Algèbre linéaire en dimension finie

Première partie : espaces vectoriels réels de dimension 2 et 3

Johan MILLAUD

Département Génie Civil de l'IUT du Limousin

Février 2006 - version 2

Table des matières

Chapitre I

Avant-propos

I.1 Navigation dans le cours

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 LaTeX et Polytex

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale Polytex.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

Polytex est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de Polytex intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Panneau de navigation Acrobat

Le cours électronique produit par Polytex est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Acrobat Reader. Les versions récentes de ce logiciel disposent d'un panneau de navigation dans lequel apparaît la structure hiérarchique du cours (affichage par signets). On peut ainsi accéder directement à une page quand on connait son emplacement dans le cours.

Cette technique de navigation, dite navigation physique, ne doit donc être utilisée que lorsqu'on connait déjà bien le cours et qu'on cherche une information particulière. Dans tous les autres cas, il est vivement conseillé de fermer ce panneau de navigation et d'utiliser les liens actifs et les systèmes de navigation propres au cours.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).
On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et la table des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◀ précédent" permet de revenir au grain sur le panneau de navigation Acrobat, et le lien "▶ suivant" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◀ précédent" et "▶ suivant" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain n'excède jamais (ou presque) deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◀◀ et ▶▶ situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans le cours. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

Exercices :
Exercice B.1.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain est en général associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Dans certains grains ou exemples, on pourra trouver des renvois à des grains ou exemples antérieurs. Pour ne pas multiplier les renvois et ne pas perdre le lecteur, cela

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ne se produira que très occasionnellement lorsque les grains ou exemples auront des contenus fortement liés et qu'ils seront chronologiquement très éloignés. Ces renvois particuliers sont unilatéraux : il n'y a pas de renvois permettant d'accéder rapidement à un grain ou exemple ultérieur. Dans de tels cas de figure, il est nécessaire de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

I.1.5 Le menu de navigation

On a conseillé plus tôt de limiter l'utilisation du panneau de navigation d'Acrobat Reader, surtout lors d'une première lecture. Cependant, même quand on connait bien le cours, et/ou quand on cherche une information précise, ce panneau n'est pas indispensable, car le cours possède son propre menu de navigation accessible depuis n'importe quelle page : c'est la liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit.

Ainsi, on peut à tout moment accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices. On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : il permet de basculer vers des documents d'approndissement et d'illustration du cours.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, Polytex associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Objectifs pédagogiques et choix didactiques

I.2.1 Objectifs pédagogiques

L'objectif principal de ce cours en 3 parties est de présenter les outils et techniques permettant de diagonaliser des matrices carrées d'ordre 2 et 3. Cette présentation doit permettre d'apprendre à utiliser ces outils et techniques mais aussi de les comprendre. Ainsi, à l'issue de l'apprentissage, on doit être capable de diagonaliser dans $\mathbb{R}$ une matrice (quand c'est possible) en complète autonomie, mais on doit, de plus, avoir acquis des bases suffisamment solides pour appréhender sereinement des prolongements vers la diagonalisation dans $\mathbb{C}$ et la triangularisation.

Pour atteindre l'objectif principal, on fixe deux étapes intermédiaires : maîtriser le calcul vectoriel en dimensions 2 et 3, et acquérir une bonne connaissance du calcul matriciel. Là aussi, on espère que l'apprenant aura assimilé ces notions au point d'entrevoir les généralisations possibles qu'on peut en faire en dimension finie quelconque et dans le cadre d'espaces vectoriels de nature très variée.

On traite ici la première étape. A l'issue de cette première partie, on doit commencer à se représenter ce qu'est un espace vectoriel. On doit maîtriser les notions de *combinaison linéaire de vecteurs*, de *base et dimension d'un espace vectoriel* et de *droite et plan vectoriels*, afin notamment de savoir :

- trouver les coordonnées d'un vecteur dans une (nouvelle) base
- si des vecteurs donnés forment une base d'un espace vectoriel
- si des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires
- caractériser et reconnaître une droite ou un plan vectoriel à l'aide de ses équations cartésiennes

I.2.2 Pré-requis

Documents :
Document C.1.1

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques très peu rencontrée dans l'Enseignement Secondaire. Ce cours en expose les bases de manière simplifiée : il est abordable avec les outils mathématiques traditionnellement enseignés dans les filières scientifiques et techniques du Lycée. Plus particulièrement, il est fortement souhaitable d'avoir assimilé la notion d'application et les résultats élémentaires concernant les polynômes réels à une indéterminée.

Une bonne connaissance de la géométrie vectorielle vue dans les classes antérieures facilitera la compréhension et la représentation des notions relatives aux espaces vectoriels, mais elle n'est pas indispensable.

En termes de calculs algébriques, on signale dès à présent la nécessité d'être à l'aise avec la résolution des systèmes d'équations linéaires, en particulier quand ces systèmes ne conduisent pas à une solution unique. Le lecteur peu habile dans ce type de résolution trouvera des rappels élémentaires et des conseils pratiques sur ce sujet dans la partie "Documents" de ce cours. Il est recommandé de tester son habileté avant de débuter le premier chapitre de cours...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

On l'a évoqué auparavant : ce cours n'est qu'une présentation simplifiée de résultats élémentaires d'algèbre linéaire en dimensions 2 et 3. Il a été écrit avec l'objectif d'être compréhensible par un étudiant d'IUT (Génie Civil) en autonomie.

Par conséquent, les résultats énoncés ne sont pas systématiquement démontrés, mais on s'est efforcé d'apporter le plus souvent possible des éléments de justification. L'exception la plus notable concerne le calcul de déterminants dont les règles ont été posées sans ménagement (première et deuxième partie du cours).

Par ailleurs, une présentation axiomatique ne semble pas réaliste à ce niveau, surtout dans le cadre d'un cours électronique. C'est pourquoi, même si on a voulu conserver une certaine rigueur, le lecteur averti notera quelques raccourcis et libertés par rapport à une présentation plus académique ; on pourra regretter par exemple l'absence d'une définition claire et précise des notions d'espaces et sous-espaces vectoriels. Le lecteur novice, quant à lui, gardera à l'esprit que ce cours n'est qu'une première approche de l'algèbre linéaire et n'hésitera pas à se documenter à l'aide d'ouvrages plus conventionnels à la lumière de ce qu'il aura déjà acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Choix didactiques

On a parlé d'autonomie pour caractériser la situation didactique dans laquelle est placé un lecteur face à ce cours. En effet, on remarquera que les exercices proposés sont accompagnés de solutions relativement détaillées. On met en garde le lecteur en phase d'apprentissage : il serait illusoire de penser que l'on peut assimiler les notions introduites en se contentant de lire les solutions des exercices proposés. Ne vous laissez pas guider par la facilité : ayez un papier et un stylo pour chercher réellement les exercices avant de consulter leur solution.

Malgré l'autonomie évoquée plus haut, des phases de mise en commun régulières avec un enseignant et d'autres apprenants sont souhaitables : elles permettront à l'enseignant d'apprécier les progrès des étudiants, de remédier aux problèmes qu'ils rencontrent et de combler les inévitables manques de ce cours. L'étudiant, quant à lui, pourra bénéficier d'un retour personnalisé et poursuivre son apprentissage en étant certain de la solidité de ses acquis.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.5 Temps d'apprentissage

L'un des grands avantages de l'enseignement en autonomie est de permettre à chacun d'évoluer à son rythme. Les temps d'apprentissage que l'on donne ici sont donc purement indicatifs et doivent surtout permettre de prévoir un découpage personnalisé du contenu sur la durée.

Parties du cours d'algèbre	Temps d'apprentissage
Avant-propos (Première Partie)	30 minutes
Document sur les systèmes (Première Partie)	3 heures
Notions de la Première Partie	**7 heures**
Notions de la Seconde Partie, chapitres II et III	6 heures
Notions de la Seconde Partie, chapitres III, IV et V	10 heures
Notions de la Troisième Partie	7 heures

Chapitre II
Notion d'espace vectoriel

II.1 Objectifs

Dans ce cours (qui constitue la première des trois parties d'un cours d'algèbre linéaire), on va poser le cadre de travail propre à l'algèbre linéaire et donner les notions fondamentales nécessaires à l'introduction des matrices.

On va voir en effet que faire de l'algèbre linéaire, c'est avant tout travailler avec un certain type d'ensembles contenant des éléments qu'on peut ajouter entre eux et multiplier à des nombres réels. On passera rapidement sur la caractérisation de ces ensembles pour s'intéresser plutôt aux notions que l'on peut définir quand on travaille avec ces ensembles particuliers : combinaisons linéaires, bases, droites et plans vectoriels.

Le lecteur curieux est invité à approfondir la question de la définition des espaces et sous-espaces vectoriels dans la littérature consacrée au sujet.

II.2 Calculer avec des triplets de nombres

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.1

Un *triplet* de nombres est une liste de 3 nombres réels rangés dans un certain ordre : les triplets $(1\,;\,5{,}2\,;\,\pi)$ et $(\pi\,;\,1\,;\,5{,}2)$ sont, par exemple, des triplets distincts. On remarque au passage qu'un triplet est une liste notée entre parenthèses, les nombres étant séparés par des points-virgules, ou des virgules si il n'y a pas d'ambiguité possible. Quand on veut parler d'un triplet quelconque, on le désigne en général par : $(x; y; z)$.

L'ensemble contenant tous les triplets de nombres réels est noté $\mathbb{R}^3$. On écrit mathématiquement :

$$\boldsymbol{\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) \,/\, x \in \mathbb{R}\,,\; y \in \mathbb{R}\,,\; z \in \mathbb{R}\}}$$

En effet, les accolades signifient qu'on parle d'un ensemble. Dans ces accolades, on précise la forme générale des éléments de l'ensemble (ici des triplets de la forme $(x; y; z)$) . Le "slash" qui suit se lit "tel que" ; il introduit les conditions que doit vérifier un élément ayant la forme requise pour appartenir effectivement à l'ensemble considéré. Ainsi, l'écriture mathématique précédente se traduit littéralement par : *$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de la forme $(x; y; z)$ où x, y et z représentent n'importe quels nombres réels.*

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Calculer avec des triplets de nombres

Pour faire des calculs portant sur des triplets de nombres, on définit les deux opérations suivantes :

– **l'addition de deux triplets :**

$$\boldsymbol{(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)}$$

– **la multiplication d'un triplet par un nombre réel :**

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (x; y; z) = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)}$$

On qualifie de *multiplication externe* la multiplication d'un triplet par un nombre réel, puisqu'elle porte sur des éléments de nature différente.
En combinant les deux opérations dans un même calcul, on a par exemple :

$$3 \cdot (2; -1; 0) + 2 \cdot (-5; 3; 2) = (-4; 3; 4)$$

Si on doit régulièrement manipuler dans des calculs un même triplet, il apparaît judicieux de lui donner un nom qui permette de le désigner plus rapidement qu'en l'écrivant de manière explicite. Convenons de nommer les triplets par des vecteurs.
Ainsi, dans le calcul précédent, si on appelle $\vec{u}$ le triplet $(2; -1; 0)$ et $\vec{v}$ le triplet $(-5; 3; 2)$, alors on a : $3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = (-4; 3; 4)$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Généralisation au cas des n-uplets

Exercices :
Exercice B.2.2

On peut définir, de la même façon qu'on l'a fait pour $\mathbb{R}^3$, les ensembles $\mathbb{R}^2$ (des couples de nombres réels), $\mathbb{R}^4$ (des quadruplets de nombres réels), ou plus généralement $\mathbb{R}^n$ (des *n-uplets* de nombres réels). On généralise alors aisément les opérations d'addition et de multiplication externe à chacun de ces ensembles :

- l'addition : $(x_1; x_2; \cdots; x_n) + (x'_1; x'_2; \cdots; x'_n) = (x_1 + x'_1; x_2 + x'_2; \cdots; x_n + x'_n)$
- la multiplication externe : $\lambda \cdot (x_1; x_2; \cdots; x_n) = (\lambda x_1; \lambda x_2; \cdots; \lambda x_n)$

On travaillera par la suite essentiellement dans les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, mais les résultats énoncés seront très souvent généralisables à tout ensemble de la forme $\mathbb{R}^n$: on donne le nom d'**espaces vectoriels** à ces différents espaces qui présentent de fortes similitudes.
Plus précisément (mais sans entrer dans les détails), l'expression *espace vectoriel* désigne tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant certaines règles de calcul et propriétés de stabilité ; il en existe bien d'autres que les seuls ensembles du type $\mathbb{R}^n$ et de natures très diverses (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée...). C'est pourquoi, par souci de généralité, **on énoncera la plupart des résultats dans le cadre d'un espace vectoriel quelconque noté E, et on nommera les éléments de E par des**

vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$... , comme on a commencé à le faire précédemment avec les triplets de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre III
Base et dimension d'un espace vectoriel

III.1 Combinaison linéaire de vecteurs

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.1

L'algèbre linéaire repose sur les deux opérations que nous avons évoquées précédemment : l'addition et la multiplication externe. Quand une expression comporte ces deux opérations, on parle de *combinaison linéaire*.

Plus précisément, quand on travaille dans un espace vectoriel E, on dit que **le vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ... , $\vec{u}_p$ affectés des coefficients réels λ_1, λ_2, ... , λ_p si :**

$$\boldsymbol{\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{u}_p}$$

Exemple 1 : dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{v} = (-3; -9; 2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (-2; 0; 3)$ et $\vec{u}_3 = (4; -2; -1)$ affectés des coefficients $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 2$, car :

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = -5 \cdot (1; 1; 1) + 3 \cdot (-2; 0; 3) + 2 \cdot (4; -2; -1) = (-3; -9; 2) = \vec{v}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Complétons la définition précédente avec quelques remarques :

- le nombre p de vecteurs apparaissant dans une combinaison linéaire peut être n'importe quel nombre entier positif ($p \in \mathbb{N}^*$)
- certains coefficients λ_i d'une combinaison linéaire peuvent être nuls
- un même vecteur peut s'écrire comme deux (ou plus) combinaisons linéaires différentes d'une même famille de vecteurs (c'est à dire affectés de coefficients différents)

Exemple 2 : dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{v} = (5; -5; -6)$ peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$, $\vec{u}_2 = (-2; 1; 4)$ et $\vec{u}_3 = (0; -5; 8)$ de deux manières différentes. En effet :

- d'une part,

$$-1 \cdot \vec{u}_1 - 3 \cdot \vec{u}_2 + 1 \cdot \vec{u}_3 = -(1; -3; 2) - 3(-2; 1; 4) + (0; -5; 8) = (5; -5; -6) = \vec{v}$$

- et d'autre part,

$$1 \cdot \vec{u}_1 - 2 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 = (1; -3; 2) - 2(-2; 1; 4) + 0(0; -5; 8) = (5; -5; -6) = \vec{v}$$

Dans ce dernier calcul, on voit qu'on peut considérer plus simplement que le vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des seuls vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ affectés des coefficients 1 et -2.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Base d'un espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.3.4
Exemple A.3.5

Exercices :
Exercice B.3.2
Exercice B.3.3

Vulgairement, on peut dire qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs si on peut "construire" ce vecteur à partir des autres à l'aide d'additions et de coefficients multiplicatifs. On peut alors se demander si, avec certains vecteurs d'un espace vectoriel E, il est possible de reconstruire tous les autres vecteurs de E. C'est cette question qui conduit à la notion de *base d'un espace vectoriel.*

Plus rigoureusement, on dit qu'**une famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... et $\vec{e}_n$:**

$$\forall \vec{v} \in E \,, \exists! (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

(*Les symboles* $\forall$, $\exists$, ! *et* / *signifient respectivement : "pour tout", "il existe", "unique" et "tel que". La ligne précédente se lit donc : "pour tout vecteur* $\vec{v}$ *de* E, *il existe une unique famille de coefficients réels notés* x_1, x_2, ... , x_n, *telle que le vecteur* $\vec{v}$ *soit une combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$, *affectés de ces coefficients".*)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Base d'un espace vectoriel

Les coefficients x_i, uniques pour chaque vecteur $\vec{v}$, sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. On adopte alors la notation :

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \Longleftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Il est très important de préciser la base de référence en indice, car si elle n'y est pas, on ne sait pas à quels vecteurs les coordonnées se rapportent, et car la valeur des coordonnées dépend de la base dans laquelle on travaille. En effet, dans deux bases différentes, un même vecteur aura des coordonnées différentes.

Exemple : on vérifie aisément que la famille contenant les couples $(1;0)$ et $(0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et que la famille contenant les triplets $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ et $(0;0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on parle des **bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Dimension d'un espace vectoriel

Exercices :
Exercice B.3.4

On vient de voir qu'une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui permettent de reconstruire chaque vecteur de E d'une seule et unique façon. Cette famille doit donc être suffisamment grande pour *engendrer* tous les vecteurs de E (on parle alors de *famille génératrice* de E), mais ne doit pas contenir trop de vecteurs de sorte qu'un vecteur de E ne puisse jamais se décomposer linéairement de deux façons différentes à l'aide de cette famille. En particulier, un vecteur d'une base ne doit pas pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire des seuls autres vecteurs de la base (on parle de *famille libre*).

En réunissant ces deux contraintes, on montre en fait que, **dans un espace vectoriel E, toutes les bases contiennent le même nombre de vecteurs. Ce nombre, caractéristique de l'espace vectoriel E, est appelé *dimension* de E.**

En particulier, puisque la base canonique de $\mathbb{R}^2$ contient 2 vecteurs, on sait que toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ ne contiendront que 2 vecteurs : **$\mathbb{R}^2$ est de dimension 2**. De même, on sait que **$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3**. Et, on généralise aisément au cas de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.4 Déterminants en dimensions 2 et 3

Exemples :
Exemple A.3.6
Exemple A.3.7

Exercices :
Exercice B.3.5

On sait maintenant que pour qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n puisse constituer une base de E, il faut que cette famille ne contienne ni plus, ni moins que n vecteurs. Cependant, la réciproque n'est pas (toujours) vraie : une famille de n vecteurs ne forme pas forcément une base de E. Il est en général fastidieux de vérifier qu'une famille de vecteurs est bien une base en ne s'aidant que de la définition donnée plus haut. Cependant, quand on connait déjà une base d'un espace vectoriel E de dimension 2 ou 3, on dispose d'un outil très pratique pour déterminer si une famille de vecteurs donnée est aussi une base de E : c'est le **déterminant**.

– En dimension 2, si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$, et si $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont 2 vecteurs de E, alors le déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ de la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est le nombre :

$$\mathbf{d\acute{e}t}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1;\vec{e}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Théorème : avec les notations précédentes, la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E si et seulement si son déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est non-nul.

– En dimension 3, si E est muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, et si $\vec{e}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{e}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont 3 vecteurs de E, alors le déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ de la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est le nombre :

$$\boldsymbol{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=x_1\begin{vmatrix}y_2&y_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_2&x_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}}$$

Théorème : avec les notations précédentes, la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de E si et seulement si son déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est non-nul.

Déterminants en dimensions 2 et 3

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre IV
Droites et plans vectoriels

IV.1 Droites vectorielles

Exemples :
Exemple A.4.1

La notion de dimension introduite plus haut peut être vue grossièrement comme un renseignement sur la taille de l'espace vectoriel dans lequel on travaille : plus la dimension est élevée, plus l'espace vectoriel est "grand". On va voir ici qu'un "grand" espace vectoriel peut contenir des espaces vectoriels plus "petits" (c'est à dire de dimension inférieure).

On dit que 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace vectoriel E sont *colinéaires* si et seulement si il existe un réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Dans un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$, considérons un vecteur $\vec{u}$ non-nul, et l'ensemble $\mathcal{D}$ contenant tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ ($\mathcal{D}$ est donc un sous-ensemble de E). $\mathcal{D}$ se note symboliquement :

$$\mathcal{D} = \{\vec{v} \in E \,/\, \vec{v} = \lambda\vec{u}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Prenons alors deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{D}$, c'est à dire colinéaires à $\vec{u}$. Il existe donc deux nombres λ_1 et λ_2 tels que : $\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{u}$ et $\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{u}$, d'où : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u}$. Cela signifie que la somme de deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ est un vecteur lui aussi

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

colinéaire à $\vec{u}$.
On vérifie de même que le produit d'un réel avec un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur qui est ausi colinéaire à $\vec{u}$.
On montre ainsi que, en ne manipulant que des vecteurs de $\mathcal{D}$, on n'obtient que des vecteurs de $\mathcal{D}$: on dit que $\mathcal{D}$ *est stable par addition et par multiplication externe*. $\mathcal{D}$ est en fait un espace vectoriel inclus dans l'espace vectoriel E lui-même. On dit que $\mathcal{D}$ est un *sous-espace vectoriel* de E.

Plus généralement, **un espace vectoriel F inclus dans un espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* de E. Les sous-espaces vectoriels de E sont les parties non-vides de E stables par addition et par multiplication externe.**

Revenons à l'ensemble $\mathcal{D}$ précédent. Par définition, tout vecteur de $\mathcal{D}$ peut s'écrire en fonction du seul vecteur $\vec{u}$ et on vérifie aisément que cette décomposition est unique. Ainsi, le vecteur $\vec{u}$ constitue, à lui tout seul, une base de $\mathcal{D}$ qui est donc un espace vectoriel de dimension 1 : on dit que **$\mathcal{D}$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$.**

Plus généralement, **un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle. N'importe quel vecteur non-nul d'une droite vectorielle en constitue une base (on parle aussi de vecteur directeur de la droite vectorielle).**

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.2 Plans vectoriels

Exemples :
Exemple A.4.2

Exercices :
Exercice B.4.1

On vient de voir (sommairement) ce qu'était un sous-espace vectoriel de manière générale, et on a caractérisé en particulier les sous-espaces vectoriels de dimension 1. On va s'intéresser maintenant aux *sous-espaces vectoriels de dimension 2*, qui vont également jouer un grand rôle par la suite.

On appelle plan vectoriel tout (sous-) espace vectoriel de dimension 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 3,$; si $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel de E, alors ses bases contiennent deux vecteurs. Soit, par exemple, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de $\mathcal{P}$; alors tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

- en particulier, puisque $\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$ et que cette décomposition est unique, on ne peut pas trouver de coefficient λ tel que $\vec{e}_2 = \lambda \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$; $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont donc pas colinéaires
- pour un vecteur $\vec{v}$ quelconque de $\mathcal{P}$, on a : $\vec{v} = \lambda\, \vec{e}_1 + \mu\, \vec{e}_2$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$; on dit que $\vec{v}$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont *coplanaires*.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Symboliquement, on écrit :

$$\mathcal{P} = \{\vec{v} \in E \,/\, \vec{v} = \lambda\, \vec{e}_1 + \mu\, \vec{e}_2\,;\, \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On montre aisément que **tout couple de vecteurs non-colinéaires de $\mathcal{P}$ forme une base de $\mathcal{P}$ (on peut également parler de vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$)**.On dit encore que **$\mathcal{P}$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$** .

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.3 Vecteurs liés

Exercices :
Exercice B.4.2

On a vu à l'occasion de l'introduction des bases d'espace vectoriel que, en dimension 2 (respectivement 3), une famille de 2 vecteurs (respectivement 3 vecteurs) formait une base si et seulement si le déterminant de cette famille par rapport à une base connue était non-nul. Comment interpréter alors un déterminant nul ?

En dimension 2, on constate aisément que le déterminant de 2 vecteurs n'est nul que lorsque les coordonnées de ces 2 vecteurs sont proportionnelles. Ainsi, **le déterminant de 2 vecteurs est nul si et seulement si ces 2 vecteurs sont colinéaires**. Il y a un lien direct entre ces 2 vecteurs : on dit que **ces vecteurs sont liés**.

En dimension 3, on généralise sans démonstration le résultat précédent : **le déterminant de 3 vecteurs est nul si et seulement si ces 3 vecteurs sont liés, c'est à dire coplanaires**. En effet, si il y a un lien direct entre 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, cela ne veut pas forcément dire que ces vecteurs sont 2 à 2 colinéaires, comme dans le cas de 2 vecteurs ; cela signifie qu'on peut exprimer l'un de ces vecteurs comme une combinaison linéaire des 2 autres : par exemple, $\vec{w} = \lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}$ avec λ et μ réels. D'après le paragraphe précédent, cette relation implique que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.4 Equation cartésienne d'un plan vectoriel en dimension 3

Exemples :
Exemple A.4.3

Exercices :
Exercice B.4.3

On sait maintenant ce qu'est un plan vectoriel et on dispose du déterminant pour savoir si, en dimension 3, des vecteurs sont dans un même plan. Plutôt que d'avoir à calculer systématiquement un déterminant pour savoir si un vecteur appartient à un plan donné, on va montrer que les coordonnées des vecteurs appartenant à un même plan vérifient tous une même équation, caractérisant le plan en question.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Considérons un plan vectoriel $\mathcal{P}$ de E ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, et soit $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur quelconque de E.
D'après le paragraphe précédent, le vecteur $\vec{v}$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires, c'est à dire si et seulement si leur déterminant

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

par rapport à la base $\mathcal{B}$ est nul. On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathcal{P} &\iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{v};\vec{u}_1;\vec{u}_2) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff x\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (y_1z_2 - z_1y_2)\,x - (x_1z_2 - z_1x_2)\,y + (x_1y_2 - y_1x_2)\,z = 0
\end{aligned}$$

En notant a, b et c les nombres : $a = y_1z_2 - z_1y_2$, $b = -(x_1z_2 - z_1x_2)$ et $c = x_1y_2 - y_1x_2$, on a donc :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz = 0$$

L'équation $ax + by + cz = 0$ est appelée **équation cartésienne par rapport à la base $\mathcal{B}$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Réciproquement, on montre que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de coordonnées x, y et z par rapport à la base $\mathcal{B}$ et vérifiant une équation du type "$ax + by + cz = 0$", où a, b et c sont trois coefficients non tous nuls, est un plan vectoriel de E.**

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.5 Equations cartésiennes d'une droite vectorielle en dimension 3

Exemples : Exemple A.4.4
Exercices : Exercice B.4.4
Documents : Document C.1.8

En dimension 3, une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = 0$ représente un plan vectoriel. Du coup, on va voir ici que, toujours en dimension 3, on ne peut pas caractériser une droite vectorielle avec seulement une équation cartésienne.

En effet, comme en géométrie dans l'espace , on montre que l'intersection de 2 plans vectoriels distincts est une droite vectorielle. (*La comparaison est commode mais abusive, la géométrie vectorielle et la géométrie dans l'espace, dite aussi affine, diffèrant par bien des aspects : en géométrie dans l'espace, par exemple, des plans affines peuvent être strictement parallèles, tandis que des plans vectoriels ne le sont jamais car ils contiennent tous le vecteur nul...*). Et réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle, on peut toujours la considérer comme l'intersection de 2 plans vectoriels distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Or, comme on vient de le rappeler, ces 2 plans admettent comme équations cartésiennes respectivement : $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z = 0$. D'où, puisqu'un vecteur $\vec{v}$ appartient à $\mathcal{D}$ si il est sur les 2 plans à la fois, il faut que ses coordonnées vérifient les 2 équations précédentes. Autrement dit, un vecteur $\vec{v}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Ce système comporte 1 inconnue de plus que d'équations : on dit qu'il a 1 *degré de liberté*. Cela signifie qu'il admet une infinité de solutions (les coordonnées de tous les vecteurs appartenant à la droite $\mathcal{D}$) et que, pour en obtenir une, on a la liberté de choisir la valeur de l'une des inconnues, les deux autres étant alors déterminables en résolvant le système à 2 équations et 2 inconnues résultant du choix fait.

Ce système est **un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$**. (Ce n'est pas le seul, puisque la droite $\mathcal{D}$ peut-être considérée comme l'intersection de 2 autres plans vectoriels).

Réciproquement, on montre que tout système du type (S) est un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle, A CONDITION QUE les deux équations ne soient pas proportionnelles, (car sinon elles représentent le même plan, et l'intersection considérée n'est plus une droite mais un plan !).

Annexe A
Exemples

A.1 Exemples de l'avant-propos

Exemple A.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exercices :
Exercice B.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exemple A.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exemple A.1.1" de l'exercice B.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exemples du chapitre II

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.1 Quelques calculs dans $\mathbb{R}^3$

Cours :
Triplets

Exercices :
Exercice B.2.1

Par commodité, on travaille en général en mathématiques avec des triplets de nombres entiers, mais il faut être conscient que, par définition, les triplets de $\mathbb{R}^3$ peuvent être composés de nombres réels non entiers.

Voici donc quelques calculs portant sur des triplets les plus "généraux" possibles :

- $(1{,}3\,;\,-2{,}55\,;\,\frac{4}{3}) + (-0{,}82\,;\,1{,}28\,;\,\frac{1}{2}) = (0{,}48\,;\,-1{,}27\,;\,\frac{11}{6})$
- $2{,}5 \cdot (1{,}33\,;\,0\,;\,-0{,}7) = (3{,}325\,;\,0\,;\,-1{,}75)$
- $(0\,;\,5{,}4\,;\,4\sqrt{2}) - 2 \cdot (1\,;\,0{,}25\,;\,\sqrt{2}) = (-2\,;\,4{,}9\,;\,2\sqrt{2})$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.3 Exemples du chapitre III

Exemple A.3.1 Recherche de combinaison linéaire : cas 1

Cours :
Combinaison linéaire

Exemples :
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.1

On a régulièrement besoin de savoir si un vecteur donné est combinaison linéaire d'autres vecteurs et de connaître les coefficients intervenant dans cette combinaison. Il peut se présenter plusieurs cas de figure : en voici un premier.

Soit $\vec{w} = (-1;5)$ un vecteur/couple de $\mathbb{R}^2$; peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs/couples $\vec{u} = (2;3)$ et $\vec{v} = (3;4)$?

Pour répondre à cette question, on cherche si il existe deux coefficients réels λ et μ tels que : $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Par équivalences, la question précédente se ramène à chercher si le système suivant admet des solutions :

$$(-1;5) = \lambda\,(2;3) + \mu\,(3;4) \iff \left\{\begin{array}{ll} -1 = 2\lambda + 3\mu & (1) \\ 5 = 3\lambda + 4\mu & (2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda = 19 & 3\times(2) - 4\times(1) \to (1) \\ \mu = -13 & 3\times(1) - 2\times(2) \to (2) \end{array}\right.$$

Ainsi, le système admet une solution unique, et le vecteur $\vec{w}$ est bien une combinaison

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ affectés des coefficients $\lambda = 19$ et $\mu = -13$:

$$\vec{w} = 19\,\vec{u} - 13\,\vec{v}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.2 Recherche de combinaison linéaire : cas 2

Cours :
Combinaison linéaire

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.1

Regardons un deuxième cas de figure qui peut se produire quand on cherche si un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs.

Soit $\vec{v} = (1;1;1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$; déterminons si $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1 = (1;-5;4)$, $\vec{u}_2 = (-3;2;1)$ et $\vec{u}_3 = (2;-4;2)$.

Pour cela, on cherche, par équivalences, si on peut trouver des coefficients λ_i conve-

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

nables pour une telle combinaison linéaire :

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 \iff (1;1;1) = \lambda_1(1;-5;4) + \lambda_2(-3;2;1) + \lambda_3(2;-4;2)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 1 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 1 \\ -5\,(3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 1) + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 1 \\ 4\,(3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 1) + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 1 \\ -13\lambda_2 + 6\lambda_3 = 6 \\ 13\lambda_2 - 6\lambda_3 = -3 \end{cases}$$

On voit que les deux dernières équations obtenues ne peuvent pas être vérifiées en même temps : les membres de gauche sont de signes opposés, tandis que le membre de droite de la seconde équation est, au signe près, le double du membre de droite de la troisième équation. Par conséquent, le système n'admet aucune solution, ce qui implique qu'il n'existe pas de coefficients convenables, soit encore, que le vecteur $\vec{v}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

Exemple A.3.2
Recherche de combinaison linéaire : cas 2

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.3 Recherche de combinaison linéaire : cas 3

Cours :
Combinaison linéaire

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2

Exercices :
Exercice B.3.1

Exposons finalement un troisième cas de figure observable quand on cherche à savoir si un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs.

Soit $\vec{u} = (1;2;1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$; est-ce une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i} = (0;1;1)$, $\vec{j} = (-3;2;5)$ et $\vec{k} = (1;-2;-3)$?

Comme dans les deux cas précédents, on raisonne par équivalences pour chercher

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

des coefficients α , β et γ possibles :

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \iff (1;2;1) = \alpha(0;1;1) + \beta(-3;2;5) + \gamma(1;-2;-3)$$

$$\iff \begin{cases} -3\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma = 2 \\ \alpha + 5\beta - 3\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma = 3\beta + 1 \\ \alpha + 2\beta - 2(3\beta + 1) = 2 \\ \alpha + 5\beta - 3(3\beta + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma = 3\beta + 1 \\ \alpha - 4\beta = 4 \\ \alpha - 4\beta = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma = 3\beta + 1 \\ \alpha = 4 + 4\beta \end{cases}$$

A l'avant-dernière étape, on a obtenu deux fois la même équation. Le système n'a alors plus que 2 équations pour toujours 3 inconnues : on dit qu'il possède 1 degré de liberté (car il y a 1 inconnue de plus que d'équations). Un tel système a une infinité de solutions, et on trouve une de ces solutions dès qu'on choisit la valeur d'une des inconnues (la valeur de β ici par exemple, afin d'en déduire très facilement les valeurs de α et γ).

Exemple A.3.3
Recherche de combinaison linéaire : cas 3

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement, on a trouvé que le vecteur $\vec{u}$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, et qu'il y a une infinité de coefficients qui conviennent.
Par exemple, si on choisit $\beta = 1$, alors on obtient $\alpha = 8$ et $\gamma = 4$:

$$\vec{u} = 8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

Ou encore, si on choisit $\beta = -1$, alors on obtient $\alpha = 0$ et $\gamma = -2$:

$$\vec{u} = -\vec{j} - 2\vec{k}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.4 Notation en ligne et notation en colonne

Cours :
Base

Exemples :
Exemple A.3.5

Exercices :
Exercice B.3.2
Exercice B.3.3

Si, dans un espace vectoriel E, on travaille tantôt par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, tantôt par rapport à une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, il faut faire mention explicite de la base par rappport à laquelle on donne les coordonnées des vecteurs quand on utilise la *notation en colonne* (notation où on range verticalement les coordonnées des vecteurs dans une colonne délimitée par de grandes parenthèses, par opposition à la *notation en ligne* où les coordonnées apparaissent comme les coefficients d'une combinaison linéaire).

Ainsi, si on veut utiliser la notation en colonne pour désigner le vecteur $\vec{u}$ dont la décomposition par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \qquad (\textit{notation en ligne})$$

on écrit la base $\mathcal{B}$ en indice des grandes parenthèses :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad (\textit{notation en colonne})$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

afin de rappeler que les coordonnées 3, -1 et 2 font référence aux vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ de la base $\mathcal{B}$.

En adoptant cette rigueur d'écriture, on ne peut pas confondre le vecteur $\vec{u}$ précédent avec le vecteur $\vec{v}$ dont la notation en colonne est :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Ce vecteur a les mêmes coordonnées que le vecteur $\vec{u}$ mais pas par rapport à la même base. Il est donc distinct de $\vec{u}$ puisqu'il dépend des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ qui sont, a priori, différents des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Notons ici le cas particulier des vecteurs constitutifs d'une base : quelle est la notation en colonne du vecteur $\vec{i}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$? C'est à dire, quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{i}$ par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$?

Pour répondre à cette question, il suffit de remarquer que la notation en ligne du vecteur $\vec{i}$ est :

$$\vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

Par conséquent, ses coordonnées sont 1, 0 et 0, d'où l'écriture en colonne :

$$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exemple A.3.4
Notation en ligne et notation en colonne

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

De la même façon, on a :

$$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ \vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ \vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'},\ \vec{e}_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\ \text{et}\ \vec{e}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Exemple A.3.4
Notation en ligne et notation en colonne

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.5 Coordonnées d'un vecteur par rapport à une nouvelle base

Cours :
Base

Exemples :
Exemple A.3.4

Exercices :
Exercice B.3.2
Exercice B.3.3

Quand on travaille dans un espace vectoriel muni de plusieurs bases, on est parfois amené à opérer des changements de base, c'est à dire à obtenir l'écriture de données ou de résultats par rapport à une certaine base alors qu'on dispose de leur écriture par rapport à une autre base. On va voir ici, en particulier, comment obtenir les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base quand on les connait par rapport à une autre base.

Typiquement, soit E un espace vectoriel dans lequel on connait les bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2)$, et les coordonnées des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Cherchons les coordonnées x et y par rapport à la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Pour cela, partons de l'écriture en colonne du vecteur $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$, et, en raisonnant par équivalences, faisons apparaître que les coordonnées x et y sont

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

les solutions d'un système d'équations (c'est la même méthode que celle employée pour déterminer si un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs) :

$$\begin{aligned}
\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} &\iff \vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} 3x+2y=-1 & (1) \\ 4x+3y=4 & (2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x=-11 & 3\times(1)-2\times(2)\to(2) \\ y=16 & 3\times(2)-4\times(1)\to(1) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, par rapport à la base $\mathcal{B}'$, le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées : $\vec{w}\begin{pmatrix} -11 \\ 16 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Exemple A.3.5
Coordonnées d'un vecteur par rapport à une nouvelle base

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.6 Base et déterminant en dimension 2

Cours :
Determinant en dimensions 2 et 3

Exemples :
Exemple A.3.7

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j})$ (donc de dimension 2), pour savoir si les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ forment une base de E, il suffit de calculer leur déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1;\vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\times 3 - 4\times 2 = 7 \neq 0$$

Le déterminant est non-nul, donc les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ forment une base de E.

On dit qu'on calcule le déterminant *par rapport à la base* $\mathcal{B}$ car on utilise les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans le calcul. En particulier, on voit que le déterminant de ces deux vecteurs par rapport à une autre base ne sera pas le même en général (mais il restera non-nul).

En particulier, sachant maintenant que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base, on peut recalculer le déterminant de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ mais par rapport à la base $\mathcal{B}'$. Pour cela, rappelons que les coordonnées de ces vecteurs par rapport à la base $\mathcal{B}'$ sont tout simplement :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \text{ et } \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et donc leur déterminant par rapport à $\mathcal{B}'$ est :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}'}(\vec{e}_1;\vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 0\times 0 = 1 \neq 0$$

Exemple A.3.7 Calcul du déterminant en dimension 3

Cours :
Determinant en dimensions 2 et 3

Exemples :
Exemple A.3.6

Exercices :
Exercice B.3.5

Pour retenir facilement la façon de calculer un déterminant en dimension 3, on procède comme suit : on affecte aux coefficients de la première colonne les signes respectifs (verticalement de haut en bas) $+$, $-$ et $+$ (*étape 1*) ; on multiplie chaque coefficient de la première colonne affecté de son signe au déterminant d'ordre 2 obtenu en barrant la ligne et la colonne qui le contenait et on additionne les 3 produits ainsi obtenus (*étape 2*) ; enfin, on calcule les déterminants d'ordre 2 qu'on a fait apparaître et on termine le calcul (*étape 3*).

Appliquons cette règle pour déterminer si les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ d'un espace vectoriel E de dimension 3 et muni d'une base $\mathcal{B}$ en forment une base.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.7 Calcul du déterminant en dimension 3

Appelons D le déterminant : $D = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$; on a :

$$D = \begin{vmatrix} {}^{+}1 & 1 & 0 \\ {}^{-}1 & 1 & 1 \\ {}^{+}2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\textit{étape 1})$$

Puis :

$$D = ({}^{+}1) \times \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & 1 & 1 \\ \cancel{2} & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad +({}^{-}1) \times \begin{vmatrix} \cancel{1} & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad +({}^{+}2) \times \begin{vmatrix} \cancel{1} & 1 & 0 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (\textit{étape 2})$$

Et finalement :

$$D = 1 \times 1 - 1 \times 2 + 2 \times 1 = 1 \neq 0 \qquad (\textit{étape 3})$$

Le déterminant est non-nul, donc les vecteurs proposés forment une base de E.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.4 Exemples du chapitre IV

Exemple A.4.1 Droite vectorielle

Cours :
Droite vectorielle

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère la droite vectorielle $\mathcal{D}$ de vecteur directeur (on dit aussi *engendrée par*) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Les vecteurs appartenant à cette droite $\mathcal{D}$ sont les *vecteurs colinéaires* au vecteur $\vec{u}$, c'est à dire les vecteurs aux coordonnées proportionnelles à celles du vecteur $\vec{u}$.

Ainsi, le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathcal{D}$, puisque $\vec{v} = -3\vec{u}$.

Par contre, le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$ car ses coordonnées ne sont pas proportionnelles à celles de $\vec{u}$ (la première et la troisième coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont le double de celles du vecteur $\vec{u}$, ce qui n'est pas le cas avec la seconde coordonnée).

Remarquons que le vecteur nul $\vec{0}$ appartient à cette droite $\mathcal{D}$ (comme à n'importe quelle autre droite vectorielle), puisqu'il est colinéaire à $\vec{u}$ (comme à n'importe quel autre vecteur).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.2 Plan vectoriel

Cours :
Plan vectoriel

Exercices :
Exercice B.4.1

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le plan vectoriel $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs (on dit aussi *engendré par*) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Les vecteurs appartenant à ce plan $\mathcal{P}$ sont les vecteurs qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathcal{P}$:

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \iff \begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda + \mu = 7\\ \lambda = 3\\ \mu = 4\end{cases}$$

La première équation est compatible avec les deux suivantes, donc le système admet une solution unique, et on a :

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v} \text{ d'où } \vec{w} \in \mathcal{P}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.3 Equation cartésienne de plan vectoriel

Cours :
Equation cartésienne de plan

Exercices :
Exercice B.4.3

Déterminer une équation cartésienne de plan vectoriel (en dimension 3), c'est trouver une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ où a, b et c sont des coefficients réels (certains peuvent être nuls), et où x, y et z sont les coordonnées d'un vecteur quelconque du plan.

Le raisonnement pour obtenir une telle équation à partir de 2 vecteurs directeurs du plan est toujours le même : dans un espace E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cherchons une équation cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Pour cela, on raisonne par équivalences, en utilisant les propriétés du

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

déterminant en dimension 3 :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P} \iff \vec{w}\,,\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$

$$\iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{w};\vec{u};\vec{v}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2x - 5y + 3z = 0$$

Le plan $\mathcal{P}$ admet donc $2x - 5y + 3z = 0$ comme équation cartésienne par rapport à la base $\mathcal{B}$ (on précise *par rapport à la base* $\mathcal{B}$ car le raisonnement et les calculs faits portent sur les coordonnées des vecteurs par rapport à cette base, et ils auraient été différents si on avait travaillé par rapport à une autre base). **On peut vérifier aisément le résultat obtenu en s'assurant que les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ satisfont cette équation.**

Exemple A.4.3
Equation cartésienne de plan vectoriel

Exemple A.4.4 Système d'équations cartésiennes de droite vectorielle

Cours :
Système d'équations cartésiennes de droite

Exercices :
Exercice B.4.4

Déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite vectorielle (en dimension 3), c'est trouver un système de la forme $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$ où a, a', b, b', c et c' sont des coefficients réels (certains peuvent être nuls), où les équations ne sont pas proportionnelles et où x, y et z sont les coordonnées d'un vecteur quelconque de la droite.

Chacune des 2 équations du système représente un plan vectoriel, et la droite n'est autre que l'intersection de ces deux plans. Ainsi, pour obtenir un tel système quand on connait un vecteur directeur de la droite, on peut chercher les équations cartésiennes de deux plans distincts contenant cette droite : dans un espace E muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, cherchons un système d'équations cartésiennes, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de la droite vectorielle $\mathcal{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Pour cela, on va déterminer les équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}_1$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$, et $\mathcal{P}_2$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{j}$: ces 2 plans sont distincts car les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{u}$ ne

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

sont pas coplanaires, et ils se coupent suivant la droite $\mathcal{D}$ car ils contiennent tous les deux le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

– Equation cartésienne de $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P}_1 &\Longleftrightarrow \vec{v}\,, \vec{u} \text{ et } \vec{i} \text{ sont coplanaires} \\
&\Longleftrightarrow \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{v};\vec{u};\vec{i}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longleftrightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 3y - 2z = 0
\end{aligned}$$

Exemple A.4.4
Système d'équations cartésiennes de droite vectorielle

– Equation cartésienne de $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P}_2 &\iff \vec{v}\,, \vec{u} \text{ et } \vec{j} \text{ sont coplanaires} \\
&\iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{v};\vec{u};\vec{j}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff -3x + z = 0
\end{aligned}$$

Les équations obtenues ne sont pas proportionnelles, donc la droite $\mathcal{D}$ admet $\begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$ comme système d'équations cartésiennes par rapport à la base $\mathcal{B}$.
On peut vérifier aisément le résultat obtenu en s'assurant que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ satisfont ce système d'équations.
On aurait pu choisir d'autres vecteurs que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour construire des plans se coupant suivant la droite $\mathcal{D}$, et on aurait alors obtenu un système différent mais représentant toujours la droite $\mathcal{D}$.

Exemple A.4.4
Système d'équations cartésiennes de droite vectorielle

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.5 Exemples sur la résolution des systèmes

Exemple A.5.1 Forme d'un système d'équations linéaires

Documents :
Document C.1.2

Tous les systèmes d'équations ne sont pas des systèmes d'équations linéaires. En effet, les systèmes suivants en sont :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l}3x+y-4z=8\\-x+9y+2z=0\\x+y+z=-5\end{array}\right.\qquad(S_2)\left\{\begin{array}{l}x+2=y-3z\\x-t=9\end{array}\right.\qquad(S_3)\left\{\begin{array}{l}y_1-y_2=5\\7y_2-3y_1=1\\2y_1+y_2=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Tandis que ceux qui suivent ne sont pas des systèmes d'équations *linéaires*, car ils ne peuvent pas se mettre sous la forme donnée dans la partie cours :

$$(S_4)\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\2xy=4\sqrt{3}\\x^2+y^2=7\end{array}\right.\qquad(S_5)\left\{\begin{array}{l}x+2y=4\\e^x+e^y=15\end{array}\right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.2 Résolution par substitution

Documents :
Document C.1.3

Exercices :
Exercice B.5.1

Appliquons la méthode de substitution pour résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-5z=4 \\ 3x-y+2z=-3 \\ 9x+y-z=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} y=3x+2z+3 & (2)\to(1) \\ 2x+9x+6z+9-5z=4 & (1)\to(2) \\ 9x+3x+2z+3-z=1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=3x+2z+3 \\ 11x+z=-5 \\ 12x+z=-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=3x+2z+3 \\ z=-5-11x \\ 12x-5-11x=-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=-64 \\ z=-38 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.3 Résolution par combinaison

Documents :
Document C.1.5

Exercices :
Exercice B.5.2

Résolvons le sytème suivant par combinaison :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+7z=2 \\ 2x+4y+3z=1 \\ 3x+12y+4z=-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -11y+z=0 \qquad (1)-2\,(2)\to(1) \\ 2x+4y+3z=1 \\ 3x+12y+4z=-1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -11y+z=0 \\ 2x+4y+3z=1 \\ -12y+z=5 \qquad 3\,(2)-2\,(3)\to(3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -11y+z=0 \\ 2x+4y+3z=1 \\ -y=5 \qquad (3)-(1)\to(3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} z=-55 \\ x=93 \\ y=-5 \end{array}\right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4 Suppression d'une équation

Documents :
Document C.1.7

Voyons un exemple de résolution au cours de laquelle le système "perd" une équation :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+3z=4 \\ x-3y+2z=7 \\ 2x+y+z=-3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x=3y-2z+7 & (2)\to(1) \\ 9y-6z+21-2y+3z=4 & (1)\to(2) \\ 6y-4z+14+y+z=-3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x=3y-2z+7 & \\ 7y-3z=-17 & \\ 7y-3z=-17 & \text{(superflue)} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{-1}{3}(5y+13) \\ z=\frac{1}{3}(7y+17) \end{array}\right.$$

Les résolutions de systèmes d'équations linéaires demandent une certaine concentration, car les étapes de calculs peuvent être nombreuses et donc sources d'autant d'erreurs. On aura donc toujours à l'esprit les deux remarques suivantes :

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

- Il se peut qu'après une substitution ou une combinaison, on obtienne une équation du type "$3x-5x+2x=0$". Attention alors à ne pas conclure trop rapidement en disant "$x=0$". En effet, l'équation est équivalente à "$0x=0$" dont tous les nombres réels sont solution. Dans un tel cas, on a obtenu une équation toujours vraie, qu'on peut éliminer du système.
- L'intérêt du raisonnement par équivalences est qu'il n'est pas nécessaire d'un point de vue logique de vérifier que les valeurs obtenues sont bien solutions du système initial, cependant, les erreurs de calcul sont toujours possibles, et il est donc vivement recommandé de faire une vérification rapide au brouillon.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

B.1 Exercices de l'avant-propos

Exercice B.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exercice B.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exercice B.1.1" de l'exemple A.1.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.2 Exercices du chapitre II

Exercice B.2.1 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

Cours :
Triplets

Exemples :
Exemple A.2.1

On considère le sous-ensemble $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ qui contient tous les triplets dont la somme des composantes est nulle. Cet ensemble se note formellement :

$$\mathcal{P} = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$$

Utilisons la notation vectorielle pour nommer les triplets. Ainsi, on considère les triplets/vecteurs : $\vec{u} = (3; -1; -2)$, $\vec{v} = (-5; 7; -2)$ et $\vec{w} = (1; 4; -7)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?

$\vec{u}$	oui	non
$\vec{v}$	oui	non
$\vec{w}$	oui	non

2. Même question avec le vecteur $\vec{e}_1 = 3\vec{u} - 5\vec{v}$ et le vecteur $\vec{e}_2 = -\vec{u} + 2\vec{v}$.

$\vec{e}_1$	oui	non
$\vec{e}_2$	oui	non

3. Plus généralement, on considère deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ **quelconques mais dont on sait qu'ils appartiennent à** $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.1
Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

a) Montrer que le vecteur somme $\vec{s} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ appartient encore à $\mathcal{P}$. (On dit que $\mathcal{P}$ est *stable par addition*). Solution

b) Montrer que, quel que soit le nombre réel λ, le vecteur $\vec{p} = \lambda \vec{u}_1$ appartient encore à $\mathcal{P}$. (On dit que $\mathcal{P}$ est *stable par multiplication externe*). Solution

Exercice B.2.2 Sous-ensemble instable de $\mathbb{R}^2$

Cours :
Espace vectoriel

On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ qui se note formellement :

$$\mathcal{E} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \times y = 0\}$$

1. Traduire, dans un français clair et précis, la définition formelle donnée ci-dessus de l'ensemble $\mathcal{E}$. Solution
2. Donner 2 vecteurs/couples de $\mathcal{E}$ dont la somme n'appartient pas à $\mathcal{E}$. (On dit que $\mathcal{E}$ n'est pas *stable par addition*). Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.3 Exercices du chapitre III

Exercice B.3.1 Recherche de combinaisons linéaires

Cours :
Combinaison linéaire

Exemples :
Exemple A.3.1
Exemple A.3.2
Exemple A.3.3

Documents :
Document C.1.1

Remarque préliminaire : on rappelle que les lecteurs peu à l'aise avec la résolution de systèmes d'équations linéaires trouveront dans la partie "Documents" une aide précieuse sur le sujet. Cette aide est accessible soit par le menu de navigation, soit par le renvoi ci-dessus.

Préciser, dans chacun des cas suivants, si le vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$.

a) $\vec{v} = (13; -19; 6)$, $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$ et $\vec{u}_2 = (-2; 1; 1)$

Réponse

b) $\vec{v} = (9; -4; -1)$, $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$, $\vec{u}_2 = (-2; 1; 1)$ et $\vec{u}_3 = (3; 0; -1)$

Réponse

c) $\vec{v} = (0; 1; 1)$, $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$, $\vec{u}_2 = (-2; 1; 1)$ et $\vec{u}_3 = (-4; -3; 7)$

Réponse

d) $\vec{v} = (1; 0; -1)$, $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$, $\vec{u}_2 = (-2; 1; 1)$ et $\vec{u}_3 = (-4; -3; 7)$

Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.2 Ecritures de coordonnées en ligne et en colonne

Cours :
Base

Exemples :
Exemple A.3.4
Exemple A.3.5

Exercices :
Exercice B.3.3

On considère un espace vectoriel E muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v})$.

1. Donner l'écriture en colonne des vecteurs $\vec{w}_1 = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{w}_2 = 3\vec{u} - 5\vec{v}$.
   Réponse
2. Donner l'écriture en ligne des vecteurs $\vec{w}_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{w}_4 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.
   Réponse
3. On dispose maintenant des écritures en colonne suivantes pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
   Donner l'écriture en ligne, par rapport aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, des vecteurs $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_4$.
   Réponse

Exercice B.3.3 Coordonnées de vecteur et changement de base

Cours :
Base

Exemples :
Exemple A.3.4
Exemple A.3.5

Exercices :
Exercice B.3.2

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$. On donne les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, et d'un vecteur $\vec{w}$ de E :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$. Réponse
2. Même question avec le vecteur $\vec{i}$. Réponse
3. Même question avec le vecteur $\vec{e}_1$. Réponse
4. Déterminer les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, du vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$. Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.4 Base et dimension

Cours :
Dimension

On considère l'espace vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, et les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ dont on donne les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E ?

   $\dim E = 1$ $\quad$ $\dim E = 2$ $\quad$ $\dim E = 3$ $\quad$ $\dim E = 4$

2. La famille $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$ est-elle une base de l'espace vectoriel E ?

   oui $\quad$ non

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.5 Base et déterminant

Cours :
Determinant en dimensions 2 et 3

Exemples :
Exemple A.3.6
Exemple A.3.7

On considère un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant des vecteurs proposés et préciser si ils forment une base de E .

1. $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

   Réponse

2. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{u}_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

   Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.4 Exercices du chapitre IV

Exercice B.4.1 Droites et plans vectoriels

Cours :
Droite vectorielle
Plan vectoriel

Exemples :
Exemple A.4.1
Exemple A.4.2

On se place dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, et on appelle $\mathcal{D}$ la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e}_1$, et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. On note enfin $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{w} \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? Réponse
2. Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Réponse
3. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? Réponse
4. Le vecteur $\vec{v}$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Réponse
5. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? Réponse
6. Le vecteur $\vec{w}$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.2 Déterminant et vecteurs liés

Cours :
Vecteurs liés

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{t}\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? Réponse
2. Le vecteur $\vec{t}$ appartient-il au plan vectoriel engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.3 Recherche d'équation cartésienne de plan

Cours :
Equation cartésienne de plan

Exemples :
Exemple A.4.3

Exercices :
Exercice B.4.4

Dans l'espace vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Déterminer une équation cartésienne, par rapport à la base $\mathcal{B}$, du plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Réponse
2. Le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Réponse
3. Donner 2 vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ (autres que $\vec{u}$ et $\vec{v}$) qui forment une base de $\mathcal{P}$, c'est à dire qui forment un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$. Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.4 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans

Cours :
Equation cartésienne de plan
Système d'équations cartésiennes de droite

Exemples :
Exemple A.4.4

On se place dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Préciser, dans chacun des cas suivants, si l'ensemble F_i caractérisé par la ou les équations données est une droite vectorielle, un plan vectoriel ou ni l'un, ni l'autre, et donner, le cas échéant, un vecteur directeur ou un couple de vecteurs directeurs.

1. Ensemble F_1 caractérisé par : $3x + y - 5z = 0$ Réponse
2. Ensemble F_2 caractérisé par : $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$ Réponse
3. Ensemble F_3 caractérisé par : $5x - y = 0$ Réponse
4. Ensemble F_4 caractérisé par : $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + 10z = 0 \end{cases}$ Réponse
5. Ensemble F_5 caractérisé par : $-4x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$ Réponse
6. Ensemble F_6 caractérisé par : $\begin{cases} y = 0 \\ 8x - z = 0 \end{cases}$ Réponse

7. Ensemble F_7 caractérisé par : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+3z=0 \end{array}\right.$ Réponse

B.5 Exercices sur la résolution des systèmes

Exercice B.5.1 Résolution par substitution

Documents :
Document C.1.3

Exemples :
Exemple A.5.2

Résoudre le système suivant par substitution : $\begin{cases} x + 4y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.2 Résolution par combinaison

Documents :
Document C.1.5

Exemples :
Exemple A.5.3

Résoudre le système suivant par combinaison : $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y - 5z = -15 \\ 5x - 3y - 4z = 6 \\ -7x + 3y + 7z = -2 \end{array} \right.$

Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.3 Résolutions de systèmes

Documents :
Document C.1.8

Résoudre les systèmes suivants, en précisant, s'il y a lieu, les nombres de degrés de liberté.

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} 5x+6y=7 \\ 9x+11y=10 \end{array} \right.$$ Réponse

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} 3x-2y-3z=-1 \\ -2x+3y+z=-3 \\ 5x+5y-2z=-4 \end{array} \right.$$ Réponse

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z+3t=2 \\ x-2y+4z-t=1 \\ 4x-3y+7z+t=4 \\ 3x+4y-6z+7t=3 \end{array} \right.$$ Réponse

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} 3x-y-4z=1 \\ -2x+5y+z=1 \\ -x+y+z=1 \\ 2x-4y+7z=-118 \end{array} \right.$$ Réponse

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} 4x+11y-3z=1 \\ 5x+3y-7z=2 \\ -3x+4y+6z=3 \end{array} \right.$$ Réponse

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y=6 \\ 4x+3y=1 \\ 5x+4y=-2 \end{array} \right.$$ Réponse

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Résolution des systèmes d'équations linéaires

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Objectif

L'objectif de ce document est de rappeler les deux principales méthodes de résolution de systèmes en insistant sur les avantages et les inconvénients de chacune afin de mettre en évidence les situations dans lesquelles l'une est à privilégier par rapport à l'autre. On s'attarde aussi sur la présentation qu'on doit faire de ce type de résolution et sur les systèmes singuliers qui ne possèdent pas une solution unique.

Le lecteur peu à l'aise avec la résolution de ce type de systèmes est vivement encouragé à lire attentivement les pages suivantes et à chercher les exercices proposés avant d'aborder les premières notions d'algèbre linéaire, car celles-ci conduiront très souvent à des résolutions de systèmes d'équations linéaires.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Forme d'un système d'équations linéaires

Exemples :
Exemple A.5.1

Un système d'équations linéaires est un système qui peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

où x_1 , x_2 , ... , x_p sont les inconnues et où a_{ij} et b_i sont des coefficients réels.

Bien qu'on rencontre surtout des systèmes ayant autant d'inconnues que d'équations, on voit qu'un système d'équations linéaires peut comporter n équations et p inconnues, avec $p \neq n$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Résolution par substitution

Exemples :
Exemple A.5.2

Exercices :
Exercice B.5.1

On dit qu'on résout un système par *substitution*, ou encore qu'on effectue une substitution d'une des inconnues, lorsqu'à l'aide d'une équation, on exprime une des inconnues en fonction des autres et qu'on remplace cette inconnue par son expression dans les autres équations.

Document C.1.4 Pratique de la méthode de résolution par substitution

Pour diminuer le risque d'erreur dans une résolution par substitution, on sera attentif aux remarques suivantes :

- Il faut éviter d'effectuer plusieurs substitutions simultanément car on risque alors de "tourner en rond".
- En général, on substitue l'inconnue choisie par son expression dans toutes les équations qui n'ont pas déjà servi à obtenir l'expression d'une autre inconnue.
- Pour éviter de faire apparaître des fractions, on choisit de substituer une inconnue affectée d'un coefficient 1 ou -1 dans une des équations (quand c'est possible). **La méthode de résolution par substitution est en particulier à préférer à la méthode par combinaison lorsque certaines inconnues ont pour coefficient 1 ou -1.**

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Résolution par combinaison

Exemples :
Exemple A.5.3

Exercices :
Exercice B.5.2

On dit qu'on effectue une *combinaison d'équations* lorsqu'on ajoute ou soustrait des équations après les avoir éventuellement multipliées par des coefficients. On utilise cette technique dans la résolution d'un système quand on trouve une combinaison qui aboutit à une équation où au moins une des inconnues a été éliminée.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.6 Pratique de la méthode de résolution par combinaison

Pour éviter les calculs fastidieux lors d'une résolution par combinaison, il faut s'efforcer de déterminer, parmi les combinaisons faisant disparaître une des inconnues, les plus simples possibles. De manière générale, on sera attentif aux remarques suivantes :

- Il est souvent préférable de n'effectuer qu'une (ou deux) combinaison(s) par étape, et d'essayer de faire disparaître une même inconnue d'un maximum d'équations.
- On privilégie la méthode par combinaison quand les coefficients devant les inconnues sont tous élevés.
- Lors d'une même résolution, on peut bien sûr utiliser alternativement les deux méthodes.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.7 Résolution par équivalences

Exemples :
Exemple A.5.2
Exemple A.5.3
Exemple A.5.4

La résolution de systèmes d'équations linéaires est un raisonnement par équivalences : c'est ce qui nous assure que les valeurs obtenues sont bien toutes les solutions, et les seules, du système initial.

Par conséquent, il est impératif de suivre certaines règles :

- Deux systèmes équivalents ont le même nombre d'équations : même si on ne transforme qu'une équation, il faut réécrire celles qui n'ont pas été utilisées (cf. exemple A.5.2) . En particulier, si on combine plusieurs équations pour en obtenir une nouvelle, il faut réécrire toutes les équations utilisées dans la combinaison, sauf une au choix (cf. exemple A.5.3).
- Cependant, on peut éliminer une équation dans l'un des 3 cas suivants :
  1. si l'équation est toujours vraie ; par exemple "$0 = 0$" ;
  2. si l'équation apparaît deux fois dans le système (cf. exemple A.5.4) ;
  3. ou plus généralement, si l'équation est proportionnelle à une autre équation du système.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.8 Systèmes singuliers

Exemples :
Exemple A.5.4

Exercices :
Exercice B.5.3

Un système d'équations linéaires ne contient pas forcément autant d'inconnues que d'équations. Et même si, le plus souvent, on est confronté à des systèmes $n \times n$ (n équations et n inconnues) ayant une solution unique, tous les autres cas (nombres d'équations et d'inconnues différents, aucune solution...) sont possibles et se traitent avec les mêmes méthodes.

En particulier,

- un système n'a aucune solution quand, au cours de sa résolution, on obtient une équation impossible (du type "$3 = 0$") ou deux équations incompatibles (par exemple "$2x - 3y = 7$" et "$-4x + 6y = 8$") ;
- un système a une infinité de solutions quand, après l'avoir simplifié au maximum, il possède plus d'inconnues que d'équations. Si il y a d inconnues de plus que d'équations, alors on peut choisir d inconnues et exprimer toutes les autres uniquement en fonction de ces d inconnues (cf. exemple A.5.4). On dit que le système possède d *degrés de liberté* : en effet, pour donner une solution particulière du système, on peut choisir les valeurs de d des inconnues et les autres seront automatiquement déterminées.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Solution des exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.1 Mise en garde

Attention, les pages qui suivent ne sont pas censées être lues de manière linéaire : elles n'ont un sens que si on y accède depuis la page contenant l'énoncé de l'exercice auquel elles font référence, et après avoir cherché cet exercice.

Document C.2.2 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (1)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est correcte.
En effet, la somme des composantes de ce triplet/vecteur est égale à 0, ce qui caractérise les éléments appartenant à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.3 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (2)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est fausse.
En effet, un triplet/vecteur appartient à l'ensemble $\mathcal{P}$ si la somme de ses composantes est nulle. Or c'est bien le cas pour $\vec{u} = (3; -1; -2)$, puisque :

$$3 + (-1) + (-2) = 0$$

Document C.2.4 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (3)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est fausse.
En effet, un triplet/vecteur appartient à l'ensemble $\mathcal{P}$ si la somme de ses composantes est nulle. Or c'est bien le cas pour $\vec{v} = (-5; 7; -2)$, puisque :

$$(-5) + 7 + (-2) = 0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.5 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (4)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est fausse.
En effet, un triplet/vecteur appartient à l'ensemble $\mathcal{P}$ si la somme de ses composantes est nulle. Or ce n'est pas le cas pour $\vec{w} = (1; 4; -7)$, puisque :

$$1 + 4 + (-7) = -2 \neq 0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.6 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (5)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est correcte.
En effet, la somme des composantes de ce triplet/vecteur n'est pas égale à 0 : il n'appartient donc pas à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Document C.2.7 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (6)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est correcte.
En effet, le triplet/vecteur $\vec{e}_1$ est égal à :

$$\vec{e}_1 = (34; -38; 4)$$

Or, la somme des composantes de ce triplet/vecteur est bien égale à 0 : il appartient donc à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.8 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (7)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est fausse.
En effet, le triplet/vecteur $\vec{e}_1$ est égal à :

$$\vec{e}_1 = (34; -38; 4)$$

Or, la somme des composantes de ce triplet/vecteur est égale à 0 : il appartient donc bien à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.9 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (8)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est correcte.
En effet, le triplet/vecteur $\vec{e}_2$ est égal à :

$$\vec{e}_2 = (-13; 15; -2)$$

Or, la somme des composantes de ce triplet/vecteur est bien égale à 0 : il appartient donc à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Document C.2.10 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (9)

Exercices :
Exercice B.2.1

Votre réponse est fausse.
En effet, le triplet/vecteur $\vec{e}_2$ est égal à :

$$\vec{e}_2 = (-13; 15; -2)$$

Or, la somme des composantes de ce triplet/vecteur est égale à 0 : il appartient donc bien à l'ensemble $\mathcal{P}$.

Document C.2.11 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (10)

Exercices :
Exercice B.2.1

Par définition, le triplet/vecteur $\vec{s} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ appartient à $\mathcal{P}$ si la somme de ses composantes est nulle, c'est à dire si :

$$x_1 + x_2 \ + \ y_1 + y_2 \ + \ z_1 + z_2 = 0$$

Or on peut réorganiser la somme du membre de gauche de la façon suivante :

$$x_1 + x_2 \ + \ y_1 + y_2 \ + \ z_1 + z_2 = x_1 + y_1 + z_1 \ + \ x_2 + y_2 + z_2$$

De plus, comme on a pris des triplets/vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartenant à $\mathcal{P}$, on sait que les sommes $x_1 + y_1 + z_1$ et $x_2 + y_2 + z_2$ sont nécessairement nulles. Par conséquent :

$$x_1 + x_2 \ + \ y_1 + y_2 \ + \ z_1 + z_2 = x_1 + y_1 + z_1 \ + \ x_2 + y_2 + z_2 = 0 + 0 = 0$$

Ainsi, $\vec{s}$ appartient forcément à $\mathcal{P}$: on dit que $\mathcal{P}$ est stable par addition, car la somme de deux éléments de $\mathcal{P}$ est toujours un élément de $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.12 Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ (11)

Exercices :
Exercice B.2.1

Par définition, le triplet/vecteur $\vec{p} = (\lambda x_1 ; \lambda y_1 ; \lambda z_1)$ appartient à $\mathcal{P}$ si la somme de ses composantes est nulle, c'est à dire si :

$$\lambda x_1 \ + \ \lambda y_1 \ + \ \lambda z_1 = 0$$

Or on peut factoriser par λ dans la somme du membre de gauche :

$$\lambda x_1 \ + \ \lambda y_1 \ + \ \lambda z_1 = \lambda \left(x_1 + y_1 + z_1 \right)$$

De plus, comme on a pris un triplet/vecteur $\vec{u}_1$ appartenant à $\mathcal{P}$, on sait que la somme $x_1 + y_1 + z_1$ est nécessairement nulle. Par conséquent :

$$\lambda x_1 \ + \ \lambda y_1 \ + \ \lambda z_1 = \lambda \left(x_1 + y_1 + z_1 \right) = \lambda \times 0 = 0$$

Ainsi, $\vec{p}$ appartient forcément à $\mathcal{P}$: on dit que $\mathcal{P}$ est stable par multiplication externe, car le résultat du produit d'un élément de $\mathcal{P}$ avec un nombre réel est toujours un élément de $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.13 Sous-ensemble instable de $\mathbb{R}^2$ (1)

Exercices :
Exercice B.2.2

L'écriture symbolique $\mathcal{E} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \times y = 0\}$ signifie : *$\mathcal{E}$ est l'ensemble des couples de la forme $(x;y)$ où x et y sont des nombres réels dont le produit est nul.*

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble contenant tous les couples de nombres réels avec au moins une des composantes nulle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.14 Sous-ensemble instable de $\mathbb{R}^2$ (2)

Exercices :
Exercice B.2.2

On a vu à la question précédente que les éléments de $\mathcal{E}$ étaient des couples de nombres réels avec au moins une composante nulle. Par exemple : $\vec{u} = (1;0)$ et $\vec{v} = (0;3)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

Cependant leur somme $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (1;0) + (0;3) = (1;3)$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$, car le produit de ses composantes n'est pas nul.

Ainsi, $\mathcal{E}$ n'est pas stable par addition, puisque la somme de deux éléments de $\mathcal{E}$ n'est pas forcément un élément de $\mathcal{E}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.15 Recherche de combinaisons linéaires (1)

Exercices :
Exercice B.3.1

Supposons qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 13 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = -19 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2\lambda_2 + 13 \\ -3\,(2\lambda_2 + 13) + \lambda_2 = -19 \\ 2\,(2\lambda_2 + 13) + \lambda_2 = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_2 = -4 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $\vec{v} = 5\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$,
et c'est la seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ permettant d'obtenir $\vec{v}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.16 Recherche de combinaisons linéaires (2)

Exercices :
Exercice B.3.1

Supposons qu'il existe trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 9 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 - 2\,(3\lambda_1 - 4) + 3\lambda_3 = 9 \\ \lambda_2 = 3\lambda_1 - 4 \\ 2\lambda_1 + (3\lambda_1 - 4) - \lambda_3 = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$: $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$,
et c'est la seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ permettant d'obtenir $\vec{v}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.17 Recherche de combinaisons linéaires (3)

Exercices :
Exercice B.3.1

Supposons qu'il existe trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -3\,(2\lambda_2 + 4\lambda_3) + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 1 \\ 2\,(2\lambda_2 + 4\lambda_3) + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -5\lambda_2 - 15\lambda_3 = 1 \\ 5\lambda_2 + 15\lambda_3 = 1 \end{array}\right.$$

Ce dernier système n'a aucune solution, car les deux dernières équations ne peuvent pas être satisfaites pour des mêmes valeurs de λ_1 , λ_2 et λ_3 .
Cela signifie que la supposition faite au début de raisonnement n'était pas fondée : on ne peut pas trouver trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$.

Autrement dit, $\vec{v}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.18 Recherche de combinaisons linéaires (4)

Exercices :
Exercice B.3.1

Supposons qu'il existe trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 1\\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 - 2\,(3\lambda_1 + 3\lambda_3) - 4\lambda_3 = 1\\ \lambda_2 = 3\lambda_1 + 3\lambda_3\\ 2\lambda_1 + (3\lambda_1 + 3\lambda_3) + 7\lambda_3 = -1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}-5\lambda_1 - 10\lambda_3 = 1\\ \lambda_2 = 3\lambda_1 + 3\lambda_3\\ 5\lambda_1 + 10\lambda_3 = -1\end{array}\right.$$

Dans ce dernier système, on remarque que les première et troisième équations sont équivalentes. On peut donc en supprimer une pour obtenir :

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = 3\lambda_1 + 3\lambda_3\\ 5\lambda_1 + 10\lambda_3 = -1\end{array}\right.$$

Ce système a 1 degré de liberté et donc une infinité de solutions. Par conséquent, $\vec{v}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ d'une infinité de façons différentes.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple :

$$\vec{v} = \frac{-1}{5}\vec{u}_1 - \frac{3}{5}\vec{u}_2 \text{ ou encore } \vec{v} = 2\vec{u}_1 + \frac{27}{10}\vec{u}_2 - \frac{11}{10}\vec{u}_3$$

Document C.2.19 Ecritures de coordonnées en ligne et en colonne (1)

Exercices :
Exercice B.3.2

Les vecteurs $\vec{w}_1 = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{w}_2 = 3\vec{u} - 5\vec{v}$ ne sont pas exprimés par rapport aux vecteurs d'une même base. Le vecteur $\vec{w}_1$ est décomposé suivant les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, tandis que $\vec{w}_2$ l'est par rapport à ceux de la base $\mathcal{B}'$. Ainsi, leurs écritures en colonne sont :

$$\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{w}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

On voit bien ici l'importance de préciser la base à laquelle les coordonnées se rapportent : si on ne le faisait pas, on ne pourrait pas distinguer $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ qui ne sont pourtant pas égaux.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.20 Ecritures de coordonnées en ligne et en colonne (2)

Exercices :
Exercice B.3.2

Les coordonnées des vecteurs $\vec{w}_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{w}_4 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ ne font pas référence à une même base : $\vec{w}_3$ est implicitement décomposé suivant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de $\mathcal{B}$, tandis que $\vec{w}_4$ l'est par rapport aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{B}'$. Ainsi, leurs écritures en ligne sont :

$$\vec{w}_3 = -2\vec{i} + 7\vec{j} \text{ et } \vec{w}_4 = 8\vec{u} + 3\vec{v}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.21 Ecritures de coordonnées en ligne et en colonne (3)

Exercices :
Exercice B.3.2

D'après les informations données, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constitutifs de la base $\mathcal{B}'$ s'écrivent de la façon suivante par rapport aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de $\mathcal{B}$:

$$\vec{u} = 4\vec{i} - \vec{j} \text{ et } \vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$$

Par conséquent, comme on sait que : $\vec{w}_2 = 3\vec{u} - 5\vec{v}$, on en déduit :

$$\vec{w}_2 = 3\,(4\vec{i} - \vec{j}) - 5\,(-5\vec{i} + 2\vec{j}) = 37\vec{i} - 13\vec{j}$$

De la même façon, on a vu que : $\vec{w}_4 = 8\vec{u} + 3\vec{v}$, d'où :

$$\vec{w}_4 = 8\,(4\vec{i} - \vec{j}) + 3\,(-5\vec{i} + 2\vec{j}) = 17\vec{i} - 2\vec{j}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.22 Coordonnées de vecteur et changement de base (1)

Exercices :
Exercice B.3.3

Appelons X , Y et Z les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$. On peut donc écrire :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad \text{ou encore } \vec{w} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$$

Or, dans cette dernière égalité, on connaît les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ de chacun des vecteurs $\vec{w}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. On peut donc remplacer les vecteurs par leurs

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

écritures en colonne par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + Y \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + Z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \iff \left\{ \begin{array}{l} Y + Z = 1 \\ X - 4Y - 3Z = 0 \\ -X + 7Y + 5Z = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} Y = 1 - Z \\ X - 4(1 - Z) - 3Z = 0 \\ -X + 7(1 - Z) + 5Z = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} Y = 1 - Z \\ X = 4 - Z \\ -(4 - Z) - 2Z = -6 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} X = 2 \\ Y = -1 \\ Z = 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Document C.2.22
Coordonnées de vecteur et changement de base (1)

Document C.2.23 Coordonnées de vecteur et changement de base (2)

Exercices :
Exercice B.3.3

On procède de la même façon qu'avec $\vec{w}$ à la question précédente, en se souvenant que les coordonnées de $\vec{i}$ par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ sont :

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ainsi, si on note X, Y et Z les coordonnées de $\vec{i}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$, alors X, Y et Z sont les solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y + Z = 1 \\ X - 4Y - 3Z = 0 \\ -X + 7Y + 5Z = 0 \end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on montre donc que les coordonnées de $\vec{i}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.24 Coordonnées de vecteur et changement de base (3)

Exercices :
Exercice B.3.3

Il n'y a aucun calcul à faire dans cette question. On avait déjà remarqué précédemment que la décomposition du vecteur $\vec{e}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ dont il fait partie, est évidente :

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Ce qui se traduit en colonne par :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.25 Coordonnées de vecteur et changement de base (4)

Exercices :
Exercice B.3.3

Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent très facilement en utilisant l'écriture en ligne du vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

En effet, connaissant les coordonnées de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$, on en déduit :

$$\vec{v} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -18 \\ 29 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.26 Base et dimension (1)

Exercices :
Exercice B.3.4

Votre réponse est fausse.
Retentez votre chance en vous rappelant que la dimension d'un espace vectoriel est défini comme le nombre de vecteurs constituant n'importe laquelle de ses bases.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.27 Base et dimension (2)

Exercices :
Exercice B.3.4

Votre réponse est correcte.
En effet, la base $\mathcal{B}$ de E contenant 3 vecteurs, on en déduit que la dimension de E est égale à 3, c'est à dire que toutes les bases de E contiennent 3 vecteurs.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.28 Base et dimension (3)

Exercices :
Exercice B.3.4

Votre réponse est fausse.
On vient effectivement de voir que E était de dimension 3, c'est à dire que toutes ses bases contenaient nécessairement 3 vecteurs. Or la famille $\mathcal{B}'$ proposée en comporte 4 : sans aucun calcul, on peut donc affirmer que $\mathcal{B}'$ n'est pas une base de E.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.29 Base et dimension (4)

Exercices :
Exercice B.3.4

Votre réponse est correcte.
En effet, puisque E est de dimension 3, la famille $\mathcal{B}'$ proposée ne peut pas être une base de E puisqu'elle contient plus de 3 vecteurs.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.30 Base et déterminant (1)

Exercices :
Exercice B.3.5

Calculons le déterminant des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par rapport la base $\mathcal{B}$:

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2 + 4 \times 1 + 7 \times (-1) = -1$$

Le déterminant étant non nul, on en déduit que les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ forment une base de E .

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.31 Base et déterminant (2)

Exercices :
Exercice B.3.5

Calculons le déterminant des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par rapport la base $\mathcal{B}$:

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 20 + 3 \times (-10) + 1 \times 10 = 0$$

Le déterminant étant nul, on en déduit que les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ ne forment pas une base de E .

Document C.2.32 Droites et plans vectoriels (1)

Exercices :
Exercice B.4.1

Les coordonnées (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de $\vec{u}$ et $\vec{e}_1$ ne sont pas proportionnelles : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{e}_1$ ne sont donc pas colinéaires. Par conséquent, $\vec{u}$ n'appartient pas à la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1$, c'est à dire $\mathcal{D}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.33 Droites et plans vectoriels (2)

Exercices :
Exercice B.4.1

Le vecteur $\vec{u}$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, c'est à dire si et seulement si il existe deux réels λ_2 et λ_3 tels que : $\vec{u} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$. Or, on a :

$$\vec{u} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \iff \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -8 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 10 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_2 - 6\lambda_2 = -8 \\ \lambda_2 + 4\lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 4 \end{array} \right.$$

Le système admet bien une solution, puisque les deux premières équations ont conduit à une seule et même valeur de λ_2. Donc $\vec{u}$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.34 Droites et plans vectoriels (3)

Exercices :
Exercice B.4.1

Les coordonnées (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de $\vec{v}$ et $\vec{e}_1$ ne sont pas proportionnelles : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{e}_1$ ne sont donc pas colinéaires. Par conséquent, $\vec{v}$ n'appartient pas à la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1$, c'est à dire $\mathcal{D}$.

Document C.2.35 Droites et plans vectoriels (4)

Exercices :
Exercice B.4.1

Comme pour le vecteur $\vec{u}$, le vecteur $\vec{v}$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, c'est à dire si et seulement si il existe deux réels λ_2 et λ_3 tels que : $\vec{v} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$. Or, on a :

$$\vec{v} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_2 - 3 - 6\lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 + 2 + 4\lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 + 2\lambda_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{-1}{5} \\ \lambda_3 = 1 + 2\lambda_2 \end{array} \right.$$

Le système n'admet aucune solution, puisque les deux premières équations ont conduit à deux valeurs différentes de λ_2. Donc $\vec{v}$ n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.36 Droites et plans vectoriels (5)

Exercices :
Exercice B.4.1

Les coordonnées (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de $\vec{w}$ et $\vec{e}_1$ sont proportionnelles : $\vec{w} = -3\vec{e}_1$; les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{e}_1$ sont donc colinéaires. Par conséquent, $\vec{w}$ appartient à la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1$, c'est à dire $\mathcal{D}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.37 Droites et plans vectoriels (6)

Exercices :
Exercice B.4.1

Comme pour les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, c'est à dire si et seulement si il existe deux réels λ_2 et λ_3 tels que : $\vec{w} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$. Or, on a :

$$\vec{w} = \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \iff \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -9 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 15 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_2 - 36 - 6\lambda_2 = -9 \\ \lambda_2 + 24 + 4\lambda_2 = 15 \\ \lambda_3 = 12 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{-27}{4} \\ \lambda_2 = \frac{-9}{5} \\ \lambda_3 = 12 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

Le système n'admet aucune solution, puisque les deux premières équations ont conduit à deux valeurs différentes de λ_2. Donc $\vec{w}$ n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.38 Déterminant et vecteurs liés (1)

Exercices :
Exercice B.4.2

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si leur déterminant, par rapport à la base $\mathcal{B}$, est nul. Or :

$$\begin{aligned}\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-8) - 3 \times 5 + 2 \times (-3) = -53\end{aligned}$$

Le déterminant obtenu est non-nul, donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.39 Déterminant et vecteurs liés (2)

Exercices :
Exercice B.4.2

Chercher si le vecteur $\vec{t}$ appartient au plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ revient à chercher si les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Or, comme à la question précédente, les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si leur déterminant, par rapport à la base $\mathcal{B}$, est nul. Et :

$$\begin{aligned}
\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{t};\vec{v};\vec{w}) &= \begin{vmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 11 & 5 & -6 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \times \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 11 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \\
&= -5 \times (-8) - 11 \times 5 - 5 \times (-3) = 0
\end{aligned}$$

Le déterminant obtenu est nul, donc les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Aurement dit, $\vec{t}$ appartient au plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.40 Recherche d'équation cartésienne de plan (1)

Exercices :
Exercice B.4.3

$$\text{Soit } \vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ un vecteur de } E \text{ ; alors :}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w} \in \mathcal{P} &\iff \vec{w}\,, \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires}\\
&\iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{w};\vec{u};\vec{v}) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ y & 7 & -4 \\ z & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0\\
&\iff x \times \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + z \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 0\\
&\iff 34x + 9y + z = 0
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$34x + 9y + Z = 0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.41 Recherche d'équation cartésienne de plan (2)

Exercices :
Exercice B.4.3

Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ appartient au plan vectoriel $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ trouvée à la question précédente. Or :

$$34 \times 4 + 9 \times 3 + 1 \times 2 = 165 \neq 0$$

Donc le vecteur $\vec{w}$ proposé n'appartient pas au plan vectoriel $\mathcal{P}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.42 Recherche d'équation cartésienne de plan (3)

Exercices :
Exercice B.4.3

Deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de E forment une base de $\mathcal{P}$ si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires et appartiennent tous les deux à $\mathcal{P}$. Autrement dit, leurs coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, ne doivent pas être proportionnelles et doivent vérifier l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ trouvée à la première question.

On peut choisir par exemple :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -34 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.43 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (1)

Exercices :
Exercice B.4.4

L'équation $3x + y - 5z = 0$ est une équation cartésienne d'un plan vectoriel. Un couple de vecteurs directeurs de ce plan est, par exemple :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.44 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (2)

Exercices :
Exercice B.4.4

Le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ x+7y+2z=0 \end{array}\right.$ est un système d'équations cartésiennes d'une droite vectorielle, car il est constitué de deux équations cartésiennes de plans non proportionnelles. Un vecteur directeur de cette droite est, par exemple :

$$\vec{e}_1 \left(\begin{array}{c} 13 \\ 3 \\ -17 \end{array}\right)_{\mathcal{B}}$$

Remarque : pour trouver un vecteur directeur de la droite, il suffit de choisir la valeur de l'une des coordonnées de ce vecteur, par exemple $y = 3$. On obtient alors x et z en résolvant le système à deux équations et deux inconnues obtenu en remplaçant y par 3 dans le système d'équations cartésiennes caractérisant la droite.
Attention cependant à ne pas prendre la valeur 0 pour la coordonnée que l'on choisit, car sinon on obtient en général le vecteur nul qui est le seul vecteur de la droite à ne pas pouvoir être pris comme vecteur directeur.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.45 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (3)

Exercices :
Exercice B.4.4

L'équation $5x - y = 0$ est une équation cartésienne d'un plan vectoriel. Un couple de vecteurs directeurs de ce plan est, par exemple :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Remarque : malgré la forme familière de cette équation, il ne faut pas penser qu'il s'agit d'une équation de droite. La confusion vient du fait qu'une équation de la forme $ax + by = 0$ est une équation cartésienne de droite QUAND ON TRAVAILLE EN DIMENSION 2. Or, ici, on travaille en dimension 3, donc il faut interpréter l'équation comme un cas particulier d'équation cartésienne de plan "$ax + by + cz = 0$" où le coefficient c est nul.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.46 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (4)

Exercices :
Exercice B.4.4

Le système d'équations $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+10z=0 \end{cases}$ ne caractérise ni un plan vectoriel, ni une droite vectorielle. En particulier, ce n'est pas un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle, car la première des deux équations comporte un terme constant et n'est donc pas une équation cartésienne de plan.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.47 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (5)

Exercices :
Exercice B.4.4

L'équation $-4x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$ ne caractérise ni un plan vectoriel, ni une droite vectorielle. En particulier, ce n'est pas une équation cartésienne de plan vectoriel car les coordonnées x , y et z sont élevées au carré ; l'équation n'est donc pas de la forme "$ax + by + cz = 0$".

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.48 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (6)

Exercices :
Exercice B.4.4

Le système d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ 8x - z = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes d'une droite vectorielle, car il est constitué de deux équations cartésiennes de plans non proportionnelles. (Ces équations sont toutes deux de la forme "$ax + by + cz = 0$" mais avec certains coefficients nuls). Un vecteur directeur de cette droite est, par exemple :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.49 Reconnaissance des équations cartésiennes de droites et plans (7)

Exercices :
Exercice B.4.4

L'ensemble F_7 caractérisé par le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+3z=0 \end{array}\right.$ est une droite vectorielle.

En effet, si on essaye de résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues pour trouver les coordonnées du ou des vecteurs appartenant à F_7, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-2z=0 \\ y+3z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2z-3z+z=0 \\ x=2z \\ y=-3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0z=0 \\ x-2z=0 \\ y+3z=0 \end{array}\right.$$

La première équation étant toujours vraie, on peut la supprimer, de sorte qu'il reste deux équations (cartésiennes de plans) non proportionnelles :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2z=0 \\ y+3z=0 \end{array}\right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Transformé ainsi, le système correspond bien à un système d'équations cartésiennes de droite vectorielle, et plus précisément de la droite de vecteur directeur :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Document C.2.50 Résolution par substitution

Exercices :
Exercice B.5.1

Le système admet comme solution unique :

$$\begin{cases} x = 69 \\ y = -38 \\ z = -29 \end{cases}$$

Une substitution judicieuse pour commencer la résolution est de tirer : $x = 2 - y - z$ à partir de la troisième équation, et de substituer cette expression dans les deux premières équations.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.51 Résolution par combinaison

Exercices :
Exercice B.5.2

Le système admet comme solution unique :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Une première étape judicieuse est de conserver la seconde équation et de remplacer l'équation (E_1) par la combinaison $(E_1) + (E_2)$, et l'équation (E_3) par la combinaison $(E_3) + (E_2)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.52 Résolutions de systèmes (1)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système admet comme solution unique :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 17 \\ y = -13 \end{array} \right.$$

L'absence de coefficient 1 ou -1 devant toutes les inconnues incite à la résolution par combinaison. Une première étape judicieuse est de remplacer l'équation (E_1) par la combinaison $11\,(E_1) - 6\,(E_2)$, et l'équation (E_2) par la combinaison $5\,(E_2) - 9\,(E_1)$.

Document C.2.53 Résolutions de systèmes (2)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système admet comme solution unique :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

La présence d'un coefficient 1 devant l'inconnue z de la seconde équation incite à la résolution par substitution. Une première étape judicieuse est de tirer : $z = 2x - 3y - 3$ à partir de la seconde équation, et de substituer cette expression dans les première et troisième équations.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.54 Résolutions de systèmes (3)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système a deux degrés de liberté car il est équivalent au système à 2 équations et 4 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y = -2x + z - 3t + 2 \\ 5x + 2z + 5t = 5 \end{array}\right.$$

La présence d'un coefficient 1 devant l'inconnue y de la première équation incite à la résolution par substitution. Une première étape judicieuse est de tirer : $y = -2x + z - 3t + 2$ à partir de la première équation, et de substituer cette expression dans les trois autres équations ; on obtient alors 3 équations proportionnelles et on peut donc en supprimer deux.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.55 Résolutions de systèmes (4)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système admet comme solution unique :

$$\begin{cases} x = -20 \\ y = -5 \\ z = -14 \end{cases}$$

La présence d'un coefficient -1 devant l'inconnue x de la troisième équation incite à la résolution par substitution. Une première étape judicieuse est de tirer : $x = y+z-1$ à partir de la troisième équation, de substituer cette expression dans les deux premières équations, et de conserver la quatrième équation. Une fois les valeurs de x, y et z obtenues à l'aide des trois premières équations uniquement, on vérifient que ces valeurs sont aussi solutions de la quatrième équation.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.56 Résolutions de systèmes (5)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système admet comme solution unique :

$$\begin{cases} x = 157 \\ y = -30 \\ z = 99 \end{cases}$$

L'absence de coefficient 1 ou -1 devant toutes les inconnues incite à la résolution par combinaison. Une première étape judicieuse est de conserver la troisième équation, et de remplacer l'équation (E_1) par la combinaison $3\,(E_1) + 4\,(E_3)$, et l'équation (E_2) par la combinaison $3\,(E_2) + 5\,(E_3)$. On est ensuite à nouveau amené à faire des combinaisons.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.57 Résolutions de systèmes (6)

Exercices :
Exercice B.5.3

Le système n'admet aucune solution.

L'absence de coefficient 1 ou -1 devant toutes les inconnues incite à la résolution par combinaison. Une première étape judicieuse est de conserver la troisième équation, et de remplacer l'équation (E_1) par la combinaison $3\,(E_1) - 2\,(E_2)$, et l'équation (E_2) par la combinaison $3\,(E_2) - 4\,(E_1)$. Une fois les valeurs de x et y obtenues à l'aide des deux premières équations uniquement, on s'aperçoit que ces valeurs ne sont pas solutions de la troisième équation...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des notions