2\,L_3 - L_1$", "$C_2 \to C_1 - C_2$", "$C_1 \to C_1 + 2C_3 - C_2 + C_1$" ou encore "$L_2 \to L_1 + L_3$" ne sont pas autorisées.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.7 Calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre 2

Cours :
Calcul de matrices inverses

Exercices :
Exercice B.5.6

Dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 inversibles, la formule permettant de calculer la matrice inverse est particulièrement simple.

Considérons en effet une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible, c'est à dire dont le déterminant $\text{dét}\, A = ad - bc$ est différent de 0. Le mineur D_{11} du coefficient a est le déterminant obtenu en barrant la première ligne et la première colonne : ce déterminant est d'ordre 1 et ne contient que le nombre d, donc $D_{11} = d$. On en déduit le cofacteur $A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = D_{11} = d$.
Par des raisonnements analogues, on trouve : $A_{21} = -b$, $A_{12} = -c$ et $A_{22} = a$. Par conséquent, la comatrice de A est :

$$\text{Com}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Et finalement, l'inverse de A s'écrit :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A}\, {}^t\text{Com}\, A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.7
Calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre 2

Vérifions le résultat en considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, de déterminant égal à 2, donc inversible. D'après la formule qu'on vient d'établir, sa matrice inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Or, avec cette matrice, on a bien :

$$A \times A^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$$

Avec des matrices d'ordre 3, on ne peut pas donner une expression simple de la matrice inverse en fonction des coefficients de la matrice de départ, donc on utilise la formule du cours après avoir calculé le déterminant et la comatrice.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.6 Exemples du chapitre VI

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6.1 Matrice de passage

Cours :
Matrice de passage

Exercices :
Exercice B.6.1

On verra plus loin que la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est différente de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$. Il faut donc être attentif à l'ordre des bases d'une matrice de passage.

Ainsi, si E est un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v})$, et si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors la seule matrice de passage qu'on peut écrire à partir de ces données est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple A.6.2 Coordonnées de vecteurs et matrices de passage

Cours :
Changement de base (pour les vecteurs)

Exercices :
Exercice B.6.2

On reprend ici la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vue dans l'exemple précédent où $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u};\vec{v})$ sont deux bases d'un espace vectoriel E.

Si on connait les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$:

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

alors on peut calculer ses coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ à l'aide de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \vec{v}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Inversement, si on connait les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

alors on peut trouver les coordonnées x et y de ce même vecteur $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ en écrivant que :

$$\vec{w}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \vec{w}_{\mathcal{B}'}$$

En effet, en explicitant cette relation, on a :

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \iff \begin{cases} 5x + 4y = -4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 - y \\ 15 - 5y + 4y = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -16 \\ y = 19 \end{cases}$$

Remarquons que si la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible (on verra plus loin que c'est forcément le cas) et si on connait sa matrice inverse, alors on peut résoudre le système précédent matriciellement, comme on l'a vu dans un chapitre précédent.

Remarquons également que le nom de *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$* peut entraîner des confusions. En effet, comme on vient de le voir, avec la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, il est plus facile d'obtenir les coordonnées d'un vecteur par rapport à $\mathcal{B}$ à partir de celles par rapport à $\mathcal{B}'$, que d'obtenir les coordonnées d'un vecteur par rapport à $\mathcal{B}'$ à partir de celles par rapport à $\mathcal{B}$.

Exemple A.6.2
Coordonnées de vecteurs et matrices de passage

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6.3 Matrice de passage inverse

Cours :
Matrice de passage inverse

Exercices :
Exercice B.6.3

On a vu, dans un exemple précédent, que la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ vers la base $\mathcal{B}' = (\vec{u};\vec{v})$ d'un espace vectoriel E, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, était donnée par :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or, connaissant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u} = 5\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \vec{u} - \vec{v} = \vec{i} & (1) - (2) \to (1) \\ 4\vec{u} - 5\vec{v} = -\vec{j} & 4\,(1) - 5\,(2) \to (2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \vec{i} = \vec{u} - \vec{v} \\ \vec{j} = -4\vec{u} + 5\vec{v} \end{array}\right.$$

Les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ sont donc :

$$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{j}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6.3
Matrice de passage inverse

On en déduit la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculons alors le produit des deux matrices de passage :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a bien illustré sur cet exemple le résultat donné dans le cours : la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6.4 Matrice par rapport à une nouvelle base

Cours :
Changement de base (pour les endomorphismes)

Exemples :
Exemple A.3.4

Exercices :
Exercice B.6.4

On a vu dans un exemple précédent (cf. renvoi ci-dessus) l'influence de la base sur la matrice d'un endomorphisme. Dans cet exemple en effet, on considérait l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E défini par : $f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} + 4\vec{j}$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ formaient une base $\mathcal{B}$. La matrice représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ était donc :

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Or, on a montré que, par rapport à la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, avec $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, f était représenté par la matrice diagonale :

$$M_{f,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérifions alors la formule $M_{f,\mathcal{B}'} = P^{-1} \times M_{f,\mathcal{B}} \times P$ où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

P est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sa matrice inverse se calcul avec la formule :

$$P^{-1} = \frac{1}{\text{dét} P} \, {}^t\text{Com}\, P$$

On a donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors vérifier la formule du cours en calculant tout d'abord :

$$M_{f,\mathcal{B}} \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$P^{-1} \times (M_{f,\mathcal{B}} \times P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M_{f,\mathcal{B}'}$$

Exemple A.6.4
Matrice par rapport à une nouvelle base

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.1 Exercices de l'avant-propos

Exercice B.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exercice B.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exercice B.1.1" de l'exemple A.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.2 Exercices du chapitre II

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.1 Une application non linéaire

Cours :
Application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.2

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ et soit f la fonction définie pour tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de E par :

$$f(\vec{v}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = (2x - y + 1)\,\vec{i} + 3y\,\vec{j}$$

1. Calculer les images par f du vecteur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ Solution
2. Calculer de même les images par f des vecteurs $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ Solution
3. Justifier, à l'aide des résultats précédents, que l'application f n'est pas linéaire. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.2 Formule de linéarité d'un endomorphisme

Cours :
Application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.1

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}\,;\vec{j})$, soit f un endomorphisme de E, et soit enfin $\vec{u}$ un vecteur de E dont les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Donner l'écriture en ligne du vecteur $\vec{u}$. Solution
2. On suppose que les images par f des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont : $f(\vec{i}) = \alpha\vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \beta\vec{j}$. Déterminer les valeurs de α et β sachant que : $f(\vec{u}) = 5\vec{i} + 14\vec{j}$.

   Solution
3. Calculer l'image par f du vecteur $\vec{w} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.3 Recherche d'un noyau

Cours :
Noyau d'un endomorphisme

Exemples :
Exemple A.2.2

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, soit f l'application (dont on admet qu'elle est linéaire) définie pour tout vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par :

$$f(\vec{v}) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (5x - 2y + z)\,\vec{i} + (-x - y + 3z)\,\vec{j} + (3x - 4y + 7z)\,\vec{k}$$

1. Le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ appartient-il au noyau de f ? Solution
2. Déterminer et décrire (nature, dimension et vecteur(s) directeur(s)) l'ensemble $\mathrm{Ker} f$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.4 Expression analytique d'un endomorphisme

Cours :
Base et application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.3

On se place dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E par lequel les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ ont pour images :

$$f(\vec{i}) = \vec{j} - \vec{k} \ , \ f(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k} \text{ et } f(\vec{k}) = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

1. Quelle est l'image, par f , du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Solution
2. Soient $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur quelconque de E et $\vec{w} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ son image par f . Exprimer X , Y et Z en fonction de x , y et z . Solution
3. Utiliser le résultat de la question précédente pour déterminer le noyau de l'endomorphisme f . Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.3 Exercices du chapitre III

Exercice B.3.1 Ecriture et lecture de matrices

Cours :
Matrice d'endomorphisme

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$. On considère les endomorphismes f et g de E :

– f est défini par :

$$f(\vec{i}) = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ f(\vec{j}) = -5\vec{i} + 2\vec{k} \text{ et } f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

– la matrice de g par rapport à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{g,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution
2. Quelles relations peut-on écrire à partir de la matrice $M_{g,\mathcal{B}'}$? Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.2 Recherche de noyau avec une matrice

Cours :
Calculer avec une matrice

Exemples :
Exemple A.3.3

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(\vec{i}) = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$$

1. Ecrire la matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution
2. Déterminer, à l'aide de la matrice A, l'image par f du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

   Vérifier le résultat obtenu en calculant $f(\vec{u})$ sans utiliser de matrice. Solution
3. De manière générale, déterminer, à l'aide de la matrice A, l'image par f du vecteur quelconque $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Solution
4. Déduire de la question précédente le noyau de l'application f. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.3 Matrice exprimée dans une nouvelle base

Cours :
Base et matrice d'endomorphisme

Exemples :
Exemple A.3.4

Soit E un espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, et soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j} \text{ et } f(\vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

On donne aussi les vecteurs :

$$\vec{e_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\ ,\ \vec{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{e_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Ecrire la matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution
2. Montrer que l'on a : $f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + 4\vec{e_2}$ et $f(\vec{e_3}) = \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$. Solution
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation : $f(\vec{v}) = 4\vec{v}$, est la droite vectorielle admettant $\vec{e}_1$ comme vecteur directeur. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

4. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est une base de E. Donner la matrice A' représentant f par rapport à cette base. Solution

5. Calculer matriciellement l'image du vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$. Solution

Exercice B.3.3
Matrice exprimée dans une nouvelle base

B.4 Exercices du chapitre IV

Exercice B.4.1 Addition de matrices

Cours :
Addition de matrices

Exemples :
Exemple A.4.3

On se place dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les endomorphismes f et g de E. On connait la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

On appelle B la matrice représentant g par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Déterminer l'expression de $g(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sachant que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.2 Produit de matrices

Cours :
Produit de matrices

Exemples :
Exemple A.4.5

Exercices :
Exercice B.4.3

On se place dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les endomorphismes f et g de E définis par :

$$f(\vec{i}) = -\vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ \ f(\vec{j}) = 3\vec{i} + 6\vec{j} \text{ et } f(\vec{k}) = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

et :

$$g(\vec{i}) = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\ ,\ \ g(\vec{j}) = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \text{ et } g(\vec{k}) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

1. Ecrire les matrices A et B représentant f et g par rapport à la base $\mathcal{B}$.
   Solution
2. Calculer les matrices C et D représentant les endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.3 Produit nul

Cours :
Produit de matrices

Exemples :
Exemple A.4.5

On va voir dans cet exercice, que à la différence de ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, si un produit de matrice est nul, cela n'implique pas forcément qu'une des deux matrices est nulle.

On considère les endomorphismes f et g de l'espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ définis par :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{0}\ ,\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1\ ,\ g(\vec{e}_1) = \vec{0} \text{ et } g(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$

1. Ecrire les matrices A et B représentant f et g par rapport à la base $\mathcal{B}$.
   Solution
2. Déterminer la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $g \circ f$.
   Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.4 Matrice unité

Cours :
Matrice unité

Vérifier le rôle d'élément neutre de la matrice I_3 unité d'ordre 3 en calculant les produits $A \times I_3$ et $I_3 \times A$ avec la matrice A égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solution

Exercice B.4.5 Matrice inversible

Cours :
Matrice inverse

Exemples :
Exemple A.4.6
Exemple A.4.7

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ q & 2 & p \\ p & -1 & q \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans essayer de calculer d'inverse, que la matrice B est inversible. Solution
2. Déterminer les paramètres p et q pour que les matrices A et B soient inverses l'une de l'autre. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.6 Résolution matricielle de système

Cours :
Résolution matricielle de systèmes

Exemples :
Exemple A.4.8

On considère les matrices P et Q suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & \gamma \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer γ pour que Q soit la matrice inverse de P. Solution
2. En déduire les solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = -4 \\ -2x + y + z = 1 \\ 3x - y - z = 3 \end{array} \right.$$

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.5 Exercices du chapitre V

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.1 Mineur et cofacteur

Cours :
Mineur et cofacteur

Exemples :
Exemple A.5.1

On considère le déterminant D d'ordre 4 suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculer le cofacteur de chaque coefficient -3 apparaissant dans le déterminant D.

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.2 Calculs simples de déterminants

Cours :
Developpement d'un déterminant

Exemples :
Exemple A.5.2

Calculer les déterminants suivants (de la manière la plus simple possible !) :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 3 & 1 \\ 29 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Solution D_1
Solution D_2

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.3 Propriétés du déterminant

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.4
Exercice B.5.5

On considère le déterminant D_1 suivant qu'<u>on ne cherche pas à calculer</u> :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Exprimer les déterminants D_2 et D_3 suivants en fonction de D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 12 \\ -4 & 10 & 6 \\ 6 & 14 & -8 \end{vmatrix} \quad \text{et } D_3 = \begin{vmatrix} -12 & -18 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

Solution D_2
Solution D_3

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.4 Propriétés du déterminant

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.5

On donne le déterminant D suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 13 & 6 & 9 \\ 11 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

1. A l'aide de combinaisons de lignes ou de colonnes, trouver un déterminant égal à D mais dont l'une des lignes ou l'une des colonnes contient deux 0.
Solution
2. En déduire la valeur de D. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.5 Factorisation d'un déterminant

Cours :
Propriétés des déterminants

Exemples :
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6

Exercices :
Exercice B.5.3
Exercice B.5.4

Déterminer les valeurs a, b et c pour lesquelles le déterminant D suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b & a+b & -c \end{vmatrix}$$

(Autrement dit, on demande d'obtenir D sous une forme factorisée par rapport à a, b et c, *en utilisant les propriétés des déterminants*)

Indice
Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.6 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3

Cours :
Calcul de matrices inverses

Exemples :
Exemple A.5.7

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible. Solution
2. Calculer la comatrice de A. Solution
3. En déduire la matrice inverse de A. Solution
4. Utiliser le résultat précédent pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = -10 \\ -2x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.6 Exercices du chapitre VI

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6.1 Ecriture et lecture de matrices de passage

Cours :
Matrice de passage

Exemples :
Exemple A.6.1

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ et $\mathcal{B}" = (\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)$. On donne les coordonnées suivantes :

$$\vec{i}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'},\ \vec{j}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\ \text{et}\ \vec{k}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

et :

$$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ \vec{u}_2\begin{pmatrix}-1\\4\\-6\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\ \text{et}\ \vec{u}_3\begin{pmatrix}2\\-8\\13\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et on donne également la matrice de passage de la base $\mathcal{B}"$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B}"\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}6 & 0 & -3\\1 & -1 & 4\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Solution
2. A quoi correspondent les coefficients de la matrice $P_{\mathcal{B}"\to\mathcal{B}'}$? Solution

Exercice B.6.2 Coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base

Cours :
Changement de base (pour les vecteurs)

Exemples :
Exemple A.6.2

Soient E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, et les 4 vecteurs de E suivants :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Montrer que la famille $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E qu'on appellera $\mathcal{B}'$. Solution
2. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Solution
3. Déterminer α pour que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -7 \\ -1 & \alpha & -5 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de la matrice P. Solution
4. Déterminer à l'aide des résultats précédents les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6.3 Matrice de passage inverse

Cours :
Matrice de passage inverse

Exemples :
Exemple A.6.3

Dans un espace vectoriel E muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, on donne les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Déterminer la matrice $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$.

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6.4 Matrice par rapport à une nouvelle base

Cours :
Changement de base (pour les endomorphismes)

Exemples :
Exemple A.6.4

Soit E l'espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} + 7\vec{j}$.

1. Ecrire la matrice M représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$. Solution
2. Soient $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ deux vecteurs de E. Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$: que remarque-t-on ? Solution
3. Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base $\mathcal{B}'$ de E. Quelle est la matrice M' de f dans cette base ? Solution
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1} et vérifier la relation $M' = P^{-1}MP$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Solution des exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Mise en garde

Attention, les pages qui suivent ne sont pas censées être lues de manière linéaire : elles n'ont un sens que si on y accède depuis la page contenant l'énoncé de l'exercice auquel elles font référence, et après avoir cherché cet exercice.

Document C.1.2 Une application non linéaire (1)

Exercices :
Exercice B.2.1

L'écriture en ligne de $\vec{u}_1$ est : $\vec{u}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
Par conséquent, on a, en remplaçant, x par 2 et y par 3 dans la formule définissant f :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= f(2\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= (2 \times 2 - 3 + 1)\vec{i} + 3 \times 3\vec{j} \\ &= 2\vec{i} + 9\vec{j} \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Une application non linéaire (2)

Exercices :
Exercice B.2.1

On procède de la même façon qu'à la question précédente et on trouve :

$$f(\vec{u}_2) = 8\vec{i} + 3\vec{j} \qquad \text{et} \qquad f(\vec{u}_3) = 9\vec{i} + 12\vec{j}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Une application non linéaire (3)

Exercices :
Exercice B.2.1

On peut remarquer que le vecteur $\vec{u}_3$ précédent n'est autre que la somme des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Par conséquent, si l'application f était linéaire, la formule de linéarité impliquerait en particulier que :

$$f(\vec{u}_3) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2)$$

Or ce n'est pas le cas, puisque :

$$f(\vec{u}_3) = 9\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) = 10\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$$

Donc, f n'est pas une application linéaire.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Formule de linéarité d'un endomorphisme (1)

Exercices :
Exercice B.2.2

L'écriture en ligne de $\vec{u}$ est : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.6 Formule de linéarité d'un endomorphisme (2)

Exercices :
Exercice B.2.2

Comme f est un endomorphisme, on peut utiliser la formule de linéarité pour écrire :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(\vec{i}+2\vec{j}) = f(\vec{i}) + 2f(\vec{j}) \\ &= \alpha\vec{i} + 2\vec{j} \;+\; 2\,(2\vec{i} + \beta\vec{j}) \\ &= (\alpha+4)\vec{i} \;+\; (2+2\beta)\vec{j} \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $f(\vec{u}) = 5\vec{i} + 14\vec{j}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 4 = 5 \\ 2 + 2\beta = 14 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 6 \end{array} \right.$$

Finalement, on a : $f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 6\vec{j}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.7 Formule de linéarité d'un endomorphisme (3)

Exercices :
Exercice B.2.2

A l'aide des résultats obtenus à la question précédente, et toujours grâce à la formule de linéarité, on a :

$$f(\vec{w}) = f(5\vec{i} - 3\vec{j}) = 5f(\vec{i}) - 3f(\vec{j}) = 5\,(\vec{i} + 2\vec{j}) - 3\,(2\vec{i} + 6\vec{j}) = -\vec{i} - 8\vec{j}$$

Document C.1.8 Recherche d'un noyau (1)

Exercices :
Exercice B.2.3

Pour savoir si le vecteur donné appartient au noyau de f, il faut regarder si il annule f :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}) \\ &= (5\times 2 - 2\times(-1) + 6)\vec{i} + (-2 - (-1) + 3\times 6)\vec{j} + (3\times 2 - 4\times(-1) + 7\times 6)\vec{k} \\ &= 18\vec{i} + 17\vec{j} + 52\vec{k} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{v}$ donné n'annule pas f, donc il n'appartient pas au noyau $\mathrm{Ker} f$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.9 Recherche d'un noyau (2)

Exercices :
Exercice B.2.3

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur appartenant au noyau de f. Alors, il annule f, c'est à dire :

$$(5x-2y+z)\vec{i}+(-x-y+3z)\vec{j}+(3x-4y+7z)\vec{k}=\vec{0}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 5x-2y+z=0 \\ -x-y+3z=0 \\ 3x-4y+7z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -5y+15z-2y+z=0 \\ x=-y+3z \\ -3y+9z-4y+7z=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -7y+16z=0 \\ x=-y+3z \\ -7y+16z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -7y+16z=0 \\ x=-y+3z \end{array}\right.$$

On reconnait là un système d'équations cartésiennes (non proportionnelles) de droite vectorielle. Le vecteur $\vec{w}=5\vec{i}+16\vec{j}+7\vec{k}$ est un vecteur directeur de cette droite, car ses coordonnées vérifient le système précédent.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par conséquent, $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle (de dimension 1) engendrée par le vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Document C.1.10 Expression analytique d'un endomorphisme (1)

Exercices :
Exercice B.2.4

En utilisant la propriété de linéarité de f, on calcule :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) = 4\,(\vec{j}-\vec{k}) + 2\,(\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}) - (\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}) \\ &= \vec{i}-\vec{j}+5\vec{k} \end{aligned}$$

L'image par f du vecteur $\vec{u}$ est donc :

$$f(\vec{u}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.11 Expression analytique d'un endomorphisme (2)

Exercices :
Exercice B.2.4

Par définition, on a : $\vec{w} = f(\vec{v})$. Or, on peut écrire :

- d'une part : $\vec{w} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$
- et d'autre part :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\,(\vec{j} - \vec{k}) + y\,(\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}) + z(\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) \\ &= (y+z)\vec{i} + (x - 4y - 3z)\vec{j} + (-x + 7y + 5z)\vec{k} \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit donc :

$$\begin{cases} X = y + z \\ Y = x - 4y - 3z \\ Z = -x + 7y + 5z \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.12 Expression analytique d'un endomorphisme (3)

Exercices :
Exercice B.2.4

Un vecteur $\vec{v}$ appartient au noyau de f si il annule f , c'est à dire si $\vec{w} = f(\vec{v}) = \vec{0}$. D'après la question précédente, $\vec{v}$ appartient donc à $\mathrm{Ker} f$ si :

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=0 \\ x-4y-3z=0 \\ -x+7y+5z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=-z \\ x+4z-3z=0 \\ -x-7z+5z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=-z \\ x+z=0 \\ -x-2z=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=-z \\ x=-z \\ z-2z=0 \end{array}\right. \iff x=y=z=0$$

Par conséquent, le noyau de f ne contient que le vecteur nul $\vec{0}$:

$$\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.13 Ecriture et lecture de matrices (1)

Exercices :
Exercice B.3.1

On reporte les coordonnées de $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en colonnes pour obtenir la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.14 Ecriture et lecture de matrices (2)

Exercices :
Exercice B.3.1

La matrice $M_{g,\mathcal{B}'}$ représente l'endomorphisme g par rapport à la base $\mathcal{B}'$, donc ses colonnes contiennent les coordonnées de $g(\vec{u})$, $g(\vec{v})$ et $g(\vec{w})$ par rapport à $\mathcal{B}' = (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$. D'où, on peut tirer :

$$g(\vec{u}) = \vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w} \qquad g(\vec{v}) = 2\vec{u} + 6\vec{v} \qquad g(\vec{w}) = 3\vec{u} + 8\vec{v} + \vec{w}$$

Document C.1.15 Recherche de noyau avec une matrice (1)

Exercices :
Exercice B.3.2

On reporte les coordonnées de $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en colonnes pour obtenir la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.16 Recherche de noyau avec une matrice (2)

Exercices :
Exercice B.3.2

En utilisant la matrice A, on a :

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 1\times 1 + (-2)\times(-3) \\ -3\times 2 + 2\times 1 + 7\times(-3) \\ 1\times 2 + 0\times 1 + (-1)\times(-3) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

En utilisant la formule de linéarité, on vérifie le résultat précédent :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 2\, f(\vec{i}) + f(\vec{j}) - 3\, f(\vec{k}) \\ &= 2\,(4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) - 3\,(-2\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}) \\ &= 15\vec{i} - 25\vec{j} + 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.17 Recherche de noyau avec une matrice (3)

Exercices :
Exercice B.3.2

En utilisant la matrice A, on a :

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4x + y - 2z \\ -3x + 2y + 7z \\ x - z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.18 Recherche de noyau avec une matrice (4)

Exercices :
Exercice B.3.2

On sait qu'un vecteur $\vec{v}$ appartient au noyau de f si $f(\vec{v}) = \vec{0}$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} f \iff f(\vec{v}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4x+y-2z \\ -3x+2y+7z \\ x-z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases} 4x+y-2z=0 \\ -3x+2y+7z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4z+y-2z=0 \\ -3z+2y+7z=0 \\ x=z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y+2z=0 \\ 2y+4z=0 \\ x=z \end{cases} \qquad \text{(équations proportionnelles)}$$

$$\iff \begin{cases} y+2z=0 \\ x=z \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Les équations obtenues ne sont pas proportionnelles : elles représentent donc une droite vectorielle. Il s'agit de la droite de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dont les coordonnées vérifient le système.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.19 Matrice exprimée dans une nouvelle base (1)

Exercices :
Exercice B.3.3

On reporte les coordonnées de $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en colonnes pour obtenir la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.20 Matrice exprimée dans une nouvelle base (2)

Exercices :
Exercice B.3.3

En utilisant la matrice A, on a :

$$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Or, on calcule :

$$\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

D'où, on a bien : $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

De la même façon, on montre que :

$$f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

Document C.1.21 Matrice exprimée dans une nouvelle base (3)

Exercices :
Exercice B.3.3

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur de E, alors :

$$f(\vec{v}) = 4\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + y - z = 4x \\ x + 3y + z = 4y \\ 2x + 4z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

Le système obtenu est un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle, et les coordonnées de $\vec{e}_1$ le vérifient.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par conséquent, l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ vérifiant $f(\vec{v}) = 4\vec{v}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1$. En particulier, notons que l'on a :

$$f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1$$

Document C.1.22 Matrice exprimée dans une nouvelle base (4)

Exercices :
Exercice B.3.3

La famille $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E si son déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est différent de 0.
Or :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \neq 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est bien une base de E.

D'après les questions 2 et 3, comme on a :

$$f(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

alors on obtient la matrice A' représentant f par rapport à $\mathcal{B}'$:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.23 Matrice exprimée dans une nouvelle base (5)

Exercices :
Exercice B.3.3

Comme le vecteur $\vec{v}$ proposé est donné par rapport à la base $\mathcal{B}'$, on utilise la matrice A' pour calculer $f(\vec{v})$:

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 13 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.24 Addition de matrices (1)

Exercices :
Exercice B.4.1

En comparant A et $A+B$, on obtient sans difficulté :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

D'où, B représentant g par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on déduit :

$$g(\vec{i}) = -2\vec{i} + 3\vec{j}\,,\ g(\vec{j}) = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}\,,\ g(\vec{k}) = -4\vec{i} + \vec{j} - 11\vec{k}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.25 Produit de matrices (1)

Exercices :
Exercice B.4.2

En reportant les informations données en colonnes, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Document C.1.26 Produit de matrices (2)

Exercices :
Exercice B.4.2

La matrice C est donnée par le produit $B \times A$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -11 & 69 & 12 \\ 7 & -15 & 16 \\ 7 & 12 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice D est donnée par le produit $A \times B$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 26 \\ -1 & -28 & 9 \\ 18 & 22 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque en particulier que : $B \times A \neq A \times B$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.27 Produit nul (1)

Exercices :
Exercice B.4.3

En reportant les informations données en colonnes, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.28 Produit nul (2)

Exercices :
Exercice B.4.3

La matrice C de l'endomorphisme $g \circ f$ est donnée par le produit $B \times A$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, bien que les matrices A et B ne soient pas nulles, on constate que leur produit l'est.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.29 Matrice unité (1)

Exercices :
Exercice B.4.4

On vérifie aisément que :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A \times I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} = A
\end{array}
$$

Et que :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\
I_3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} = A
\end{array}
$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.30 Matrice inversible (1)

Exercices :
Exercice B.4.5

Le calcul du déterminant de B donne : $\text{dét}\, B = -4$. Comme ce déterminant est non-nul, on en déduit que la matrice B est inversible.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.31 Matrice inversible (2)

Exercices :
Exercice B.4.5

Les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre si on a : $A \times B = I_3$. Or :

$$A \times B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ q & 2 & p \\ p & -1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2q+2p & 4q+2+2p & 3q+2-p \\ 2p+2q & 4p-1+2q & 3p-1-q \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que les 2 dernières lignes de la matrice obtenue correspondent à celles de la matrice unité à condition que :

$$p = \frac{1}{2} \text{ et } q = -\frac{1}{2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.32 Résolution matricielle de système (1)

Exercices :
Exercice B.4.6

Pour que Q soit l'inverse de P, il faut avoir, : $P \times Q = I_3$. Or :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & \gamma \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6+2\gamma \\ 0 & 1 & 3+\gamma \\ 0 & 0 & -2-\gamma \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on doit avoir $\gamma = -3$, et donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.33 Résolution matricielle de système (2)

Exercices :
Exercice B.4.6

On reconnaît dans le système proposé les coefficients de la matrice P, de sorte qu'on peut interpréter ce système matriciellement de la façon suivante :

$$P \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En multipliant par Q de chaque côté et en tenant compte du fait que $Q \times P = I_3$, on en déduit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.34 Mineur et cofacteur (1)

Exercices :
Exercice B.5.1

Le mineur D_{13} associé au coefficient -3 apparaissant à la première ligne et troisième colonne du déterminant D est :

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Par conséquent, le cofacteur A_{13} de ce même coefficient est :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = (-1)^4 D_{13} = D_{13} = -7$$

De même, le mineur D_{34} du coefficient -3 présent sur la troisième ligne de la quatrième colonne de D est :

$$D_{34} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 253$$

Par conséquent, le cofacteur A_{34} de ce deuxième coefficient est :

$$A_{34} = (-1)^{3+4} D_{34} = (-1)^7 D_{34} = -D_{34} = -253$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.35 Calculs simples de déterminants (1)

Exercices :
Exercice B.5.2

La solution la plus simple consiste ici à développer le déterminant suivant la troisième ligne. Du fait de la présence de zéros dans cette ligne, on a en effet alors :

$$D_1 = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-13) = -26$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.36 Calculs simples de déterminants (2)

Exercices :
Exercice B.5.2

La solution la plus simple consiste ici à développer le déterminant suivant la quatrième colonne. Du fait de la présence de zéros dans cette colonne, on a en effet alors :

$$D_2 = -8 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

Or :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

D'où :

$$D_2 = -8 \times 2 - 1 \times 6 = -22$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.37 Propriétés du déterminant (1)

Exercices :
Exercice B.5.3

On peut remarquer que toutes les colonnes (ou toutes les lignes) de D_2 contiennent des coefficients qui sont les doubles de ceux de D_1 . On peut donc écrire :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 12 \\ -4 & 10 & 6 \\ 6 & 14 & -8 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 & 12 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 14 & -8 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & 12 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Ainsi, on a : $D_2 = 8 \times D_1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.38 Propriétés du déterminant (2)

Exercices :
Exercice B.5.3

On peut se ramener à D_1 à partir de D_3 de la façon suivante :

$$D_3 = \begin{vmatrix} -12 & -18 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -12 & 3 & -18 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -(-3) \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Ainsi, on a : $D_3 = 3 \times D_1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.39 Propriétés du déterminant (3)

Exercices :
Exercice B.5.4

En remarquant que les coefficients apparaissant dans la deuxième colonne sont tous des multiples de 3, on peut faire apparaître des 0 à l'aide des combinaisons suivantes :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 13 & 6 & 9 \\ 11 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -7 \\ 11 & 9 & 19 \end{vmatrix} \quad L_2 \to L_2 - 2\,L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix} \quad L_3 \to L_3 - 3\,L_1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.40 Propriétés du déterminant (4)

Exercices :
Exercice B.5.4

En développant selon la deuxième colonne l'expression obtenu pour D à la question précédente, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 129$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.41 Factorisation d'un déterminant (1)

Exercices :
Exercice B.5.5

Une combinaison intéressante pour commencer est par exemple : $L_3 \rightarrow L_3 + L_1 + L_2$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.42 Factorisation d'un déterminant (2)

Exercices :
Exercice B.5.5

En commençant par appliquer la combinaison proposée dans l'indice, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b & a+b & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \quad L_3 \to L_3 + L_1 + L_2$$

La troisième ligne comportant 3 coefficients identiques, on peut alors écrire :

$$D = (a+b+c) \times \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis, en appliquant les combinaisons $C_2 \to C_2 - C_1$ et $C_3 \to C_3 - C_1$, on trouve :

$$D = (a+b+c) \times \begin{vmatrix} -a & b+c+a & b+c+a \\ a+c & -b-a-c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Et finalement, en développant suivant la troisième ligne, on a :

$$D = (a+b+c) \times 1 \times \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c \\ -(a+b+c) & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, le déterminant D est nul si et seulement si la somme $a+b+c$ est nulle.

Document C.1.43 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 (1)

Exercices :
Exercice B.5.6

La matrice A est inversible car on montre que son déterminant est non-nul :

$$\text{dét}\, A = -2 \neq 0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.44 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 (2)

Exercices :
Exercice B.5.6

La comatrice de A est :

$$\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Document C.1.45 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 (3)

Exercices :
Exercice B.5.6

D'après la formule donnée dans le cours, la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A}\, {}^t\text{Com}\, A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Document C.1.46 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 (4)

Exercices :
Exercice B.5.6

On remarque que les coefficients apparaissant dans le système proposé sont ceux de la matrice A. On peut donc écrire :

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$x = 28\,,\ \ y = -18 \text{ et } z = -48$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.47 Ecriture et lecture de matrices de passage (1)

Exercices :
Exercice B.6.1

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -8 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.48 Ecriture et lecture de matrices de passage (2)

Exercices :
Exercice B.6.1

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$" à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$" . On peut donc lire en colonnes :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}"} = 6\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}"} = -\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}"} = -3\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Document C.1.49 Coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base (1)

Exercices :
Exercice B.6.2

On vérifie que le déterminant, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ est égal à 1, et donc non-nul, ce qui nous garantit que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.50 Coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base (2)

Exercices :
Exercice B.6.2

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.51 Coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base (3)

Exercices :
Exercice B.6.2

Pour que Q soit l'inverse de P, il faut avoir, : $P \times Q = I_3$. Or :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -7 \\ -1 & \alpha & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9-3\alpha & 0 \\ 0 & -2+\alpha & 0 \\ 0 & -3+\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on doit avoir $\alpha = 3$, et donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.52 Coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base (4)

Exercices :
Exercice B.6.2

D'après la relation enoncée dans le cours on a :

$$\vec{w}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times \vec{w}_{\mathcal{B}'} = P \times \vec{w}_{\mathcal{B}'}$$

D'où, en multipliant de part et d'autre par $Q = P^{-1}$, on obtient :

$$Q \times \vec{w}_{\mathcal{B}} = Q \times P \times \vec{w}_{\mathcal{B}'} = I_3 \times \vec{w}_{\mathcal{B}'} = \vec{w}_{\mathcal{B}'}$$

Ainsi, on en déduit :

$$\vec{w}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.53 Matrice de passage inverse (1)

Exercices :
Exercice B.6.3

D'après le cours, la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Or on a vu qu'une matrice inverse se calculait à partir de la comatrice selon la formule :

$$P^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, P}\, {}^t\text{Com}\, P$$

On calcule ici :

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{, dét}\, P = 1 \text{ et Com}\, P = \begin{pmatrix} -10 & -9 & -11 \\ 1 & 1 & 1 \\ -15 & -14 & -17 \end{pmatrix}$$

D'où on déduit :

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -15 \\ -9 & 1 & -14 \\ -11 & 1 & -17 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.54 Matrice par rapport à une nouvelle base (1)

Exercices :
Exercice B.6.4

La matrice M contient, en colonnes, les coordonnées de $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Document C.1.55 Matrice par rapport à une nouvelle base (2)

Exercices :
Exercice B.6.4

Calculons $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ à l'aide de la matrice M :

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Et :

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On remarque donc que : $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 5\vec{v}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.56 Matrice par rapport à une nouvelle base (3)

Exercices :
Exercice B.6.4

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de E, car leur déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est différent de 0 (il vaut 1).

D'après la question précédente, on a alors :

$$f(\vec{u}) = 4\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \text{ et } f(\vec{v}) = 5\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

D'où la matrice M' représentant f dans la base $\mathcal{B}'$:

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.57 Matrice par rapport à une nouvelle base (4)

Exercices :
Exercice B.6.4

La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de passage inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, P}\, {}^t\text{Com}\, P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors successivement :

$$M \times P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Et :

$$P^{-1} \times (M \times P) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a bien vérifié la relation : $M' = P^{-1}MP$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Index des notions

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents