Calculs de décomposition de fractions rationnelles

Cas des fractions rationnelles réelles

Nadia TEILLAC et Johan MILLAUD

Départements GEII et GC de l'IUT du Limousin

Mars 2006

Table des matières

Chapitre I
Avant-propos

I.1 Navigation dans le cours

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 LaTeX et Polytex

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale Polytex.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

Polytex est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de Polytex intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Panneau de navigation Acrobat

Le cours électronique produit par Polytex est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Acrobat Reader. Les versions récentes de ce logiciel disposent d'un panneau de navigation dans lequel apparaît la structure hiérarchique du cours (affichage par signets). On peut ainsi accéder directement à une page quand on connait son emplacement dans le cours.

Cette technique de navigation, dite navigation physique, ne doit donc être utilisée que lorsqu'on connait déjà bien le cours et qu'on cherche une information particulière. Dans tous les autres cas, il est vivement conseillé de fermer ce panneau de navigation et d'utiliser les liens actifs et les systèmes de navigation propres au cours.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).
On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et la table des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◄ précédent" permet de revenir au grain sur le panneau de navigation Acrobat, et le lien "► suivant" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. (Quand il n'y a pas lieu de définir deux niveaux hiérarchiques, un chapitre peut être composés directement de grains). Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◄ précédent" et "► suivant" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain n'excède jamais (ou presque) deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◄◄ et ►► situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans le cours. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1

Exercices :
Exercice B.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain est en général associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Dans certains grains ou exemples, on pourra trouver des renvois à des grains ou exemples antérieurs. Pour ne pas multiplier les renvois et ne pas perdre le lecteur, cela

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ne se produira que très occasionnellement lorsque les grains ou exemples auront des contenus fortement liés et qu'ils seront chronologiquement très éloignés. Ces renvois particuliers sont unilatéraux : il n'y a pas de renvois permettant d'accéder rapidement à un grain ou exemple ultérieur. Dans de tels cas de figure, il est nécessaire de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.5 Le menu de navigation

On a conseillé plus tôt de limiter l'utilisation du panneau de navigation d'Acobat Reader, surtout lors d'une première lecture. Cependant, même quand on connait bien le cours, et/ou quand on cherche une information précise, ce panneau n'est pas indispensable, car le cours possède son propre menu de navigation accessible depuis n'importe quelle page : c'est la liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit.

Ainsi, on peut à tout moment accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices.
On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : ce lien ne présente pas d'intérêt, car il conduit au sommaire des réponses aux questions à choix multiples présentes dans les différents exercices. On accèdera à ces réponses directement depuis les différents exercices.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, Polytex associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient...

I.2 Objectifs pédagogiques et choix didactiques

I.2.1 Objectifs pédagogiques

L'objectif de ce cours est de présenter les techniques **pratiques** permettant de déterminer les coefficients apparaissant aux numérateurs des éléments simples dans la décomposition d'une fraction rationnelle en de tels éléments.

A l'issue de l'apprentissage, on doit donc être capable de calculer de tels coefficients sans passer par la méthode basique consistant à ajouter tous les éléments simples d'une décomposition après les avoir réduits au même dénominateur puis à identifier le numérateur obtenu au numérateur initial de la fraction rationnelle.

Signalons que cette méthode basique a déjà été présentée dans la ressource "Décomposition des fractions rationnelles" téléchargeable sur le site d'IUTenLigne et qui présentait le vocabulaire et le principe de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Pré-requis

Documents :
Document C.1.1

Ce cours est la suite logique de la ressource "Décomposition des fractions rationnelles" téléchargeable sur le site d'IUTenLigne. On doit donc l'aborder en disposant des connaissances développées dans cette ressource, c'est à dire à condition d'être capable :

- De décrire les différentes étapes de la décomposition d'une fraction rationnelle avec un vocabulaire précis.
- De donner la forme de la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, de n'importe quelle fraction rationnelle de dénominateur aisément factorisable.

On peut retrouver à tout moment le plan de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples dans la partie "Documents" de cette ressource. (cf. lien ci-dessus)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

D'un point de vue technique, on s'est borné, dans la ressource "Décomposition des fractions rationnelles", à décomposer les fractions rationnelles dans $\mathbb{R}$.
On persiste donc dans ce cours à n'envisager que des fractions rationnelles réelles et à les décomposer dans $\mathbb{R}$. Le lecteur curieux trouvera, dans tout bon ouvrage sur le sujet, le cas de la décomposition dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, afin de se focaliser sur les techniques présentées dans ce cours et pour que l'apprentissage ne soit pas parasité par d'autres difficultés de calcul, les fractions rationnelles proposées dans la plupart des exercices ont un dénominateur donné sous forme factorisée (avec des polynômes réels irréductibles).

Enfin, certaines considérations de prolongement par continuité et de domaines de définition sont passées sous silence.

I.2.4 Choix didactiques

La bonne appropriation des notions est contrôlée et validée au fur et à mesure de l'apprentissage lors de la recherche des exercices : une solution "pas à pas" est proposée dans la plupart des cas pour permettre à l'apprenant de contrôler le début de sa démarche sans avoir immédiatement la solution complète.

Pour chaque notion, le nombre d'exercices associés est limité (1 ou 2 suivant les cas) : dans un objectif de mémorisation à long terme, il est conseillé de chercher des exercices supplémentaires, dans des recueils par exemple.

Attention, la recherche des exercices demande en général quelques calculs. Le travail sur ordinateur ne rend pas complètement obsolète le travail sur papier : on se munira donc d'une feuille, d'un crayon et éventuellement d'une calculatrice pour résoudre les exercices. En particulier, on évitera de cliquer au hasard sur les réponses proposées : il serait illusoire d'espérer apprendre quoi que ce soit de cette façon-là !

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.5 Temps d'apprentissage

L'un des grands avantages de l'enseignement en autonomie est de permettre à chacun d'évoluer à son rythme. Le temps d'apprentissage donné ici est donc purement indicatif et dépend en réalité fortement du niveau d'acquisition des pré-requis.
Grossièrement donc, on estime la lecture de cette ressource (incluant la recherche active des exercices) à une demi-journée de travail.

Chapitre II
Coefficients des éléments simples de première espèce

II.1 Objectifs du chapitre

Exemples :
Exemple A.2

Dans la ressource "Décomposition des fractions rationnelles", on a présenté une méthode basique pour trouver les coefficients apparaissant aux numérateurs des éléments simples de la décomposition d'une fraction rationnelle réelle. Cette méthode consistait :

- à ajouter les éléments simples après les avoir réduits au même dénominateur,
- puis à identifier le numérateur obtenu au numérateur de la fraction rationnelle subsistant après la détermination de la partie entière de la fraction rationnelle (irréductible) initiale.

Cette méthode conduisait ainsi à la résolution d'un système d'équations à n équations et n inconnues où n correspondait au degré du dénominateur de la fraction rationnelle (irréductible) initiale.

Dès lors que le dénominateur d'une fraction rationnelle a un degré élevé, cette méthode s'avère donc peu réalisable en pratique.
On va voir alors dans ce chapitre comment réussir à déterminer malgré tout, les coefficients des numérateurs des éléments simples de première espèce : on présente pour cela différentes techniques qu'il sera parfois nécessaire de combiner.

II.2 Pôles réels simples

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.3

Si une fraction rationnelle irréductible $F(x)$ admet (entre autres) un pôle réel a d'ordre 1, alors elle peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)} \qquad \text{avec } Q_1(a) \neq 0$$

De plus, sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = E(x) + \frac{A}{x-a} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

où $E(x)$ est la partie entière de $F(x)$, et où $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... sont des éléments simples n'admettant pas a comme pôle.

On a donc :

$$\frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)} = E(x) + \frac{A}{x-a} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par conséquent, on peut écrire le produit $(x-a) \times F(x)$ de 2 façons et obtenir l'égalité :

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = (x-a) \times E(x) + A + (x-a) \times F_1(x) + (x-a) \times F_2(x) + \ldots$$

En choisissant alors $x = a$ (qui n'est pas une valeur interdite pour cette égalité), presque tous les termes de la somme figurant dans le membre de droite de l'égalité s'annulent, et on en déduit la valeur du coefficient A :

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

II.3 Pôles réels multiples : première technique

Exemples :
Exemple A.5
Exemple A.6

La technique exposée pour les pôles réels simples se généralise au cas des pôles réels d'ordre $n \geq 2$ de sorte que l'on peut trouver aisément la valeur d'**un des numérateurs des éléments simples** de première espèce associés à un tel pôle.

En effet, si une fraction rationnelle irréductible $F(x)$ admet (entre autres) un pôle réel a d'ordre $n \geq 2$, alors elle peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} \qquad \text{avec } Q_1(a) \neq 0$$

De plus, sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = E(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

où $E(x)$ est la partie entière de $F(x)$, et où $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... sont des éléments simples n'admettant pas a comme pôle.

Pôles réels multiples : première technique

On déduit des deux écritures de $F(x)$ l'égalité suivante :

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} = E(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Par conséquent, on peut écrire le produit $(x-a)^n \times F(x)$ de 2 façons et obtenir l'égalité :

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = (x-a)^n \times E(x) + (x-a)^{n-1} \times A_1 + (x-a)^{n-2} \times A_2 + \cdots + A_n + (x-a)^n \times F_1(x) + \ldots$$

En choisissant alors $x = a$ (qui n'est pas une valeur interdite pour cette égalité), presque tous les termes de la somme figurant dans le membre de droite de l'égalité s'annulent, et on en déduit la valeur du coefficient A_n :

$$A_n = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

Cette première technique **ne permet donc d'obtenir que le coefficient $\boldsymbol{A_n}$**. Pour trouver les coefficients A_1, A_2, ... , A_{n-1}, il est nécessaire d'utiliser également au moins une des techniques développées dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.4 Pôles réels multiples : deuxième technique

Exemples :
Exemple A.7
Exemple A.8
Exemple A.9

Exercices :
Exercice B.4

Reprenons les notations du paragraphe précédent où on manipulait une fraction rationnelle irréductible admettant (entre autres) un pôle réel d'ordre $n \geq 2$. Notons de plus $R(x)$ le reste de la division euclidienne du numérateur $P(x)$ de $F(x)$ par le dénominateur $Q(x)$. On peut alors écrire :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Ou encore :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Rappelons que la limite, quand x tend vers $+\infty$, d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Pôles réels multiples : deuxième technique

Dans cette dernière égalité, toutes les fractions rationnelles ont un numérateur de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, de sorte que le produit de chacune de ces fractions par x admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Plus particulièrement, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x \times \frac{A_1}{x-a} = A_1 \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{A_i}{(x-a)^i} = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

Finalement, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x \times \frac{R(x)}{Q(x)} = A_1 + \lim_{x\to+\infty} x \times F_2(x) + \lim_{x\to+\infty} x \times F_3(x) + \dots$$

Cette technique ne nous permet pas forcément de trouver immédiatement A_1, car les limites des produits $x \times F_i(x)$ peuvent dépendre de certains coefficients restant à déterminer.
Néanmoins, cette technique permet d'obtenir une relation portant sur A_1 et non sur les autres coefficients A_i : combinée avec les autres techniques développées dans ce cours, elle peut malgré tout nous aider à trouver la valeur de A_1 sans s'engager dans les calculs fastidieux de la méthode "basique".

Remarque : cette technique n'impose pas que la fraction rationnelle n'ait que des pôles réels (multiples). Elle est également applicable avec des fractions rationnelles admettant des pôles complexes conjugués.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.5 Pôles réels multiples : troisième technique

Exemples :
Exemple A.10
Exemple A.11

Exercices :
Exercice B.5

On conserve toujours les notations des paragraphes précédents. Il se peut, en particulier si l'ordre de multiplicité du zéro réel a est élevé ou si la fraction rationnelle F a plusieurs zéros réels multiples, que les techniques présentées jusque là ne permettent pas de déterminer tous les coefficients d'une décomposition.
Dans de tels cas, et à condition que le nombre de coefficients encore inconnus soit faible (en pratique inférieur ou égal à 3), on peut déterminer ces coefficients en écrivant l'égalité :

$$F(x) = E(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

pour quelques valeurs "bien choisies" de x. En procédant ainsi, on met effectivement en place des équations ayant pour inconnues les coefficients manquants qu'on peut alors obtenir en résolvant le système formé par les équations trouvées.

Remarque : cette technique n'est en fait pas réservée au fractions rationnelles ne possédant que des pôles réels (multiples). Elle peut également être mise en place quand il y a des pôles complexes conjugués.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.6 Division suivant les puissances croissantes

Exemples :
Exemple A.12

Exercices :
Exercice B.6

Pour la dernière technique relative à la recherche des numérateurs des éléments simples de première espèce, nous aurons besoin d'utiliser la division de polynômes suivant les puissances croissantes. Cette division est moins connue que la division euclidienne, car moins utilisée (on la retrouve par exemple lorsqu'on travaille sur les développements limités de fonctions), c'est pourquoi nous lui consacrons un paragraphe.

Soient $P_1(x)$ et $P_2(x)$ deux polynômes à coefficients réels avec $P_2(0) \neq 0$, et n un entier naturel ; alors il existe deux polynômes $q(x)$ et $r(x)$ (déterminés de manière unique) tels que :

$$P_1(x) = P_2(x) \times q(x) + x^{n+1} r(x) \qquad \text{avec } \deg q(x) \leq n$$

Les polynômes $q(x)$ et $x^{n+1}r(x)$ sont appelés respectivement **quotient** et **reste** de la division à l'ordre n suivant les puissances croissantes de $P_1(x)$ par $P_2(x)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.7 Pôles réels multiples : quatrième technique

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.14
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

Documents :
Document C.1.2

Mise en garde : cette quatrième technique et sa justification sont d'un niveau plus élevé que ce qui a été vu jusqu'à présent. C'est pourquoi on ne donne ici que les grandes lignes de la technique en question : on appréhendera cette technique certainement plus efficacement à l'aide des exemples proposés. Le lecteur curieux est malgré tout invité à consulter les éléments de justification proposés dans la partie "Documents" de cette ressource.

Lorsqu'une fraction rationnelle admet (entre autres) un pôle réel a d'ordre de multiplicité n élevé (supérieur à 3 en pratique), les techniques exposées jusqu'ici conduisent en général à des systèmes d'équations linéaires imposants, c'est à dire fastidieux à résoudre.

Dans une telle situation, on peut mettre en place la technique suivante. Supposons que F est irréductible : si ce n'est pas le cas, on procède à sa simplification ; et que sa partie entière est nulle : si ce n'est pas le cas, on détermine la partie entière et on

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

travaille avec la fraction de même dénominateur et de numérateur égal au reste obtenu lors de la division euclidienne.

Formellement, on a :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} \qquad \text{avec } Q_1(a) \neq 0$$

On procède alors ainsi :

- On pose $X = x - a \Longleftrightarrow x = X + a$ dans la formule définissant F.
- On divise $P(X+a)$ par $Q_1(X+a)$ suivant les puissances croissantes de X à l'ordre $n-1$.*
- On remplace, au numérateur de $F(X+a)$, $P(X+a)$ par l'expression obtenue grâce à la division précédente, puis on revient à la variable x et on obtient la partie principale de la décomposition de F relative au pôle a.

* Remarque : le facteur $(x-a)^n$ (qui devient X^n après le changement de variable) n'intervient pas dans la division suivant les puissances croissantes.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre III
Coefficients des éléments simples de deuxième espèce

III.1 Objectifs du chapitre

On a vu dans le chapitre précédent quelques techniques permettant d'obtenir les coefficients apparaissant aux numérateurs des éléments simples de première espèce. Au cours de l'illustration de ces techniques, on a pu également déterminer les numérateurs d'éléments simples de deuxième espèce. On va voir dans ce chapitre deux techniques supplémentaires, spécifiques pour la recherche des coefficients associés aux pôles complexes conjugués, ainsi qu'une technique pour exploiter la parité d'une fraction rationnelle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Pôles complexes conjugués d'ordre 1

Exemples :
Exemple A.16
Exemple A.17

Exercices :
Exercice B.10

La technique vue pour les pôles réels simples est généralisable au cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1. Considérons en effet deux nombres complexes conjugués z et $\overline{z}$, racines du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels (et donc tels que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$). Considérons de plus une fraction rationnelle F irréductible admettant (entre autres) z et $\overline{z}$ comme pôles complexes conjugués d'ordre 1. F s'écrit alors :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)Q_1(x)} \qquad \text{avec } Q_1(z) \neq 0 \text{ et } Q_1(\overline{z}) \neq 0$$

Par ailleurs, la décomposition de F en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = E(x) + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

où $E(x)$ est la partie entière de F, et où F_2, F_3, ... sont des éléments simples n'admettant pas z et $\overline{z}$ comme pôles.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a donc :

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)Q_1(x)} = E(x) + \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Et en multipliant cette égalité par ax^2+bx+c, on obtient :

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = (ax^2+bx+c)\,E(x) + Ax + B + (ax^2+bx+c)\,F_2(x) + (ax^2+bx+c)\,F_3(x) + \ldots$$

Finalement, en remplaçant x par z dans cette égalité, les termes à droite de l'égalité s'annulent presque tous, et on en déduit :

$$Az + B = \frac{P(z)}{Q_1(z)}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires obtenues de chaque côté de cette égalité, on en tire alors les valeurs de A et de B.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Pôles complexes conjugués multiples

Exemples :
Exemple A.18

Exercices :
Exercice B.11

Comme dans le cas des pôles réels multiples, on peut encore généraliser la technique précédente au cas des pôles complexes multiples. Cependant, cela ne permet que de trouver 2 des coefficients associés à ces pôles, et on a vu que cette dernière technique n'était en réalité pas toujours efficace en pratique. On donne donc ici une autre technique plus appropriée **dans le cas des fractions ayant comme pôles uniquement une paire de pôles complexes conjugués d'ordre n**.

Considérons pour cela deux nombres complexes conjugués z et $\overline{z}$, racines du polynôme du second degré ax^2+bx+c avec a, b et c réels (et donc tels que $\Delta = b^2-4ac < 0$). Considérons de plus une fraction rationnelle F irréductible, **de partie entière nulle** et admettant z et $\overline{z}$ comme (seuls) pôles complexes conjugués d'ordre $n \geq 2$. F s'écrit alors :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Effectuons alors la division euclidienne de $P(x)$ par ax^2+bx+c :

$$P(x) = (ax^2+bx+c) \times Q_1(x) + R_1(x) \qquad \text{avec } \deg R_1 < 2$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

D'où :

$$F(x) = \frac{(ax^2+bx+c)\times Q_1(x) + R_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{Q_1(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{R_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

On recommence ensuite en effectuant cette fois-ci la division euclidienne de $Q_1(x)$ par ax^2+bx+c :

$$Q_1(x) = (ax^2+bx+c)\times Q_2(x) + R_2(x) \qquad \text{avec } \deg R_2 < 2$$

D'où :

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{(ax^2+bx+c)\times Q_2(x)+R_2(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \tfrac{R_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n} \\ &= \tfrac{Q_2(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-2}} + \tfrac{R_2(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \tfrac{R_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n} \end{aligned}$$

En réitérant ce processus jusqu'à obtenir un quotient Q_i (avec en général $i = n-1$) de degré strictement inférieur à 2, on obtient la décomposition de F en éléments simples :

$$F(x) = \frac{Q_i(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-i}} + \frac{R_i(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-i+1}} + \cdots + \frac{R_2(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{R_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

III.4 Exploiter la parité d'une fraction

Exemples :
Exemple A.19

Exercices :
Exercice B.12

La recherche des coefficients apparaissant dans la décomposition d'une fraction rationnelle peut être simplifiée quand cette fonction est paire ou impaire.

Rappelons tout d'abord qu'une fonction F est paire (respectivement impaire) si, pour tout x du domaine de définition $\mathcal{D}_F$, l'opposé $-x$ est aussi dans $\mathcal{D}_F$ et si on a : $F(-x) = F(x)$ (respectivement $F(-x) = -F(x)$).

Du fait de l'unicité des coefficients (relatifs à un pôle donné) de la décomposition en éléments simples, si une fraction rationnelle F est paire (respectivement impaire), l'égalité $F(-x) = F(x)$ (respectivement $F(-x) = -F(x)$) conduit, par identification, à des relations entre coefficients qui réduisent le nombre d'inconnues.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre IV

A venir

IV.1 Exercices d'entraînement

Dans une version prochaine, on trouvera des exercices d'entraînement supplémentaires, permettant de travailler toutes les techniques exposées dans cette ressource.

Les auteurs proposeront également un QCM d'évaluation sommative pour compléter cette ressource.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exemples

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1 Navigation par renvois

Cours :	Exercices :
Renvois	Exercice B.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi ”Exemple A.1.1” depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi ”Exemple A.1” de l'exercice B.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2 Défaut de la méthode "basique"

Cours :
Objectifs du chapitre II

Considérons la fraction rationnelle irréductible et de partie entière nulle suivante :

$$F(x) = \frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)}$$

Cette fraction rationnelle n'a que des pôles réels simples et admet une décomposition en éléments simples de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Avec la méthode de recherche des coefficients exposée dans la ressource "Décomposition des fractions rationnelles", on est amené à déterminer A , B , C et D en remettant les éléments simples au même dénominateur :

$$F(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)} \Big[A(x-1)(x-2)(x+2) \\ +B(x+3)(x-2)(x+2) \\ +C(x+3)(x-1)(x+2) \\ +D(x+3)(x-1)(x-2)\Big]$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Puis on développe le numérateur et on le "réorganise" :

$$F(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)} \Big[(A+B+C+D)x^3 \\ +(-A+3B+4C)x^2 \\ +(-4A-4B+C-7D)x \\ +(4A-12B-6C+6D)\Big]$$

Par identification, on peut alors en déduire que les coefficients A, B,, C et D sont solutions du système :

$$\begin{cases} A+B+C+D=-1 \\ -A+3B+4C=-5 \\ -4A-4B+C-7D=22 \\ 4A-12B-6C+6D=44 \end{cases}$$

Outre la résolution de ce système qu'il reste à faire, on constate que les étapes qui ont conduit à ce système sont coûteuses en terme de calculs. **Les techniques que l'on va développer dans la suite de ce cours permettront de s'affranchir d'une majeur partie de ces calculs fastidieux.**

Exemple A.2
Défaut de la méthode "basique"

Exemple A.3 Pôles réels simples : un cas très simple

Cours :
Pôles réels simples

Exemples :
Exemple A.4

Illustrons les propos du cours avec la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$$

Cette fraction est, de manière évidente, irréductible et a une partie entière nulle. Ses pôles sont réels d'ordre 1 : $x = -2$ et $x = 1$. Elle se décompose donc en :

$$F(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

La technique exposée dans le paragraphe de cours suggère, pour trouver la valeur de A, de multiplier $F(x)$ par $x+2$. On a ainsi :

$$(x+2) \times F(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ ou encore } (x+2) \times F(x) = A + \frac{B\,(x+2)}{x-1}$$

En comparant les 2 écritures obtenues pour $(x+2) \times F(x)$ et en choisissant $x = -2$, on en déduit :

$$\frac{3}{1} = A + \frac{0}{1} \iff A = 3$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On procède ensuite de manière analogue pour obtenir le coefficient B . On multiplie $F(x)$ par $x-1$:

$$(x-1)\times F(x)=\frac{x+1}{x+2}=\frac{A\,(x-1)}{x+2}+B$$

Puis on choisit $x=1$ et on en déduit :

$$\frac{2}{3}=\frac{0}{3}+B\Longleftrightarrow B=\frac{2}{3}$$

Finalement, la décomposition en éléments simples de $F(x)$ est :

$$F(x)=\frac{3}{x+2}+\frac{2}{3(x-1)}$$

Exemple A.4 Pôles réels simples : un cas plus complet

Cours :
Pôles réels simples

Exemples :
Exemple A.3

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.3

Dans le paragraphe définissant les objectifs du chapitre, nous avions illustré la lourdeur de la méthode "basique" de recherche des coefficients avec la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Voyons maintenant le gain de temps et d'énergie qu'il y a à utiliser la nouvelle technique exposée dans ce cours.

Le produit $(x+3) \times F(x)$ s'écrit alors :

$$(x+3) \times F(x) = \frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x-1)(x-2)(x+2)} = A + \frac{B(x+3)}{x-1} + \frac{C(x+3)}{x-2} + \frac{D(x+3)}{x+2}$$

En prenant alors $x = -3$ dans cette dernière égalité, on obtient :

$$\frac{-40}{-20} = A + 0 + 0 + 0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C'est à dire $A = 2$: on a obtenu le premier coefficient de la décomposition sans se lancer dans des calculs fastidieux. En procédant de la même façon, on peut trouver les 3 autres coefficients (cf. exercice).

Exemple A.5 Pôles réels multiples : première technique

Cours :
Pôles réels multiples (technique 1)

Exemples :
Exemple A.6

Considérons la fraction rationnelle $F(x)$ irréductible et de partie entière nulle suivante :

$$F(x) = \frac{x+1}{(x+4)^2}$$

Elle admet $x = -4$ comme pôle réel d'ordre 2, donc elle se décompose à l'aide de 2 éléments simples de première espèce :

$$F(x) = \frac{x+1}{(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2}$$

La première technique de recherche de coefficients pour les pôles réels multiples suggère de considérer le produit $(x+4)^2 \times F(x)$ qui conduit à l'égalité suivante :

$$x + 1 = A\,(x+4) + B$$

En choisissant $x = -4$ dans cette égalité, on déduit : $B = -3$.

Remarquons que cette technique ne permet pas de trouver le coefficient A. En effet, même si on s'intéresse au produit $(x+4) \times F(x)$, on est conduit à une impasse,

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

car l'égalité qu'on en tire :

$$\frac{x+1}{x+4} = A + \frac{B}{x+4}$$

n'est pas définie pour $x = -4$... C'est pourquoi on va exposer par la suite d'autres techniques qui viendront en complément à cette première technique.
On déterminera alors la valeur du coefficient A dans l'exemple A.7 .

Exemple A.6 Pôles réels multiples : fil rouge 1

Cours :
Pôles réels multiples (technique 1)

Exemples :
Exemple A.5

On considère la fraction rationnelle $F(x)$ suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 + x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 11x + 4}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

Afin de la décomposer en éléments simples, on doit suivre plusieurs étapes exposées dans la ressource "Décomposition des fractions rationnelles" : on ne détaille pas les calculs relatifs aux premières étapes dans la mesure où ce n'est pas l'objectif de ce cours.
Il faut tout d'abord factoriser le dénominateur. On montre qu'il s'écrit :

$$Q(x) = (x-1)^3(x+1)^2$$

Par conséquent, après s'être assuré que $P(1) \neq 0$ et $P(-1) \neq 0$, on sait que $F(x)$ est irréductible et on peut déterminer sa partie entière par division euclidienne. On obtient :

$$F(x) = 2x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{2x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 10x + 7}{(x-1)^3(x+1)^2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6
Pôles réels multiples : fil rouge 1

La fraction rationnelle $F_1(x)$ ainsi obtenue admet $x = 1$ comme pôle réel d'ordre 3 et $x = -1$ comme pôle réel d'ordre 2. Elle se décompose donc comme suit :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

Le produit $(x-1)^3 \times F_1(x)$ conduit alors à l'égalité :

$$\frac{2x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 10x + 7}{(x+1)^2} = A(x-1)^2 + B(x-1) + C + \frac{D(x-1)^3}{x+1} + \frac{E(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

En choisissant $x = 1$ dans cette égalité, on en déduit donc : $C = 1$.

De même, le produit $(x+1)^2 \times F_1(x)$ conduit à l'égalité :

$$\frac{2x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 10x + 7}{(x-1)^3} = \frac{A(x+1)^2}{x-1} + \frac{B(x+1)^2}{(x-1)^2} + \frac{C(x+1)^2}{(x-1)^3} + D(x+1) + E$$

En choisissant $x = -1$ dans cette égalité, on en déduit alors : $E = 4$.

Ainsi, cette première technique de recherche des coefficients de la décomposition en éléments simples nous a permis de trouver très facilement 2 des 5 coefficients.
On va voir, avec les techniques suivantes, comment déterminer les 3 coefficients restants.
On terminera alors la recherche des coefficients pour cette fraction dans les exemples "fil rouge" 2 et 3 (Exemple A.9 et Exemple A.11).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.7 Pôles réels multiples : deuxième technique

Cours :
Pôles réels multiples (technique 2)

Exemples :
Exemple A.8
Exemple A.9

Reprenons la fraction rationnelle irréductible et de partie entière nulle $F(x)$ suivante :

$$F(x) = \frac{x+1}{(x+4)^2}$$

On a vu qu'elle se décomposait à l'aide de 2 éléments simples de première espèce :

$$F(x) = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} \qquad \text{avec } B = -3$$

La première technique de recherche de coefficients relatifs à des pôles réels multiples ne nous avait pas permis de déterminer A. La deuxième technique est par contre adaptée à cette recherche.
Considérons en effet, le produit $x \times F(x)$:

$$x \times F(x) = \frac{x^2+x}{(x+4)^2} = \frac{Ax}{x+4} + \frac{Bx}{(x+4)^2} \quad (\bigstar)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.7
Pôles réels multiples : deuxième technique

Sachant que $(x+4)^2 = x^2+8x+16$, et en utilisant le théorème sur la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+8x+16} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

De même :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Ax}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ax}{x} = A \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{Bx}{x^2+8x+16} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Bx}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{B}{x} = 0$$

Par conséquent, si on fait tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité $(\bigstar)$, on obtient : $A = 1$.

Finalement :

$$F(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{3}{(x+4)^2}$$

Exemple A.8 Pôles réels multiples : deuxième technique - piège à éviter

Cours :
Pôles réels multiples (technique 2)

Exemples :
Exemple A.7
Exemple A.9

On attire l'attention dans cet exemple sur l'importance de la partie entière pour la mise en oeuvre de cette deuxième technique de recherche des coefficients relatifs aux pôles réels multiples.
Considérons pour cela la fraction rationnelle $F(x)$ suivante :

$$F(x) = \frac{2x^3 + 17x^2 + 41x + 17}{(x+4)^2}$$

L'étude de la limite, quand x tend vers $+\infty$ du produit $x \times F(x)$ ne permet pas d'obtenir d'information sur les coefficients de la décomposition en éléments simples, car cette limite est infinie. En effet :

$$\lim_{x \to +\infty} x \times F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 17x^3 + 41x^2 + 17x}{x^2 + 8x + 16} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Cela est du au fait que le numérateur de $F(x)$ est de degré supérieur au dénominateur, c'est à dire qu'il y a une partie entière. Pour pouvoir utiliser cette deuxième

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

technique, il faut donc commencer par chercher cette partie entière. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur conduit à :

$$F(x) = 2x + 1 + \frac{x+1}{(x+4)^2}$$

Ensuite, on laisse de côté provisoirement la partie entière $E(x) = 2x+1$ et on applique la deuxième technique avec la fraction $F_1(x) = \frac{x+1}{(x+4)^2}$ dont le numérateur a un degré strictement inférieur à celui du dénominateur. Cette fraction F_1 n'est autre que celle que l'on a étudié dans l'exemple précédent.

En reprenant les résultats vus alors, on peut conclure que :

$$F(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+4} - \frac{3}{(x+4)^2}$$

Exemple A.9 Pôles réels multiples : fil rouge 2

Cours :
Pôles réels multiples (technique 2)

Exemples :
Exemple A.7
Exemple A.8

Exercices :
Exercice B.4

On poursuit dans cet exemple le travail débuté dans l'exemple "fil rouge" précédent où on travaillait avec la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 + x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 11x + 4}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

On avait vérifié que F est irréductible et on avait déterminé sa partie entière :

$$F(x) = 2x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{2x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 10x + 7}{(x-1)^3(x+1)^2}$$

Enfin, on avait établi que la décomposition en éléments simples de la fraction F_1 est de la forme :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

La deuxième technique de recherche des coefficients apparaissant aux numérateurs des éléments simples associés aux pôles réels multiples suggère de considérer le produit

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

$x \times F_1(x)$. Ce produit conduit à l'égalité :

$$\frac{2x^5+8x^4-23x^3+10x^2+7x}{(x-1)^3(x+1)^2} = \frac{Ax}{x-1} + \frac{Bx}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)^3} + \frac{Dx}{x+1} + \frac{4x}{(x+1)^2}$$

Sachant que la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ du quotient de ses monômes de plus haut degré, l'étude de la limite, quand x tend vers $+\infty$, de l'égalité précédente donne :

$$2 = A + D$$

Ainsi, cette deuxième technique de recherche des coefficients de la décomposition en éléments simples ne nous a pas aidé à trouver la valeur d'un des coefficients encore inconnus, mais nous a permis d'établir très facilement une première équation reliant 2 de ces coefficients inconnus.
La technique que l'on va développer dans le paragraphe suivant nous permettra de trouver 2 autres équations d'inconnues A , B et D , et donc d'obtenir la valeur de ces coefficients.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.10 Pôles réels multiples : troisième technique

Cours :
Pôles réels multiples (technique 3)

Exemples :
Exemple A.11

Exercices :
Exercice B.5

Illustrons la troisième technique de recherche des coefficients associés à des pôles réels multiples avec la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{2x^3 + x + 1}{(x-5)^3}$$

On vérifie aisément que $x = 5$ n'annule pas le numérateur de cette fraction, et donc qu'elle est irréductible.
Par ailleurs, comme le numérateur et le dénominateur ont le même degré, la partie entière de $F(x)$ est le quotient des coefficients des monômes de plus haut degré, c'est à dire $E(x) = 2$ ici.
Enfin, comme $x = 5$ est le seul pôle de F et qu'il est d'ordre 3, la décomposition de $F(x)$ en éléments simples a pour forme :

$$F(x) = 2 + \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3}$$

La première technique relative aux pôles réelles multiples permet d'obtenir C. En effet, le produit $(x-5)^3 \times F(x)$ pris en $x = 5$ conduit à : $C = 256$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On pourrait ensuite obtenir A à l'aide de la deuxième technique (passage à la limite), mais cela nécessiterait de calculer le reste de la division euclidienne de $2x^3 + x + 1$ par $(x-5)^3$ pour travailler avec une fraction de numérateur de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

Pour obtenir A et B, on va plutôt utiliser la troisième technique :

- Suivant l'expression de $F(x)$ utilisée, le calcul de $F(6)$ conduit soit à $F(6) = 439$, soit à $F(6) = 2 + A + B + C$.
- De la même façon, le calcul de $F(4)$ conduit soit à $F(4) = -133$, soit à $F(4) = 2 - A + B - C$.

Sachant que $C = 256$, il ne reste alors plus qu'à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2 + A + B + 256 = 439 \\ 2 - A + B - 256 = -133 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A + B = 181 \\ -A + B = 125 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A + A + 125 = 181 \\ B = A + 125 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} A = 28 \\ B = 97 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$F(x) = 2 + \frac{28}{x-5} + \frac{97}{(x-5)^2} + \frac{256}{(x-5)^3}$$

Exemple A.10
Pôles réels multiples : troisième technique

Exemple A.11 Pôles réels multiples : fil rouge 3

Cours :
Pôles réels multiples (technique 3)

Exemples :
Exemple A.10

Exercices :
Exercice B.5

Avec la troisième technique de recherche des coefficients de la décomposition en éléments simples, on va maintenant pouvoir terminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(x)$ étudiée dans les deux exemples "fil rouge" précédents :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 + x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 11x + 4}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

On a montré jusque là que :

$$F(x) = 2x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{2x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 10x + 7}{(x-1)^3(x+1)^2}$$

et que :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \qquad \text{avec } A + D = 2$$

En prenant $x = 0$, le calcul de $F_1(0)$ conduit à l'égalité :

$$-7 = -A + B - 1 + D + 4 \iff A - B - D = 10$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

De même, en choisissant $x = 2$, le calcul de $F_1(2)$ conduit à :

$$\frac{31}{9} = A + B + 1 + \frac{D}{3} + \frac{4}{9} \Longleftrightarrow 3A + 3B + D = 6$$

Pour trouver A, B et D, il ne nous reste donc plus qu'à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + D = 2 \\ A - B - D = 10 \\ 3A + 3B + D = 6 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = 2 - A \\ A - B - (2 - A) = 10 \\ 3A + 3B + (2 - A) = 6 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = 2 - A \\ 2A - B = 12 \\ 2A + 3B = 4 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = 2 - A \\ B = 2A - 12 \\ 2A + 3(2A - 12) = 4 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = -3 \\ B = -2 \\ A = 5 \end{array} \right.$$

Finalement, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(x)$ proposée est donc :

$$F(x) = 2x + 3 + \frac{5}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

Remarque : le choix des valeurs $x = 0$ et $x = 2$ effectué plus haut n'est pas anodin. Ces deux valeurs permettaient d'établir des équations **simples** (c'est à dire avec un minimum de fractions) d'inconnues A, B et D. Il aurait par exemple été peu judicieux d'établir une telle équation en choisissant $x = 7$...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.12 Division suivant les puissances croissantes

Cours :
Division de polynômes suivant les puissances croissantes

Exercices :
Exercice B.6

En pratique, la recherche des quotients et restes d'une division suivant les puissances croissantes est similaire à celle d'une division euclidienne. Comme le nom de la division l'indique, la différence repose essentiellemnent sur le fait que les polynômes diviseurs et dividendes s'écrivent, de manière développée, du monôme de plus bas degré au monôme de plus haut degré.

Regardons ce que cela donne avec les polynômes $P_1(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ et $P_2(x) = x^2 - x + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +2x & +3x^2 & +4x^3 & 1 - x + x^2 \\
-(1 & -x & +x^2) & & \overline{1 + 3x} \\
\hline
\smile & 3x & +2x^2 & +4x^3 & \\
 & -(3x & -3x^2 & +3x^3) & \\
\hline
 & \smile & 5x^2 & +x^3 &
\end{array}$$

On peut alors écrire :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = (1 - x + x^2) \times (1 + 3x) + x^2 (5 + x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.12
Division suivant les puissances croissantes

On a donc obtenu la forme indiquée dans le paragraphe de cours avec un quotient $q(x)$ de degré inférieur ou égal à 1, c'est à dire la division à l'ordre 1 suivant les puissances croissantes de $P_1(x)$ par $P_2(x)$.
Par ailleurs, on commence à voir, avec ce calcul, quelle nécessité il y a d'introduire la notion d'*ordre* pour ce type de division. En effet, on a arrêté le calcul après 2 étapes. Or, le reste obtenu après 2 étapes est encore divisible par P_2 : si on ne fixe pas d'ordre permettant de savoir à quelle étape interrompre l'algorithme de division, on peut continuer indéfiniment, puisque les restes successifs ont un degré de plus en plus grand. C'est donc une différence essentielle avec la division euclidienne dont l'algorithme se termine quand on obtient un reste de degré inférieur à celui du diviseur.

En guise d'exemple, on peut reprendre la division précédente et la pousser jusqu'à l'ordre 3 :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +2x & +3x^2 & +4x^3 & & & 1-x+x^2 \\
\cline{7-7}
-(1 & -x & +x^2) & & & & 1+3x+5x^2+6x^3 \\
\cline{1-3}
\smile & 3x & +2x^2 & +4x^3 & & & \\
 & -(3x & -3x^2 & +3x^3) & & & \\
\cline{2-4}
 & \smile & 5x^2 & +x^3 & & & \\
 & & -(5x^2 & -5x^3 & +5x^4) & & \\
\cline{3-5}
 & & \smile & 6x^3 & -5x^4 & & \\
 & & & -(6x^3 & -6x^4 & +6x^5) & \\
\cline{4-6}
 & & & \smile & x^4 & -6x^5 &
\end{array}
$$

Ainsi, on a, à l'ordre 3 :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = (1 - x + x^2) \times (1 + 3x + 5x^2 + 6x^3) + x^4 (1 - 6x)$$

Exemple A.12
Division suivant les puissances croissantes

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.13 Pôles réels multiples : quatrième technique

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.14
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

Illustrons la quatrième technique (sommairement décrite dans le cours) avec la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x-2}{(x+3)(x+2)^3}$$

qui est irréductible, de partie entière nulle et qui admet (entre autres) $x = -1$ comme pôle réel d'ordre 3.

D'après le cours, le raisonnement se fait en trois étapes :

– Dans un premier temps, on pose $X = x + 2$; on remplace donc dans $F(x)$ la variable x par $X - 2$:

$$F(X-2) = \frac{X-4}{(X-2+3)\,X^3} = \frac{X-4}{(X+1)\,X^3}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.13
Pôles réels multiples : quatrième technique

– Dans un deuxième temps, on pose la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 (car -2 est un pôle d'ordre 3) de $X-4$ par $X+1$ (trouvés lors de la première étape ; on insiste sur le fait que le facteur X^3 n'intervient pas dans cette division) :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-4 & +X & & & 1+X \\
\cline{5-5}
-(-4 & -4X) & & & -4+5X-5X^2 \\
\cline{1-2}
\smile & 5X & & & \\
 & -(5X & +5X^2) & & \\
\cline{2-3}
 & \smile & -5X^2 & & \\
 & & -(-5X^2 & -5X^3) & \\
\cline{3-4}
 & & & 5X^3 &
\end{array}
$$

On a donc : $X-4=(X+1)\times(-5X^2+5X-4)+X^3\times 5\,.$

– Dans un troisième temps, on injecte la relation que l'on vient de trouver au numérateur de $F(X-2)$, puis on sépare en deux fractions que l'on simplifie :

$$
\begin{aligned}
F(X-2) &= \tfrac{X-4}{(X+1)\,X^3} = \tfrac{(X+1)\times(-5X^2+5X-4)+X^3\times 5}{(X+1)\,X^3} \\
&= \tfrac{(X+1)\times(-5X^2+5X-4)}{(X+1)\,X^3} + \tfrac{X^3\times 5}{(X+1)\,X^3} \\
&= \tfrac{-5X^2+5X-4}{X^3} + \tfrac{5}{X+1} = -\tfrac{5}{X} + \tfrac{5}{X^2} - \tfrac{4}{X^3} + \tfrac{5}{X+1}
\end{aligned}
$$

Enfin, on revient à x en remplaçant X par $x+2$ (relation posée à la première étape) :

$$
F(x) = -\frac{5}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3} + \frac{5}{x+3}
$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On remarque qu'on a, au passage, également trouvé le coefficient relatif au pôle réel simple $x = -3$.

Exemple A.14 Pôles réels multiples : cas du pôle nul

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

La présence du pôle $x = 0$ chez une fraction rationnelle pose souvent des problèmes pour les débutants, alors que ce pôle se traite comme n'importe quel autre pôle réel. Pour s'en persuader, appliquons de nouveau la quatrième technique avec cette fois-ci la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{4}{x^4(x+2)}$$

qui est irréductible, de partie entière nulle et qui admet (entre autres) $x = 0$ comme pôle réel d'ordre 4.

On procède en 3 étapes comme dans l'exemple précédent. La particularité de 0 en tant que pôle est qu'on est amené dans un premier temps à poser : $X = x - 0$, c'est à dire que le changement de variable est sans effet sur la fraction F. En suivant strictement la technique exposée dans le cours, on est en effet amené à remplacer x dans $F(x)$ par $X + 0$:

$$F(X+0) = F(X) = \frac{4}{X^4(X+2)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On s'est donc contenté de changer le nom de notre variable, ce qui n'était pas indispensable...

On poursuit cependant comme précisé dans le cours en posant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 (puisque 0 est un pôle d'ordre 4) du numérateur $P(X) = 4$ par le facteur $Q_1(X) = X + 2$ du dénominateur :

$$
\begin{array}{lllll|l}
4 & & & & & 2+X \\ \cline{6-6}
-(4 & +2X) & & & & 2 - X + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{4} \\ \cline{1-2}
\smile & -2X & & & & \\
 & -(-2X & -X^2) & & & \\ \cline{2-3}
 & \smile & X^2 & & & \\
 & & -(X^2 & +\frac{X^3}{2}) & & \\ \cline{3-4}
 & & \smile & -\frac{X^3}{2} & & \\
 & & & -(-\frac{X^3}{2} & -\frac{X^4}{4}) & \\ \cline{4-5}
 & & & \smile & \frac{X^4}{4} & \\
\end{array}
$$

On a donc : $4 = (X+2)\left(-\frac{X^3}{4} + \frac{X^2}{2} - X + 2\right) + X^4 \times \frac{1}{4}$

Pour finir, on injecte la relation trouvée au numérateur de $F(X)$:

$$
\begin{aligned}
F(X) &= \frac{(X+2)\left(-\frac{X^3}{4}+\frac{X^2}{2}-X+2\right)+X^4\times\frac{1}{4}}{X^4(X+2)} \\
&= \frac{\left(-\frac{X^3}{4}+\frac{X^2}{2}-X+2\right)}{X^4} + \frac{\frac{1}{4}}{X+2} \\
&= -\frac{1}{4X} + \frac{1}{2X^2} - \frac{1}{X^3} + \frac{2}{X^4} + \frac{1}{4(X+2)}
\end{aligned}
$$

Exemple A.14
Pôles réels multiples : cas du pôle nul

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a ainsi obtenu la décomposition de $F(X)$ (et donc de $F(x)$) en éléments simples : le fait que F admette 0 comme pôle réel multiple n'a pas eu de répercussion importante sur le déroulement de la technique. La technique est même simplifiée puisque le changement de variable à la première étape n'induit aucun calcul.

Exemple A.14
Pôles réels multiples : cas du pôle nul

Exemple A.15 Pôles réels multiples : un cas particulier

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.14

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

Dans le cas particulier où une fraction rationnelle $F(x)$ admet en tout et pour tout un seul pôle réel a (d'ordre de multiplicité quelconque), la première étape de la quatrième technique (c'est à dire le changement de variable $X = x - a$) suffit à obtenir la décomposition de $F(x)$ en éléments simples.

En effet, soit par exemple la fraction rationnelle $F(x)$ définie par :

$$F(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x+2)^3}$$

Cette fraction est de toute évidence irréductible et a une partie entière nulle. Admettant $x = -2$ comme pôle réel d'ordre 3, la quatrième technique suggère de poser $X = x + 2$ et donc de remplacer x par $X - 2$ dans $F(x)$:

$$F(X-2) = \frac{2(X-2)^2 + (X-2) - 1}{X^3} = \frac{2X^2 - 7X + 5}{X^3}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Mais alors, il n'est pas utile de poser de division suivant les puissances croissantes pour décomposer cette fraction. Il suffit en effet de la scinder en plusieurs fractions de la façon suivante :

$$F(X-2) = \frac{2X^2}{X^3} - \frac{7X}{X^3} + \frac{5}{X^3} = \frac{2}{X} - \frac{7}{X^2} + \frac{5}{X^3}$$

On revient finalement à x et on a obtenu la décomposition de F en éléments simples :

$$F(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{7}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}$$

Exemple A.16 Pôles complexes simples

Cours :
Pôles complexes simples

Exemples :
Exemple A.17

Exercices :
Exercice B.10

Illustrons les propos du cours avec la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{8x^2 - 14x + 11}{(x-2)(x^2+1)}$$

Elle admet $x = 2$ comme pôle réel d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ comme pôles complexes conjugués d'ordre 1 chacun (ces pôles n'annulant pas le numérateur). De plus, sa partie entière est nulle, puisque le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$F(x) = \frac{8x^2 - 14x + 11}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

On obtient le coefficient en considérant le produit $(x-2) \times F(x)$ pour $x = 2$, comme on l'a vu dans le chapitre précédent :

$$A = 3$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.16
Pôles complexes simples

Pour trouver B et C, le paragraphe de cours suggère d'utiliser le même procédé. On considère donc le produit $(x^2+1) \times F(x)$:

$$\frac{8x^2 - 14x + 11}{x-2} = \frac{A\,(x^2+1)}{x-2} + Bx + C$$

En prenant $x = i$, on en déduit :

$$\frac{3-14i}{i-2} = Bi + C$$

Puis, en cherchant l'écriture algébrique du membre de gauche, on peut écrire :

$$C + Bi = \frac{(3-14i)(-i-2)}{(i-2)(-i-2)} = \frac{-20+25i}{5} = -4 + 5i$$

Finalement, B et C étant des coefficients réels, on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires : $B = 5$ et $C = -4$.
Ainsi :

$$F(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{5x-4}{x^2+1}$$

Exemple A.17 Pôles complexes simples : limites pratiques

Cours :
Pôles complexes simples

Exemples :
Exemple A.16

Exercices :
Exercice B.10

La généralisation de la technique vue pour les pôles réels simples au cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 est valable pour n'importe quels pôles. Cependant, en pratique, elle n'est intéressante en général que pour des pôles complexes "faciles à manipuler dans les calculs", comme c'était le cas dans l'exemple précédent.

Illustrons cela avec la fraction rationnelle irréductible et de partie entière nulle suivante :

$$F(x) = \frac{8x^2 - 11x + 11}{(x-2)(x^2+x+1)}$$

Elle admet $x = 2$ comme pôle réel d'ordre 1, et $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ comme pôles complexes conjugués d'ordre 1 chacun. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$F(x) = \frac{8x^2 - 11x + 11}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On trouve aisément : $A = 3$. Puis, pour obtenir B et C, il faut considérer le produit $(x^2 + x + 1) \times F(x)$ pour $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{8\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 11\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 11}{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - 2} = B\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + C$$

La simplification de cette égalité pour pouvoir identifier les parties réelles et imaginaires est assez "lourde". On aurait donc plus vite fait de déterminer B et C avec les autres techniques vues dans le chapitre précédent. En effet :

- La limite en $+\infty$ du produit $x \times F(x)$ donne : $A + B = 8$ d'où $B = 5$.
- La valeur de $F(0)$ permet ensuite d'obtenir : $\frac{11}{-2} = \frac{A}{-2} + C$ d'où $C = -4$

Ainsi, l'utilisation des pôles complexes n'est pas toujours la technique la plus appropriée popur trouver les coefficients des numérateurs des éléments simples de deuxième espèce.

Exemple A.17
Pôles complexes simples : limites pratiques

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.18 Pôles complexes multiples

Cours :
Pôles complexes multiples

Exercices :
Exercice B.11

Illustrons la technique exposée pour les pôles complexes conjugués multiples avec la fraction rationnelle irréductible :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^5+1}{(x^2+x+4)^3}$$

Cette fraction a une partie entière nulle et n'admet que deux pôles complexes conjugués : $x = \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$ et $x = \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$ d'ordre 2 chacun. Le cours suggère donc de commencer par poser la division euclidienne du numérateur $P(x) = 2x^5+1$ par le facteur x^2+x+4 du dénominateur :

Exemple A.18
Pôles complexes multiples

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & & & & & +1 & x^2+x+4 \\ \cline{7-7}
-(2x^5 & +2x^4 & +8x^3) & & & & 2x^3-2x^2-6x+14 \\ \cline{1-3}
\smile & -2x^4 & -8x^3 & & & +1 & \\
 & -(2x^4 & -2x^3 & -8x^2) & & & \\ \cline{2-4}
 & \smile\ -6x^3 & +8x^2 & & +1 & & \\
 & & -(-6x^3 & -6x^2 & -24x) & & \\ \cline{3-5}
 & & \smile & 14x^2 & +24x & +1 & \\
 & & & -(14x^2 & +14x & +56) & \\ \cline{4-6}
 & & & \smile & 10x & -55 &
\end{array}
$$

Ainsi : $2x^5+1=(x^2+x+4)\,(2x^3-2x^2-6x+14)+10x-55$. D'où :

$$F(x)=\frac{(x^2+x+4)\,(2x^3-2x^2-6x+14)+10x-55}{(x^2+x+4)^3}=F_1(x)+\frac{10x-55}{(x^2+x+4)^3}$$

Avec :

$$F_1(x)=\frac{2x^3-2x^2-6x+14}{(x^2+x+4)^2}$$

On recommence alors en posant la division euclidienne de $2x^3-2x^2-6x+14$ par x^2+x+4 :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -2x^2 & -6x & +14 & x^2+x+4 \\ \cline{5-5}
-(2x^3 & +2x^2 & +8x) & & 2x-4 \\ \cline{1-3}
\smile & -4x^2 & -14x & +14 & \\
 & -(-4x^2 & -4x & -16) & \\ \cline{2-4}
 & \smile & -10x & +30 &
\end{array}
$$

D'où : $2x^3 - 2x^2 - 6x + 14 = (x^2 + x + 4)(2x - 4) - 10x + 30$ et :

$$F_1(x) = \frac{(x^2 + x + 4)(2x - 4) - 10x + 30}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{2x - 4}{x^2 + x + 4} + \frac{-10x + 30}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Finalement, on a obtenu la décomposition de F en éléments simples :

$$F(x) = \frac{2x - 4}{x^2 + x + 4} + \frac{-10x + 30}{(x^2 + x + 4)^2} + \frac{10x - 55}{(x^2 + x + 4)^3}$$

Exemple A.18
Pôles complexes multiples

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.19 Une fonction paire

Cours :
Parité d'une fonction rationnelle

Exercices :
Exercice B.12

On considère la fraction rationnelle F suivante :

$$F(x) = \frac{8x^2}{(4+x^2)(x^2-4)}$$

Cette fonction est définie sur $\mathcal{D}_F = \mathrm{I\!R} \setminus \{-2; 2\}$, d'où si $x \in \mathcal{D}_F$, alors $-x$ est aussi dans $\mathcal{D}_F$. De plus, on remarque que, pour tout x de $\mathcal{D}_F$, on a : $F(-x) = F(x)$. Donc F est paire.

Par ailleurs, on vérifie aisément que F est irréductible et que sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

L'égalité "$F(-x) = F(x)$" se traduit, en utilisant la forme de décomposition précédente par :

$$\frac{A \times (-x) + B}{(-x)^2+4} + \frac{C}{-x-2} + \frac{D}{-x+2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.19
Une fonction paire

D'où :

$$\frac{-Ax+B}{x^2+4} - \frac{C}{x+2} - \frac{D}{x-2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

En identifiant les coefficients associés aux mêmes pôles des deux côtés de l'égalité, on en déduit :

$$\begin{cases} -A = A \\ B = B \\ -C = D \\ -D = C \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ D = -C \end{cases}$$

Ainsi, la décomposition de F en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} - \frac{C}{x+2}$$

Il n'y a donc plus que 2 coefficients (au lieu de 4) à déterminer avec les méthodes exposées précédemment.

On trouve par exemple B en prenant la valeur en $x = 2i$ du produit $(x^2+4) \times F(x)$. On a alors : $B = 4$.
De même, en considérant le produit $(x-2) \times F(x)$ en $x = 2$, on obtient : $C = 1$.

Finalement :

$$F(x) = \frac{4}{x^2+4} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

Exercice B.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi ”Exercice B.1” depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi ”Exercice B.1” de l’exemple A.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l’un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2 Pôles réels simples : fin de l'exemple

Cours :
Pôles réels simples

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4

Exercices :
Exercice B.3

Déterminer les coefficients B , C et D dans la décomposition de la fraction rationnelle étudiée en exemple :

$$F(x) = \frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3 Pôles réels simples : un QCM

Cours :
Pôles réels simples

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4

Documents :
Document C.1.1

Déterminer la **FORME** de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante (on ne cherchera les coefficients apparaissant dans cette décomposition que dans un deuxième temps) :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)}$$

- Réponse a : $F(x) = x^2 + x + 1$
- Réponse b : $F(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$
- Réponse c : $F(x) = x^2 + 4x + 7 + \frac{B}{x-1}$
- Réponse d : $F(x) = x^2 + 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

Rappel : on peut revoir le plan à suivre pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples dans la partie ”Documents” de cette ressource (cf. lien ci-dessus).

Déterminer la valeur du coefficient B associé au pôle réel simple $x = 1$.

$B = 1$ $\qquad$ $B = -1$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4 Pôles réels multiples : techniques 1 et 2

Cours :
Pôles réels multiples (technique 1)
Pôles réels multiples (technique 2)

Exemples :
Exemple A.5
Exemple A.6
Exemple A.7
Exemple A.8
Exemple A.9

Déterminer à l'aide des techniques de recherche de coefficients développées jusqu'à présent la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{8x^2 + 16x + 11}{(x+3)^2(x-2)}$$

Solution pas à pas :
- Forme de la décomposition
- Calcul des coefficients

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5 Pôles réels multiples : techniques 1, 2 et 3

Cours :
Pôles réels multiples (technique 1)
Pôles réels multiples (technique 2)
Pôles réels multiples (technique 3)

Exemples :
Exemple A.5
Exemple A.6
Exemple A.7
Exemple A.8
Exemple A.9
Exemple A.10
Exemple A.11

Déterminer à l'aide des techniques de recherche de coefficients développées jusqu'à présent la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x^3 + x^2 - 15x + 14}{(x+2)^2(x^2+1)}$$

Solution pas à pas :
- Forme de la décomposition
- Calcul des coefficients

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6 Division suivant les puissances croissantes

Cours :
Division de polynômes suivant les puissances croissantes

Exemples :
Exemple A.12

Effectuer la division à l'ordre 2 suivant les puissances croissantes du polynôme $P_1(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ par le polynôme $P_2(x) = x + 2$.

Solution pas à pas :
- Première étape de la division
- Division complète

Exercice B.7 Pôles réels multiples : technique 4 - cas simple

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.14
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.8
Exercice B.9

Appliquer la quatrième technique de recherche des coefficients relatifs aux pôles réels multiples pour trouver la décomposition en éléments simples de :

$$F(x) = \frac{1}{(x+4)(x+5)^2}$$

Solution pas à pas :
- Changement de variable
- Division suivant les puissances croissantes
- Décomposition de F

Reprenez la recherche de la décomposition en éléments simples de F en utilisant les techniques 1 et 2 cette fois-ci, puis comparez les deux résolutions.

Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.8 Pôles réels multiples : technique 4 - cas "normal"

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.14
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.9

Appliquer la quatrième technique de recherche des coefficients relatifs aux pôles réels multiples pour trouver la décomposition en éléments simples de :

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^3}$$

Solution pas à pas :
- Changement de variable
- Division suivant les puissances croissantes
- Décomposition de F

On pourra ensuite essayer de retrouver la décomposition de $F(x)$ à l'aide des techniques 1, 2 et 3 afin de se rendre compte que, pour une telle fraction, la quatrième technique est moins couteuse en terme de calculs...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.9 Pôles réels multiples : technique 4 - cas complet

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Exemples :
Exemple A.13
Exemple A.14
Exemple A.15

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8

Appliquer la quatrième technique de recherche des coefficients relatifs aux pôles réels multiples (ici au pôle $x = 2$) pour trouver la décomposition en éléments simples de :

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 11x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 4x - 26}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

sachant que le dénominateur s'écrit sous forme développée :

$$(x-2)^3(x+1)^2 = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$$

Solution pas à pas :

- Calculs précédant la recherche des coefficients
- Changement de variable
- Division suivant les puissances croissantes
- Décomposition de F

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On pourra ensuite essayer de retrouver la décomposition de $F(x)$ à l'aide des techniques 1, 2 et 3 afin de se rendre compte que, pour une telle fraction, la quatrième technique est moins couteuse en terme de calculs...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.10 Pôles complexes simples

Cours :
Pôles complexes simples

Exemples :
Exemple A.16
Exemple A.17

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante en utilisant la technique relative aux pôles complexes conjugués d'ordre 1 :

$$F(x) = \frac{4x^3 + 6x^2 + 7x + 12}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Solution pas à pas :

– Calculs précédant la recherche des coefficients
– Recherche des coefficients

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.11 Pôles complexes multiples

Cours :
Pôles complexes multiples

Exemples :
Exemple A.18

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante en utilisant la technique relative aux pôles complexes conjugués multiples :

$$F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{(x^2 + 1)^4}$$

Solution pas à pas :
- Considérations précédant la recherche des coefficients
- Recherche des coefficients

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.12 Une fonction impaire

Cours :
Parité d'une fonction rationnelle

Exemples :
Exemple A.19

On cherche à décomposer la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x^5(x^2 - 1)}$$

Vérifier que cette fonction est impaire, et exploiter cette propriété pour déterminer sa décomposition en éléments simples.

Solution pas à pas :
- Etude de la parité
- Forme de la décomposition
- Exploitation de la parité
- Recherche des coefficients

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.1 Compléments

Document C.1.1 Plan de la décomposition en éléments simples

Cours :
Pré-requis

Exercices :
Exercice B.3

Soit F une **fraction rationnelle quelconque**, alors F se décompose en éléments simples selon les étapes suivantes :

1. On commence par s'assurer que la fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est irréductible, c'est à dire que le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$ n'ont pas de zéro commun.
   Le cas échéant, on simplifie la fraction pour qu'elle soit irréductible.
2. Si le degré du numérateur $P(x)$ est supérieur ou égal au degré du dénominateur $Q(x)$, on calcule la partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle par division euclidienne. Pour cela, P et Q doivent être écrits sous forme développée. (Si le degré de P est strictement inférieur au degré de Q, la partie entière de F est nulle et on passe directement à l'étape suivante).
   La fraction F s'écrit alors comme une somme entre un polynôme $E(x)$ de degré égal à $\deg P - \deg Q$ et une fraction rationnelle de numérateur $R(x)$ (reste de la division euclidienne) de degré strictement inférieur au dénominateur $Q(x)$:
$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

3. On factorise alors le dénominateur $Q(x)$ à l'aide de polynômes irréductibles, c'est à dire de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 et de discriminant négatif.
4. On dresse, à partir de cette factorisation, la liste des pôles, en précisant s'ils sont réels ou complexes et en donnant leurs ordres de multiplicité.
5. On décompose la fraction $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en une somme d'éléments simples de première et de deuxième espèce selon le théorème particulier du paragraphe précédent.

Document C.1.2 Justification de la "quatrième technique"

Cours :
Pôles réels multiples (technique 4)

Reprenons les notations du paragraphe "Pôles réels multiples : quatrième technique", c'est à dire :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} \qquad \text{avec } Q_1(a) \neq 0$$

où F est une fraction rationnelle irréductible et de partie entière nulle.

Sachant que a est un pôle réel d'ordre n, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{R(x)}{Q_1(x)} \text{ avec } \deg R < \deg Q_1$$

En posant $X = x - a$, on a alors :

$$F(X+a) = \frac{P(X+a)}{X^n Q_1(X+a)} = \frac{A_1}{X} + \frac{A_2}{X^2} + \cdots + \frac{A_n}{X^n} + \frac{R(X+a)}{Q_1(X+a)}$$

D'où, en multipliant par X^n :

$$\frac{P(X+a)}{Q_1(X+a)} = A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \cdots + A_n + X^n \frac{R(X+a)}{Q_1(X+a)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ou encore, en mulipliant cette fois-ci par $Q_1(X+a)$:

$$P(X+a) = Q_1(X+a) \times \Big(\underbrace{A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \cdots + A_n}_{q(X)}\Big) + X^n \underbrace{R(X+a)}_{r(X)}$$

Par unicité du quotient $q(X)$ et du reste $r(X)$ dans la division suivant les puissances croissantes de deux polynômes, le polynôme $q(X)$ défini ci-dessus (donc de degré inférieur ou égal à $n-1$) est le quotient de la division suivant les puissances croissantes et à l'ordre $n-1$ de $P(X+a)$ par $Q_1(X+a)$. Or, les coefficients de chaque monôme de $q(X)$ correspondent aux coefficients associés aux éléments simples de pôle $x=a$ dans la décomposition de $F(x)$: on a ainsi justifié l'affirmation faite dans le dernier point de la quatrième technique exposée dans ce cours.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Solutions des exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.1 Pôles réels simples : fin de l'exemple (1)

Exercices :
Exercice B.2

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

– Le produit $(x-1) \times F(x)$ donne :

$$\frac{-x^3 - 5x^2 + 22x + 44}{(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-1)}{x+3} + B + \frac{C(x-1)}{x-2} + \frac{D(x-1)}{x+2}$$

En prenant alors $x = 1$, on en déduit :

$$\frac{60}{-12} = 0 + B + 0 + 0 \Longleftrightarrow B = -5$$

– De même, le produit $(x-2) \times F(x)$ pris en $x = 2$ donne : $C = 3$
– Et le produit $(x+2) \times F(x)$ pris en $x = -2$ donne : $D = -1$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{5}{x-1} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.2 Pôles réels simples : un QCM (1)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)}$$

Forme choisie pour la décomposition :

$$F(x) = x^2 + x + 1$$

Votre réponse est fausse : si vous n'avez pas répondu complètement au hasard, c'est que vous avez certainement fait l'erreur classique (mais grave !) consistant à dire que $\frac{x^4+1}{x+1} = x^3 + 1$. A partir de là, vous avez divisé $x^3 + 1$ par $x - 1$ pour obtenir finalement $x^2 + x + 1$.

Vous auriez du vous rendre compte par vous-même que cette proposition est fausse en remarquant par exemple que $F(0) = -1$ d'après la première formule, tandis que $F(0) = 1$ si on utilise la réponse proposée.

A la lumière de ces explications, tâchez de trouver maintenant la bonne réponse.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.3 Pôles réels simples : un QCM (12)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4 + 1}{(x+1)(x-1)}$$

Forme choisie pour la décomposition :

$$F(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Votre réponse est fausse : en effet, vous avez oublié de déterminer la partie entière de $F(x)$ qui est non nulle puisque le numérateur de F a un degré supérieur à celui du dénominateur.

A la lumière de ces explications, tâchez de trouver maintenant la bonne réponse.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.4 Pôles réels simples : un QCM (3)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)}$$

Forme choisie pour la décomposition :

$$F(x) = x^2 + 4x + 7 + \frac{B}{x-1}$$

Votre réponse est fausse : si vous n'avez pas répondu complètement au hasard, c'est que vous avez certainement fait l'erreur classique (mais grave !) consistant à dire que $x^4 + 1 = (x+1)^4$. A partir de là, vous avez simplifié le numérateur et le dénominateur de $F(x)$ par $x+1$, puis vous avez divisé $(x+1)^3$ par $x-1$ pour obtenir une partie entière égale à x^2+4x+7 et un seul pôle réel simple $(x=1)$.

A la lumière de ces explications, tâchez de trouver maintenant la bonne réponse.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.5 Pôles réels simples : un QCM (4)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)}$$

Forme choisie pour la décomposition :

$$F(x) = x^2 + 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Votre réponse est correcte : en effet, $F(x)$ est irréductible car les pôles $x = 1$ et $x = -1$ n'annulent pas le numérateur de $F(x)$. De plus, $F(x)$ admet une partie entière non nulle car le numérateur a un degré plus élevé que celui du dénominateur. La division euclidienne de $x^4 + 1$ par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ donne alors :

$$F(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

La fraction $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ admet $x = -1$ et $x = 1$ comme pôles réels simples, donc la décomposition de $F(x)$ en éléments simples est finalement bien de la forme :

$$F(x) = x^2 + 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Document C.2.6 Pôles réels simples : un QCM (5)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)} = x^2+1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

Valeur choisie pour le coefficient B : $B = 1$

Votre réponse est correcte : pour obtenir B, on multiplie $F(x)$ par $x-1$:

$$(x-1)\times F(x) = \frac{x^4+1}{x+1} = (x^2+1)(x-1)+\frac{A(x-1)}{x+1}+B$$

Puis on choisit $x = 1$:

$$\frac{2}{2} = 0+0+B \Longleftrightarrow B = 1$$

De façon analogue, on obtient $A = -1$ en considérant le produit $(x+1)\times F(x)$.
Ainsi :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)} = x^2+1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.7 Pôles réels simples : un QCM (6)

Exercices :
Exercice B.3

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^4+1}{(x+1)(x-1)} = x^2+1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

Valeur choisie pour le coefficient B : $B = -1$

Votre réponse est fausse : si vous n'avez pas répondu complètement au hasard, c'est que vous avez certainement fait l'erreur classique consistant à multiplier $F(x)$ par $x-1$ et à "**oublier**" à cette occasion de multiplier également la partie entière par $x-1$, avant de choisir $x = 1$. Formellement, vous avez du écrire :

$$(x-1)\times F(x) = \frac{x^4+1}{x+1} = x^2+1+\frac{A(x-1)}{x+1}+B$$

au lieu de

$$(x-1)\times F(x) = \frac{x^4+1}{x+1} = (x^2+1)(x-1)+\frac{A(x-1)}{x+1}+B$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.8 Pôles réels multiples : techniques 1 et 2 (1)

Exercices :
Exercice B.4

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{8x^2 + 16x + 11}{(x+3)^2(x-2)}$$

Forme de la décomposition : on commence par remarquer que F est irréductible, car les zéros du dénominateur $Q(x)$ sont $x = -3$ et $x = 2$ et car $P(-3) = 35 \neq 0$ et $P(2) = 75 \neq 0$.
De plus, la partie entière de $F(x)$ est nulle, car le degré de $P(x)$ est strictement inférieur au degré de $Q(x)$.
Enfin, comme les pôles sont $x = -3$ d'ordre 2 et $x = 2$ d'ordre 1, alors la décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.9 Pôles réels multiples : techniques 1 et 2 (2)

Exercices :
Exercice B.4

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{8x^2 + 16x + 11}{(x+3)^2(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Recherche des coefficients :

- Le produit $(x+3)^2 \times F(x)$ pris en $x = -3$ donne : $B = -7$
- Le produit $(x-2) \times F(x)$ pris en $x = -3$ donne : $C = 3$
- La limite du produit $x \times F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ donne : $8 = A + C$, c'est à dire $A = 5$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{5}{x+3} - \frac{7}{(x+3)^2} + \frac{3}{x-2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.10 Pôles réels multiples : techniques 1, 2 et 3 (1)

Exercices :
Exercice B.5

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + x^2 - 15x + 14}{(x+2)^2(x^2+1)}$$

Forme de la décomposition : on commence par remarquer que F est irréductible, car les zéros du dénominateur $Q(x)$ sont $x = -2$, $x = i$ et $x = -i$ et car $P(-2) = 40 \neq 0$, $P(i) = 13 - 16i \neq 0$ et $P(-i) = 13 + 16i \neq 0$.
De plus, la partie entière de $F(x)$ est nulle, car le degré de $P(x)$ est strictement inférieur au degré de $Q(x)$.
Enfin, comme les pôles sont $x = -2$ réel d'ordre 2 et $x = \pm i$ complexes conjugués d'ordre 1, alors la décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.11 Pôles réels multiples : techniques 1, 2 et 3 (2)

Exercices :
Exercice B.5

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + x^2 - 15x + 14}{(x+2)^2(x^2+1)}$$

Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Recherche des coefficients :

- Le produit $(x+2)^2 \times F(x)$ pris en $x = -2$ donne : $B = 8$
- La limite du produit $x \times F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ donne : $1 = A + C$
- La valeur de $F(x)$ pour $x = 0$ donne : $\frac{14}{4} = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + D \iff A + 2D = 3$
- La valeur de $F(x)$ pour $x = -1$ donne : $\frac{29}{2} = A + B + \frac{-C+D}{2} \iff 2A - C + D = 13$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} A + C = 1 \\ A + 2D = 3 \\ 2A - C + D = 13 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} C = 1 - A \\ D = \frac{3-A}{2} \\ 2A - (1-A) + \frac{3-A}{2} = 13 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} C = -4 \\ D = -1 \\ A = 5 \end{array}\right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement :

$$F(x) = \frac{5}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{4x+1}{x^2+1}$$

Remarque : on pourra résoudre cet exercice différemment après la lecture du paragraphe III.2 (Pôles complexes conjugués d'ordre 1).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.12 Division suivant les puissances croissantes (1)

Exercices :
Exercice B.6

Posons le **début** de la division de $P_1(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ par $P_2(x) = x + 2$ suivant les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{cccc|l}
2 & & +2x^2 & +x^3 & 2+x \\
\cline{5-5}
-(2 & +x) & & & 1 \\
\cline{1-2}
\smile & -x & +2x^2 & +x^3 &
\end{array}
$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.13 Division suivant les puissances croissantes (2)

Exercices :
Exercice B.6

Posons la division de $P_1(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ par $P_2(x) = x + 2$ suivant les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{cccc|l}
2 & & +2x^2 & +x^3 & 2+x \\ \cline{5-5}
-(2 & +x) & & & 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{4} \\ \cline{1-2}
\smile & -x & +2x^2 & +x^3 & \\
 & -(-x & -\frac{x^2}{2}) & & \\ \cline{2-3}
 & \smile & \frac{5x^2}{2} & +x^3 & \\
 & & -(\frac{5x^2}{2} & +\frac{5x^3}{4}) & \\ \cline{3-4}
 & & & -\frac{x^3}{4} &
\end{array}
$$

Ainsi, à l'ordre 2, on a :

$$2 + 2x^2 + x^3 = (2+x)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{4}\right) + x^3\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.14 Pôles réels multiples : technique 4 - cas simple (1)

Exercices :
Exercice B.7

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{1}{(x+4)(x+5)^2}$$

Changement de variable : on remarque tout d'abord que F est irréductible et que sa partie entière est nulle. De plus, F admettant $x = -5$ comme pôle réel multiple (d'ordre 2), on pose $X = x + 5$ et on remplace x par $X - 5$ dans $F(x)$. On a ainsi :

$$F(X-5) = \frac{1}{(X-5+4)X^2} = \frac{1}{(X-1)X^2}$$

Il faut alors dans un deuxième temps poser la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 1 du numérateur 1 par le facteur $X - 1$ du dénominateur...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.15 Pôles réels multiples : technique 4 - cas simple (2)

Exercices :
Exercice B.7

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{1}{(x+4)(x+5)^2}$$

Changement de variable : $X = x + 5$ d'où $F(X-5) = \frac{1}{(X-1)X^2}$.

Division suivant les puissances croissantes : on pose la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 1 de 1 par $X - 1$. On a :

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & & & -1+X \\ \cline{4-4}
-(1 & -X) & & -1-X \\ \cline{1-2}
\smile & X & & \\
& -(X & -X^2) & \\ \cline{2-3}
& \smile & X^2 &
\end{array}
$$

On a donc :

$$1 = (X-1) \times (-X-1) + X^2 \times 1$$

Il reste à remplacer cette expression au numérateur de $F(X-5)$ pour obtenir la décomposition en éléments simples de $F(x)$...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.16 Pôles réels multiples : technique 4 - cas simple (3)

Exercices :
Exercice B.7

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{1}{(x+4)(x+5)^2}$$

Changement de variable : $X = x+5$ d'où $F(X-5) = \frac{1}{(X-1)X^2}$.

Division suivant les puissances croissantes : $1 = (X-1) \times (-X-1) + X^2 \times 1$

Décomposition de F : il reste à remplacer l'expression précédente au numérateur de $F(X-5)$. On a :

$$F(X-5) = \frac{(X-1)\times(-X-1) + X^2 \times 1}{(X-1)X^2} = \frac{-X-1}{X^2} + \frac{1}{X-1}$$

D'où :

$$F(X-5) = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X-1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et finalement, en revenant à x à l'aide du changement de variable $X = x + 5$:

$$F(x) = -\frac{1}{x+5} - \frac{1}{(x+5)^2} + \frac{1}{x+4}$$

C'est la décomposition de F en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.17 Pôles réels multiples : technique 4 - cas simple (4)

Exercices :
Exercice B.7

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{1}{(x+4)(x+5)^2}$$

Avec les techniques 1 et 2, on procède de la façon suivante : on commence également par remarquer que F est irréductible et a une partie entière nulle. On constate ensuite qu'elle admet $x = -4$ comme pôle réel simple et $x = -5$ comme pôle réel double. On peut en déduire la forme de sa décomposition :

$$F(x) = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2}$$

On détermine alors la valeur des coefficients :

- Le produit $(x+4) \times F(x)$ pris en $x = -4$ donne : $A = 1$.
- Le produit $(x+5)^2 \times F(x)$ pris en $x = -5$ donne : $C = -1$.
- La limite, quand x tend vers $+\infty$ du produit $x \times F(x)$ donne : $0 = A + B \iff B = -A = -1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On retrouve donc bien les mêmes coefficients. Les calculs avec les techniques 1 et 2 sont, pour cette fraction, plus rapides et plus simples que ceux faits avec la quatrième technique : on a effectivement introduit dans le cours la quatrième technique en disant que les techniques 1, 2 et 3 commençaient à être inadéquates lorsqu'on travaille avec une fraction rationnelle admettant un pôle réel d'ordre de multplicité **élevé**. Ce n'était pas le cas ici…

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.18 Pôles réels multiples : technique 4 - cas "normal" (1)

Exercices :
Exercice B.8

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^3}$$

Changement de variable : on remarque tout d'abord que F est irréductible et que sa partie entière est nulle. De plus, F admettant $x=-1$ comme pôle réel multiple (d'ordre 3), on pose $X = x+1$ et on remplace x par $X-1$ dans $F(x)$. On a ainsi :

$$F(X-1) = \frac{X-1}{([X-1]^2+1)X^3} = \frac{X-1}{(X^2-2X+2)X^3}$$

Il faut alors dans un deuxième temps poser la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 du numérateur $X-1$ par le facteur X^2-2X+2 du dénominateur...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.19 Pôles réels multiples : technique 4 - cas ”normal” (2)

Exercices :
Exercice B.8

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^3}$$

Changement de variable : $X = x + 1$ d'où $F(X-1) = \frac{X-1}{(X^2-2X+2)X^3}$.

Division suivant les puissances croissantes : on pose la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $X-1$ par X^2-2X+2 . On a :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-1 & +X & & & & 2-2X+X^2 \\ \cline{6-6}
-(1 & +X & -\frac{X^2}{2}) & & & -\frac{1}{2}+\frac{X^2}{4} \\ \cline{1-3}
\smile & \smile & \frac{X^2}{2} & & & \\
 & & -(\frac{X^2}{2} & -\frac{X^3}{2} & +\frac{X^4}{4}) & \\ \cline{3-5}
 & & \smile & \frac{X^3}{2} & -\frac{X^4}{4} &
\end{array}$$

On a donc :

$$X-1 = (X^2-2X+2) \times \left(\frac{X^2}{4} - \frac{1}{2}\right) + X^3 \times \left(-\frac{X}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Il reste à remplacer cette expression au numérateur de $F(X-1)$ pour obtenir la décomposition en éléments simples de $F(x)$...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.20 Pôles réels multiples : technique 4 - cas "normal" (3)

Exercices :
Exercice B.8

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^3}$$

Changement de variable : $X = x+1$ d'où $F(X-1) = \frac{X-1}{(X^2-2X+2)X^3}$.

Division suivant les puissances croissantes :

$$X-1 = (X^2-2X+2)\times\left(\frac{X^2}{4}-\frac{1}{2}\right)+X^3\times\left(-\frac{X}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

Décomposition de F : il reste à remplacer l'expression précédente au numérateur de $F(X-1)$. On a :

$$\begin{aligned} F(X-1) &= \frac{(X^2-2X+2)\times\left(\frac{X^2}{4}-\frac{1}{2}\right)+X^3\times\left(-\frac{X}{4}+\frac{1}{2}\right)}{(X^2-2X+2)X^3} \\ &= \frac{\frac{X^2}{4}-\frac{1}{2}}{X^3} + \frac{-\frac{X}{4}+\frac{1}{2}}{X^2-2X+2} \\ &= \frac{1}{4X} - \frac{1}{2X^3} + \frac{-X+2}{4(X^2-2X+2)} \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Et finalement, en revenant à x à l'aide du changement de variable $X = x + 1$:

$$F(x) = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^3} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)}$$

C'est la décomposition de F en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.21 Pôles réels multiples : technique 4 - cas complet (1)

Exercices :
Exercice B.9

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 11x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 4x - 26}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients : on vérifie aisément que la fraction F est irréductible (c'est à dire que 2 et -1 n'annulent pas le numérateur). Le numérateur a un degré supérieur à celui du dénominateur, donc F admet une partie entière non nulle. Déterminons-la par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -x^5 & -11x^4 & +14x^3 & +26x^2 & +4x & -26 & x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 \\ \cline{8-8}
-(x^6 & -4x^5 & +x^4 & +10x^3 & -4x^2 & -8x) & & x+3 \\ \cline{1-6}
\smile & 3x^5 & -12x^4 & +4x^3 & +30x^2 & +12x & -26 & \\
 & -(3x^5 & -12x^4 & +3x^3 & +30x^2 & -12x & -24) & \\ \cline{2-7}
 & \smile & \smile & x^3 & & +24x & -2 &
\end{array}$$

On a donc :

$$F(x) = x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{x^3 + 24x - 2}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.22 Pôles réels multiples : technique 4 - cas complet (2)

Exercices :
Exercice B.9

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 11x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 4x - 26}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients :

$$F(x) = x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{x^3 + 24x - 2}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Changement de variable : F admettant $x = 2$ comme pôle réel multiple (d'ordre 3), on pose $X = x - 2$ et on remplace x par $X + 2$ dans $\boldsymbol{F_1(x)}$ **(et non pas dans** $\boldsymbol{F(x)}$**)** . On a ainsi :

$$F_1(X+2) = \frac{(X+2)^3 + 24(X+2) - 2}{X^3(X+2+1)^2} = \frac{X^3 + 6X^2 + 36X + 54}{X^3(X+3)^2}$$

Il faut alors dans un deuxième temps poser la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 du numérateur $X^3 + 6X^2 + 36X + 54$ par le facteur $(X+3)^2 = X^2 + 6X + 9$ du dénominateur…

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.23 Pôles réels multiples : technique 4 - cas complet (3)

Exercices :
Exercice B.9

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 11x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 4x - 26}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients :

$$F(x) = x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{x^3 + 24x - 2}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Changement de variable : $X = x - 2$ d'où $F_1(X+2) = \frac{X^3+6X^2+36X+54}{X^3(X+3)^2}$

Division suivant les puissances croissantes : on pose la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $X^3 + 6X^2 + 36X + 54$ par $X^2 + 6X + 9$. On a :

$$\begin{array}{rrrr|l} 54 & +36X & +6X^2 & +X^3 & 9 + 6X + X^2 \\ \cline{5-5} -(54 & +36X & +6X^2) & & 6 \\ \cline{1-3} \smile & \smile & \smile & +X^3 & \end{array}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a donc :

$$X^3 + 6X^2 + 36X + 54 = (X^2 + 6X + 9) \times 6 + X^3 \times 1$$

Il reste à remplacer cette expression au numérateur de $F_1(X+2)$ pour obtenir la décomposition en éléments simples de $F(x)$...

Document C.2.24 Pôles réels multiples : technique 4 - cas complet (4)

Exercices :
Exercice B.9

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 11x^4 + 14x^3 + 26x^2 + 4x - 26}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients :

$$F(x) = x + 3 + F_1(x) \qquad \text{avec } F_1(x) = \frac{x^3 + 24x - 2}{(x-2)^3(x+1)^2}$$

Changement de variable : $X = x - 2$ d'où $F_1(X+2) = \frac{X^3+6X^2+36X+54}{X^3(X+3)^2}$

Division suivant les puissances croissantes :

$$X^3 + 6X^2 + 36X + 54 = (X^2 + 6X + 9) \times 6 + X^3 \times 1$$

Décomposition de F : il reste à remplacer l'expression précédente au numérateur de $F_1(X+2)$, puis à revenir à x à l'aide du changement de variable $X = x - 2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a :

$$\begin{aligned} F_1(X+2) &= \tfrac{(X^2+6X+9)\times 6+X^3\times 1}{X^3(X+3)^2} = \tfrac{6}{X^3} + \tfrac{1}{(X+3)^2} \\ &= \tfrac{6}{(x-2)^3} + \tfrac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Et finalement, en ajoutant la partie entière, on a :

$$F(x) = x + 3 + \frac{6}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

C'est la décomposition de F en éléments simples.

Document C.2.25 Pôles complexes simples (1)

Exercices :
Exercice B.10

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^3 + 6x^2 + 7x + 12}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients : il faut commencer par factoriser le dénominateur $Q(x)$ à l'aide de polynômes réels irréductibles. Pour cela, on pose $X = x^2$ de sorte qu'on est amené à factoriser le polynôme du second degré :

$$X^2 + 5X + 4$$

de discriminant $\Delta = 9$ et de racines $X = -1$ et $X = -4$. Ainsi :

$$X^2 + 5X + 4 = (X + 1)(X + 4)$$

Par conséquent, en revenant à x, on obtient la factorisation du dénominateur :

$$Q(x) = x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ce dénominateur Q admet donc d'une part $x = i$ et $x = -i$, et d'autre part $x = 2i$ et $x = -2i$, comme pôles complexes conjugués d'ordre 1 chacun.

On peut alors vérifier que F est irréductible, car :

$$P(i) = 6+3i \neq 0 \quad P(-i) = 6-3i \neq 0 \quad P(2i) = -12-18i \neq 0 \quad P(-2i) = -12+18i$$

Enfin, la partie entière de F étant nulle, sa décomposition en éléments simples **dans $\mathbb{R}$** est de la forme :

$$F(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.26 Pôles complexes simples (2)

Exercices :
Exercice B.10

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^3 + 6x^2 + 7x + 12}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Calculs précédant la recherche des coefficients :

$$F(x) = \frac{4x^3 + 6x^2 + 7x + 12}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Recherche des coefficients : on considère tout d'abord le produit $(x^2+1)\times F(x)$ pour $x = i$. On en déduit :

$$Ai + B = \frac{6+3i}{3} \iff A = 1 \text{ et } B = 2$$

Puis, on fait de même pour le produit $(x^2+4) \times F(x)$ avec $x = 2i$:

$$2Ci + D = \frac{-12-18i}{-3} \iff C = 3 \text{ et } D = 4$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement :

$$F(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + \frac{3x+4}{x^2+4}$$

Document C.2.27 Pôles complexes multiples (1)

Exercices :
Exercice B.11

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{(x^2+1)^4}$$

Considérations précédant la recherche des coefficients : on remarque que i et $-i$ sont les seuls zéros du dénominateur et qu'ils n'annulent pas le numérateur. Par conséquent, F est irréductible et admet $x = i$ et $x = -i$ comme (seuls) pôles complexes conjugués d'ordre 4.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.28 Pôles complexes multiples (2)

Exercices :
Exercice B.11

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{(x^2+1)^4}$$

Considérations précédant la recherche des coefficients : F est irréductible et admet $x = i$ et $x = -i$ comme (seuls) pôles complexes conjugués d'ordre 4.

Recherche des coefficients : on commence par poser la division euclidienne du numérateur $P(x)$ par le facteur x^2+1 du dénominateur :

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & +6x & -2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-(x^3 & & +x) & & x-3 \\ \cline{1-3}
\smile & -3x^2 & +5x & -2 & \\
& -(-3x^2 & & -3) & \\ \cline{2-4}
& \smile & 5x & +1 &
\end{array}$$

On en déduit : $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2+1) \times (x-3) + 5x + 1$, et donc :

$$F(x) = \frac{(x^2+1) \times (x-3) + 5x + 1}{(x^2+1)^4} = \frac{x-3}{(x^2+1)^3} + \frac{5x+1}{(x^2+1)^4}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Il s'agit de la décomposition en éléments simples de F, car les numérateurs sont de la forme $Ax + B$. Il n'y a donc pas d'éléments simples de dénominateur $x^2 + 1$ et $(x^2 + 1)^2$ dans cette décomposition, et une seule division euclidienne était ici suffisante pour aboutir à la décomposition en éléments simples...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.29 Une fonction impaire (1)

Exercices :
Exercice B.12

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x^5(x^2-1)}$$

Etude de la parité : la fonction F est définie sur $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Par conséquent, si $x \in \mathcal{D}_F$, alors $-x \in \mathcal{D}_F$. De plus, si $x \in \mathcal{D}_F$, alors :

$$F(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^5((-x)^2-1)} = \frac{x^2+1}{-x^5(x^2-1)} = -F(x)$$

Ainsi, F est une fonction impaire.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.30 Une fonction impaire (2)

Exercices :
Exercice B.12

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x^5(x^2-1)}$$

Etude de la parité : $F(-x) = -F(x)$, donc F est une fonction impaire.

Forme de la décomposition : comme $Q(x) = x^5(x+1)(x-1)$, alors les pôles de F sont $x = 0$ (d'ordre 5), $x = -1$ (d'ordre 1) et $x = 1$ (d'ordre 1). Ces valeurs n'annulent pas le numérateur $P(x)$, donc F est irréductible. De plus, comme le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de $F(x)$ est nulle. Finalement, la décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+1} + \frac{G}{x-1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.31 Une fonction impaire (3)

Exercices :
Exercice B.12

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x^5(x^2-1)}$$

Etude de la parité : $F(-x) = -F(x)$, donc F est une fonction impaire.

Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+1} + \frac{G}{x-1}$$

Exploitation de la parité : écrivons $F(-x)$ sous forme décomposée :

$$\begin{aligned} F(-x) &= \tfrac{A}{-x} + \tfrac{B}{(-x)^2} + \tfrac{C}{(-x)^3} + \tfrac{D}{(-x)^4} + \tfrac{E}{(-x)^5} + \tfrac{F}{-x+1} + \tfrac{G}{-x-1} \\ &= -\tfrac{A}{x} + \tfrac{B}{x^2} - \tfrac{C}{x^3} + \tfrac{D}{x^4} - \tfrac{E}{x^5} - \tfrac{F}{x-1} - \tfrac{G}{x+1} \end{aligned}$$

Comparons cette écriture à celle de $-F(x)$:

$$-F(x) = -\frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} - \frac{C}{x^3} - \frac{D}{x^4} - \frac{E}{x^5} - \frac{F}{x+1} - \frac{G}{x-1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par identification, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} -A = -A \\ B = -B \\ -C = -C \\ D = -D \\ -E = -E \\ -F = -G \\ -G = -F \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ D = 0 \\ F = G \end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+1} + \frac{F}{x-1}$$

Il ne reste plus que 4 coefficients à déterminer.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.32 Une fonction impaire (4)

Exercices :
Exercice B.12

Fraction rationnelle étudiée :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x^5(x^2-1)}$$

Etude de la parité : $F(-x) = -F(x)$, donc F est une fonction impaire.

Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+1} + \frac{G}{x-1}$$

Exploitation de la parité :

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+1} + \frac{F}{x-1}$$

Recherche des coefficients : on détermine les derniers coefficients avec les techniques développées auparavant.

– Le produit $x^5 \times F(x)$ pris en $x = 0$ donne : $E = -1$

- Le produit $(x+1) \times F(x)$ pris en $x = -1$ donne : $F = 1$
- La limite du produit $x \times F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ donne : $A + 2F = 0$ d'où $A = -2$
- La valeur de $F(x)$ pour $x = 2$ donne : $\frac{5}{32\times 3} = \frac{A}{2} + \frac{C}{8} + \frac{E}{32} + \frac{F}{3} + F$
  d'où : $\frac{5}{32\times 3} = -1 + \frac{C}{8} - \frac{1}{32} + \frac{1}{3} + 1$
  et donc : $C = -2$

Finalement :

$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

O

P

R

T

Index des notions

C

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents