Décomposition des fractions rationnelles

Cas des fractions rationnelles réelles

Johan MILLAUD

Département Génie Civil de l'IUT du Limousin

Mars 2006 – version 2

Table des matières

Chapitre I
Avant-propos

I.1 Navigation dans le cours

I.1.1 LaTeX et Polytex

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale Polytex.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

Polytex est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de Polytex intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Panneau de navigation Acrobat

Le cours électronique produit par Polytex est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Acrobat Reader. Les versions récentes de ce logiciel disposent d'un panneau de navigation dans lequel apparaît la structure hiérarchique du cours (affichage par signets). On peut ainsi accéder directement à une page quand on connait son emplacement dans le cours.

Cette technique de navigation, dite navigation physique, ne doit donc être utilisée que lorsqu'on connait déjà bien le cours et qu'on cherche une information particulière. Dans tous les autres cas, il est vivement conseillé de fermer ce panneau de navigation et d'utiliser les liens actifs et les systèmes de navigation propres au cours.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).
On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et la table des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◀ précédent" permet de revenir au grain sur le panneau de navigation Acrobat, et le lien "▶ suivant" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. (Quand il n'y a pas lieu de définir deux niveaux hiérarchiques, un chapitre peut être composés directement de grains). Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◀ précédent" et "▶ suivant" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain n'excède jamais (ou presque) deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◀◀ et ▶▶ situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans le cours. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1

Exercices :
Exercice B.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain est en général associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Dans certains grains ou exemples, on pourra trouver des renvois à des grains ou exemples antérieurs. Pour ne pas multiplier les renvois et ne pas perdre le lecteur, cela

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ne se produira que très occasionnellement lorsque les grains ou exemples auront des contenus fortement liés et qu'ils seront chronologiquement très éloignés. Ces renvois particuliers sont unilatéraux : il n'y a pas de renvois permettant d'accéder rapidement à un grain ou exemple ultérieur. Dans de tels cas de figure, il est nécessaire de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

I.1.5 Le menu de navigation

On a conseillé plus tôt de limiter l'utilisation du panneau de navigation d'Acobat Reader, surtout lors d'une première lecture. Cependant, même quand on connait bien le cours, et/ou quand on cherche une information précise, ce panneau n'est pas indispensable, car le cours possède son propre menu de navigation accessible depuis n'importe quelle page : c'est la liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit.

Ainsi, on peut à tout moment accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices.
On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : ce lien ne présente pas d'intérêt, car il conduit au sommaire des réponses aux questions à choix multiples présentes dans les différents exercices. On accèdera à ces réponses directement depuis les différents exercices.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, Polytex associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient. . .

I.2 Objectifs pédagogiques et choix didactiques

I.2.1 Objectifs pédagogiques

L'objectif principal de ce cours est de présenter le vocabulaire et les techniques permettant de décomposer les fractions rationnelles en éléments simples, en vue, par exemple, de calculer des primitives de telles fonctions. A l'issue de l'apprentissage, on doit être capable :

- De décrire les différentes étapes de la décomposition d'une fraction rationnelle avec un vocabulaire précis.
- De donner la forme de la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, de n'importe quelle fraction rationnelle de dénominateur aisément factorisable.
- D'effectuer la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, des fractions rationnelles ne possédant qu'un nombre limité de pôles aisément identifiables.

Le cours est construit comme une réponse argumentée à la question : "*comment peut-on décomposer une fraction rationnelle* compliquée *en une somme de fractions rationnelles plus* simples *?*". Ainsi, les termes techniques sont introduits, dans les deux premiers chapitres, afin de préciser le sens de cette question et de commencer à y répondre. Les considérations faites lors de l'établissement de ce vocabulaire conduisent, dans le dernier chapitre, aux théorèmes répondant à la question initiale.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Pré-requis

Ce cours est a priori accessible avec les outils mathématiques traditionnellement enseignés dans les filières scientifiques et techniques du Lycée. Plus particulièrement, la décomposition des fractions rationnelles réelles nécessite :

- Une bonne maîtrise du calcul algébrique élémentaire (calculs sur les fractions, identités remarquables, factorisations...) .
- Des connaissances de base sur les nombres complexes, et sur les notions de fonction et de domaine de définition.
- Des acquis solides concernant les polynômes à coefficient réels et leur manipulation (recherche de zéros et de leurs ordres de multiplicité, factorisation, division euclidienne...)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

On l'a évoqué auparavant : ce cours est construit comme une réponse argumentée à la question "*comment décomposer une fraction rationnelle compliquée en une somme de fractions rationnelles simples*". Cela signifie que les résultats énoncés ne sont pas démontrés rigoureusement mais seulement accompagnés d'éléments de justification.

D'un point de vue technique, on s'est borné à décomposer les fractions rationnelles dans $\mathbb{R}$: le lecteur curieux trouvera dans tout bon ouvrage sur le sujet le cas de la décomposition dans $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, une seule méthode (très basique) est proposée pour déterminer les valeurs des constantes apparaissant aux numérateurs des éléments simples : elle est suffisante pour décomposer des fractions rationnelles de dénominateurs de degré peu élevé. Dans les autres cas, on renvoie encore à la lecture d'ouvrages plus académiques.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Choix didactiques

La bonne appropriation des notions est contrôlée et validée au fur et à mesure de l'apprentissage lors de la recherche des exercices : ces exercices se présentent, pour la plupart, sous la forme de questions à choix multiples. Les choix correspondant à des réponses erronées peuvent traduire soit une difficulté conceptuelle identifiée, soit une erreur de calcul fréquemment commise. Dans les deux cas, des explications sont fournies pour surmonter l'obstacle rencontré et permettre, le cas échéant, de déterminer la bonne réponse. Cette bonne réponse est également accompagnée d'explications afin de s'assurer qu'elle a été choisie pour les bonnes raisons.

Pour chaque notion, le nombre d'exercices associés est limité (1 ou 2 suivant les cas) : dans un objectif de mémorisation à long terme, il est conseillé de chercher des exercices supplémentaires dans des recueils par exemple.

En fin d'apprentissage, on peut tester la solidité de ses connaissances à l'aide d'un QCM d'évaluation développé à l'aide du logiciel Calliope et accessible depuis le site d'IUTenLigne.

Attention, la recherche des exercices demande en général quelques calculs. Le travail sur ordinateur ne rend pas complètement obsolète le travail sur papier : on se munira donc d'une feuille, d'un crayon et éventuellement d'une calculatrice pour résoudre les exercices. En particulier, on évitera de cliquer au hasard sur les réponses proposées : il serait illusoire d'espérer apprendre quoi que ce soit de cette façon-là !

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.5 Temps d'apprentissage

L'un des grands avantages de l'enseignement en autonomie est de permettre à chacun d'évoluer à son rythme. Le temps d'apprentissage donné ici est donc purement indicatif et dépend en réalité fortement du niveau d'acquisition des pré-requis (notamment en ce qui concerne la manipulation des polynômes).
Grossièrement donc, on estime la lecture de cette ressource (incluant la recherche active des exercices) à une demi-journée de travail.
De plus, on pourra consacrer une heure supplémentaire à l'évaluation finale proposée par ailleurs sur le site d'IUTenLigne.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre II
Fraction rationnelle

II.1 Définition et objectifs

Exemples :
Exemple A.2

Documents :
Document C.1.1

Une **fraction rationnelle (réelle)** est une fonction du type

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes (à coefficients réels).

Une fraction rationnelle peut être lourde à manipuler dans certains calculs, en particulier quand elle est constituée d'un numérateur et d'un dénominateur de degrés élevés. L'objectif de ce cours est d'apprendre à décomposer des fractions rationnelles "compliquées" en une somme de fractions rationnelles plus "simples".
De telles décompositions permettent par exemple de trouver les primitives de fonctions rationnelles "compliquées" (cf. exemple en lien ci-dessus) ou de résoudre des équations différentielles linéaires à l'aide, également, de la transformée de Laplace (cf. lien vers la partie "Documents").

Remarque : comme on l'a expliqué dans les avant-propos, on a fait le choix de ne travailler ici qu'avec des fractions rationnelles réelles.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Fraction rationnelle irréductible

Exemples : Exemple A.3
Exercices : Exercice B.2
Documents : Document C.1.2

Avant de chercher à décomposer une fraction rationnelle, il faut s'assurer qu'on a réellement affaire à une fraction rationnelle "compliquée". En effet, tout comme les fractions de nombres entiers, les fractions rationnelles peuvent se simplifier par simple comparaison du numérateur et du dénominateur.

Rappelons que, pour une fraction de nombres entiers, si le numérateur et le dénominateur sont des multiples d'un même nombre, alors la fraction se simplifie selon l'exemple suivant :

$$\frac{42}{70} = \frac{2 \times 21}{2 \times 35} = \frac{21}{35} = \frac{7 \times 3}{7 \times 5} = \frac{3}{5}$$

De la même façon, si le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$ d'une fraction rationnelle $F(x)$ sont des multiples d'un même polynôme $M(x)$, alors on peut simplifier cette fraction :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M(x) \times P_1(x)}{M(x) \times Q_1(x)} \Longrightarrow F(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Dans une telle situation, on constate que les zéros (réels et complexes) de $M(x)$ annulent à la fois le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On dira donc qu'**une fraction rationnelle $F(x)$ est irréductible si le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$ de cette fraction n'ont pas de zéro commun**. Une fraction rationnelle irréductible ne peut pas se "simplifier".

Au contraire, si le numérateur et le dénominateur ont un ou des zéros réels ou complexes communs, alors on peut factoriser le numérateur et le dénominateur de $F(x)$ par un même polynôme, puis "simplifier" $F(x)$ qui n'est donc pas irréductible.

Fraction rationnelle irréductible

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Pôles d'une fraction rationnelle

Exemples :
Exemple A.4

Exercices :
Exercice B.3
Exercice B.4

On s'est fixé comme objectif de décomposer les fractions rationnelles compliquées en une somme de fractions rationelles plus simples. Les égalités qui résulteront de telles décompositions seront avant tout des égalités entre fonctions : or, pour que deux fonctions soient égales, il faut déjà qu'elles aient le même domaine de définition, c'est à dire les mêmes "valeurs interdites". Dans le cas de fractions rationnelles, les "valeurs interdites" sont tout simplement les zéros du dénominateur : on devine donc que ces zéros vont jouer un rôle important dans le processus de décomposition des fractions rationnelles. Afin d'alléger le discours, on donne un nom particulier à ces valeurs interdites.

On appelle **pôle (réel ou complexe) d'une fraction rationnelle irréductible $\boldsymbol{F(x)}$ toute valeur (réelle ou complexe) qui annule son dénominateur $\boldsymbol{Q(x)}$**. Plus précisément, on dira qu'un pôle d'une fraction rationnelle irréductible $F(x)$ est d'*ordre de multiplicité* n si c'est un zéro d'ordre de multiplicité n du dénominateur $Q(x)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.4 Partie entière

Exemples :
Exemple A.5

Exercices :
Exercice B.5

On a vu plus tôt qu'avant de chercher à décomposer une fraction rationnelle "compliquée" en une somme de fractions rationnelles plus simples, il fallait commencer par s'assurer que l'on avait bien affaire à une fraction "compliquée".
Dans un cas extrême, il se peut même qu'une fraction rationnelle $F(x)$ puisse se réduire à un simple polynôme si le numérateur $P(x)$ est un multiple du dénominateur $Q(x)$. Pour le savoir, il suffit de poser la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. En effet, si le reste de la division euclidienne est nul, alors $P(x)$ peut se factoriser en un produit de la forme $P(x) = Q(x) \times E(x)$ où $E(x)$ est un polynôme réel, et la fraction $F(x)$ se simplifie en :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \times E(x)}{Q(x)} = E(x)$$

Par contre, si le reste $R(x)$ de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ n'est pas nul, alors la fraction $F(x)$ ne se réduit pas à un polynôme. Cependant, la division euclidienne s'interprète par la relation : $P(x) = Q(x) \times E(x) + R(x)$ où $E(x)$ et $R(x)$ sont des polynômes, le degré de $R(x)$ étant strictement inférieur à celui de $Q(x)$. La

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

fraction F peut alors malgré tout s'écrire plus simplement :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \times E(x) + R(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \times E(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Cette écriture est plus simple dans la mesure où la fraction rationnelle $\frac{R(x)}{Q(x)}$ qui en résulte a un numérateur de degré strictement plus petit que le dénominateur. Si la fraction rationnelle $F(x)$ avait déjà un numérateur de degré strictement plus petit que celui du dénominateur, l'écriture n'apporte rien puisque le quotient $E(x)$ de la division euclidienne de P par Q est nul et que le reste $R(x)$ correspond au numérateur $P(x)$.

Finalement, on retiendra qu'une fraction rationnelle irréductible $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit :

$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Le polynôme $E(x)$ est appelé partie entière de la fraction rationnelle $F(x)$: c'est le quotient de la division euclidienne de P par Q, et elle est non nulle dès que P a un degré supérieur ou égal à celui de Q. (Plus précisément, si P est de degré supérieur ou égal à Q, alors E est de degré $\deg P - \deg Q$). Le polynôme $R(x)$ est le reste de la division euclidienne de P par Q ; il a un degré strictement inférieur à celui de Q.

Chapitre III
Eléments simples

III.1 Objectifs du chapitre

Documents :
Document C.1.2

On a dit dans le chapitre précédent qu'on cherchait à décomposer les fractions rationnelles "compliquées" en une somme de fractions rationnelles plus "simples". On a intuitivement considéré qu'une fraction rationnelle était "compliquée" quand son numérateur et son dénominateur étaient des polynômes de degrés élevés. On a alors vu qu'on pouvait diminuer ces degrés dans le cas de fractions ayant des zéros communs au numérateur et au dénominateur : on obtient de cette façon-là des fractions rationnelles irréductibles. De plus, on a vu qu'on pouvait toujours travailler avec des fractions rationnelles dont le numérateur a un degré strictement inférieur à celui du dénominateur : il suffit pour cela de déterminer la partie entière de la fraction.
Finalement, on peut toujours travailler avec une fraction rationnelle irréductible et dont le numérateur a un degré strictement inférieur au degré du dénominateur.

Pour une telle fraction rationnelle $F(x)$, l'objectif du cours est donc d'obtenir une décomposition de la forme :

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \dots$$

où F_1, F_2, ... seraient des fractions rationnelles "plus simples" que F.
Or une telle égalité implique que les valeurs pour lesquelles $F(x)$ n'est pas défini (c'est

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

à dire les pôles de F) sont les mêmes que celles pour lesquelles la somme $F_1(x) + F_2(x) + \cdots$ n'est pas définie : **les pôles des fractions $\boldsymbol{F_i}$ apparaissant dans la décomposition d'une fraction rationnelle $\boldsymbol{F}$ doivent être des pôles de $\boldsymbol{F}$, et, inversement, chaque pôle de $\boldsymbol{F}$ doit être pôle d'au moins une des fractions $\boldsymbol{F_i}$.**

Cette constatation nous incite à considérer que chaque fraction rationnelle F_i sera d'autant plus simple qu'elle admettra un nombre restreint de pôles : c'est ce qui va nous guider pour définir les éléments simples dans les paragraphes suivants.

III.2 Eléments simples de première espèce

Exemples : Exemple A.6
Exercices : Exercice B.6

Pour qu'une fraction rationnelle soit simple, on a remarqué qu'elle ne devait admettre qu'un seul pôle de sorte que le dénominateur de cette fraction soit de degré le plus bas possible. Et effectivement, si le nombre réel $x = a$ est le seul pôle de la fraction rationnelle F, alors, le degré du dénominateur de F correspond à l'ordre de multiplicité de a.

Finalement, on appelle **élément simple de première espèce** toute fraction rationnelle pouvant s'écrire comme le quotient d'une constante par un polynôme de degré 1 élevé éventuellement à une puissance entière. Formellement, un élément simple de première espèce est une fraction rationnelle $F(x)$ qui peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}\,,\ a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

On voit sur cette définition, que, mieux qu'un polynôme de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, le numérateur d'un élément simple est une constante : on trouvera dans l'exemple associé à ce paragraphe une illustration (à défaut d'une démonstration) du caractère suffisant d'une telle définition.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Eléments simples de deuxième espèce

Exemples :
Exemple A.7

Exercices :
Exercice B.7

On s'est intéressé, dans le paragraphe précédent, aux fractions rationnelles ne possédant qu'un seul pôle. Ce pôle était forcément réel, or, un polynôme peut n'avoir aucun zéro réel, auquel cas ses zéros forment des paires de nombres complexes conjugués. On va donc définir une autre catégorie d'éléments simples en tenant compte des fractions rationnelles admettant uniquement deux pôles complexes conjugués : le dénominateur de telles fractions est alors constitué à partir d'un trinôme du second degré au discriminant strictement négatif. Les pôles pouvant être multiples, le trinôme est éventuellement élevé à une certaine puissance.

Ainsi, on appelle **élément simple de deuxième espèce** toute fraction rationnelle pouvant s'écrire comme le quotient d'un polynôme **de degré au plus égal à 1** par un polynôme du second degré **de discriminant strictement négatif**, élevé éventuellement à une puissance entière. Formellement, un élément simple de deuxième espèce est une fraction rationnelle $F(x)$ qui peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad \text{avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}\,,\ b^2 - 4ac < 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre IV
Décomposition en éléments simples

IV.1 Principe de la décomposition

Exemples :
Exemple A.8

On cherche, depuis le début de ce cours, à décomposer des fractions rationnelles "compliquées" en une somme de fractions rationnelles plus simples. On a vu tout d'abord qu'on pouvait toujours se ramener à travailler avec une fraction rationnelle irréductible et dont le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. Ensuite, on s'est efforcé de caractériser les fractions rationnelles qu'on pouvait qualifier de simples.

On va, dans ce dernier chapitre, donner le théorème général de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Ce théorème, que l'on abordera en deux étapes dans les deux paragraphes suivants, ne sera pas démontré, mais il se veut une conséquence "naturelle" des différentes considérations faites dans les chapitres précédents lors de la mise en place du vocabulaire.

On peut, à ce propos, rappeler la constation faite dans le chapitre précédent et qui anticipait le théorème que l'on va énoncer. On a vu que, si une fraction rationnelle irréductible $F(x)$ se décompose en une somme d'éléments simples F_1 , F_2 , $F_3 \ldots$:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \ldots$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

alors, **les pôles des éléments simples F_i doivent être des pôles de F, et, inversement, chaque pôle de F doit être pôle d'au moins un des éléments simples F_i.**

IV.2 Théorème particulier de décomposition

Exemples :
Exemple A.9

Exercices :
Exercice B.8
Exercice B.9

On a supposé depuis le début de ce cours qu'il était toujours possible de décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles simples. Le théorème qu'on énonce ici valide cette supposition et indique la forme que prend une telle décomposition dans le cas où on travaille avec une fraction rationnelle irréductible et de numérateur de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

Soit F une **fraction rationnelle irréductible et dont le numérateur $\boldsymbol{P}$ est de degré strictement inférieur au dénominateur $\boldsymbol{Q}$**, alors F se décompose en une somme d'éléments simples déterminés de la façon suivante :

– si $x = a$ est un pôle réel d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de F, alors la décomposition de F comportera la somme des n éléments simples de première espèce suivante :

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

avec $A_1\,,\ A_2\,,\ \cdots\,,\ A_n \in \mathbb{R}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

- si z et $\overline{z}$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre n de F, racines du trinôme du second degré "ax^2+bx+c", alors la décomposition de F comportera la somme des n éléments simples de deuxième espèce suivante :

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

avec B_1, C_1, B_2, $C_2, \ldots$, B_n, $C_n \in \mathbb{R}$.

Les constantes présentes aux numérateurs des éléments simples peuvent être déterminées en ajoutant les différents éléments simples après les avoir tous mis sur le même dénominateur (le dénominateur commun de plus petit degré étant Q), puis en identifiant le numérateur obtenu au numérateur initial P.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.3 Théorème général de décomposition

Exemples :
Exemple A.10

Exercices :
Exercice B.10
Exercice B.11

Documents :
Document C.1.2

Dans le paragraphe précédent on a vu comment décomposer en éléments simples une fraction rationelle irréductible et de numérateur de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. Or, on a appris, dans le premier chapitre de ce cours, à rendre irréductible une fraction rationnelle qui ne l'était pas, et à calculer la partie entière d'une fraction rationnelle dont le numérateur avait un degré plus grand que celui du dénominateur. On peut donc énoncer un théorème de décomposition des fractions rationnelles plus général que celui du paragraphe précédent.

Soit F une **fraction rationnelle quelconque** , alors F se décompose en éléments simples selon les étapes suivantes :

1. On commence par s'assurer que la fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est irréductible, c'est à dire que le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$ n'ont pas de zéro commun.
   Le cas échéant, on simplifie la fraction pour qu'elle soit irréductible.
2. Si le degré du numérateur $P(x)$ est supérieur ou égal au degré du dénominateur $Q(x)$, on calcule la partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle par division

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

euclidienne. Pour cela, P et Q doivent être écrits sous forme développée. (Si le degré de P est strictement inférieur au degré de Q, la partie entière de F est nulle et on passe directement à l'étape suivante).
La fraction F s'écrit alors comme une somme entre un polynôme $E(x)$ de degré égal à $\deg P - \deg Q$ et une fraction rationnelle de numérateur $R(x)$ (reste de la division euclidienne) de degré strictement inférieur au dénominateur $Q(x)$:

$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

3. On factorise alors le dénominateur $Q(x)$ à l'aide de polynômes irréductibles, c'est à dire de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 et de discriminant négatif.
4. On dresse, à partir de cette factorisation, la liste des pôles, en précisant s'ils sont réels ou complexes et en donnant leurs ordres de multiplicité.
5. On décompose la fraction $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en une somme d'éléments simples de première et de deuxième espèce selon le théorème particulier du paragraphe précédent.

Théorème général de décomposition

IV.4 Evaluation finale

Pour s'assurer de la bonne acquisition des connaissances exposées précédemment, on peut maintenant se tester à l'aide du QCM d'évaluation proposé sur le site d'IUTenLigne. On peut le trouver en tapant "fractions rationnelles" depuis le moteur de recherche situé à l'URL :

http ://www.iutenligne.net/ressources.php

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exemples

Exemple A.1 Navigation par renvois

Cours :	Exercices :
Renvois	Exercice B.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exemple A.1.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exemple A.1" de l'exercice B.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Exemple A.2 Primitives d'une fraction rationnelle

Cours :
Fraction rationnelle (définition)

Les résultats que l'on va énoncer dans ce cours permettront par exemple de trouver les primitives d'une fonction du type :

$$F(x) = \frac{x^5 + 4x^3 + x}{x^2 + x - 2}$$

En effet, les méthodes élémentaires de recherche de primitives ne peuvent pas s'appliquer à une telle fonction. A l'issue de ce cours, on sera cependant capable d'établir que :

$$F(x) = x^3 - x^2 + 7x - 9 + \frac{2}{x-1} + \frac{22}{x+2}$$

Or, sous cette forme, et avec l'aide de n'importe quel formulaire de calcul intégral, on est capable d'obtenir les primitives de $F(x)$:

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 9x + 2\ln|x-1| + 22\ln|x+2| + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3 Fraction rationnelle irréductible

Cours :
Irréductibilité

Exercices :
Exercice B.2

Considérons la fraction rationnelle $F(x)$ suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

On remarque sans peine que $x = 1$ est un zéro commun évident au numérateur et au dénominateur. Par conséquent, $F(x)$ n'est pas irréductible au sens où on a défini l'irréductibilité dans le cours.

En effet, puisque $x = 1$ est un zéro du numérateur, on peut factoriser $P(x)$ par $(x - 1)$. On reconnaît plus précisément une identité remarquable au numérateur : $P(x) = (x - 1)^2$.

De même, on peut factoriser le dénominateur $Q(x)$ par $(x - 1)$ à l'aide de diverses techniques classiques (par identification, par division euclidienne, ou en déterminant son deuxième zéro après avoir calculé son discriminant) : $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$.

Par conséquent, $F(x)$ peut s'écrire plus simplement :

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} \quad (\star)$$

Les zéros du numérateur de cette nouvelle fraction sont clairement distincts de ceux du dénominateur : elle est donc irréductible.
Remarquons que la fonction $F(x)$ proposée initialement n'était pas définie pour $x = 1$, ce qui n'apparaît plus dans la nouvelle formule $(\star)$ définissant $F(x)$: on commet un léger abus d'écriture en identifiant la fraction initiale et la fraction finale à une seule et même fonction dans la mesure où elles n'ont pas le même domaine de définition.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4 Pôles simples et multiples d'une fraction rationnelle

Cours :	Exercices :
Pôles	Exercice B.3
	Exercice B.4

On a défini dans le cours les pôles d'ordre n d'une fraction rationnelle (irréductible) $F(x)$ comme les zéros d'ordre n de son dénominateur $Q(x)$.

Concrètement, on voit donc que, pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle, il faut que son dénominateur soit factorisé à l'aide de polynômes irréductibles. (On rappelle que les polynômes réels irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif). Sous une telle forme, les zéros du dénominateur se lisent ou se calculent très facilement, et leur ordre de multiplicité correspond à la puissance du facteur qu'ils annulent.

Considérons par exemple la fraction rationnelle irréductible :

$$F(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x-3)(x+1)^4(x^2+x+1)^3}$$

Son dénominateur est déjà factorisé à l'aide de polynômes irréductibles, et on voit donc qu'elle admet :

- $x = 3$ comme pôle réel d'ordre 1 (on dit aussi **pôle réel simple**)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

- $x = -1$ comme pôle réel d'ordre 4 (on dit aussi **pôle réel quadruple**)
- $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ comme pôles complexes conjugués d'ordre 3 (on dit aussi **pôles complexes conjugués triples**)

Exemple A.5 Partie entière

Cours :
Partie entière

Exercices :
Exercice B.5

Considérons la fraction rationnelle $F(x)$ suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 + 4x^3 + x}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^5 + 4x^3 + x}{x^2 + x - 2}$$

En calculant : $P(1) = 6$ et $P(-2) = -66$, on s'assure que les zéros du dénominateur n'annulent pas le numérateur, c'est à dire que F est irréductible. Cependant, le numérateur P est de degré supérieur à celui du dénominateur Q : on peut donc écrire F plus simplement en calculant sa partie entière par division euclidienne de P par Q.

Exemple A.5
Partie entière

Posons cette division :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +4x^3 & & +x & & x^2+x-2 \\ \cline{7-7}
-(x^5 & +x^4 & -2x^3) & & & & x^3-x^2+7x-9 \\ \cline{1-3}
 & -x^4 & +6x^3 & & +x & & \\
 & -\;(-x^4 & -x^3 & +2x^2) & & & \\ \cline{2-4}
 & & 7x^3 & -2x^2 & +x & & \\
 & & -\;(7x^3 & +7x^2 & -14x) & & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x^2 & +15x & & \\
 & & & -\;(-9x^2 & -9x & +18) & \\ \cline{4-6}
 & & & & 24x & -18 &
\end{array}
$$

La partie entière de F est donc : $E(x) = x^3 - x^2 + 7x - 9$. Plus précisément, on interprète le résultat de cette division avec la relation :

$$P(x) = (x^3 - x^2 + 7x - 9) \times Q(x) + 24x - 18$$

D'où, F peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{(x^3 - x^2 + 7x - 9) \times Q(x) + 24x - 18}{Q(x)}$$

C'est à dire :

$$F(x) = \frac{(x^3 - x^2 + 7x - 9) \times Q(x)}{Q(x)} + \frac{24x - 18}{Q(x)} = x^3 - x^2 + 7x - 9 + \frac{24x - 18}{(x-1)(x+2)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6 Combinaison d'éléments simples de première espèce

Cours :
Elémént simple de première espèce

Exercices :
Exercice B.6

Dans cet exemple, considérons la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{2x^2 - 11x + 19}{(x-2)^3}$$

Elle n'a qu'un seul pôle : $x = 2$ qui est d'ordre de multiplicité égal à 3. Cependant il ne s'agit pas de ce qu'on a appelé élément simple de première espèce dans le paragraphe de cours, puisque le numérateur n'est pas une constante mais un polynôme du second degré.

On va montrer que cette fraction peut malgré tout s'écrire uniquement avec des éléments simples de première espèce tels qu'on les a introduits dans le cours. Pour cela, il faut diminuer le degré du numérateur ce qui n'est possible que par simplification avec le dénominateur : la fraction est irréductible, mais on peut quand même faire apparaître le facteur "$(x-2)$" au numérateur. En effet, on écrit tout d'abord :

$$2x^2 - 11x + 19 = [2(x-2)^2 + 8x - 8] - 11x + 19 = 2(x-2)^2 - 3x + 11$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

D'où, on déduit :

$$F(x) = \frac{2(x-2)^2 - 3x + 11}{(x-2)^3} = \frac{2}{x-2} + \frac{-3x+11}{(x-2)^3}$$

Puis, on reprend un raisonnement analogue pour faire disparaître le polynôme du premier degré subsistant au numérateur de la fraction "$\frac{-3x+11}{(x-2)^3}$" :

$$-3x + 11 = [-3(x-2) - 6] + 11 = -3(x-2) + 5$$

Ainsi, la fraction F initiale ne s'écrit qu'à l'aide d'éléments simples de première espèce :

$$F(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}$$

On a donc illustré le fait qu'on pouvait ne travailler qu'avec des constantes aux numérateurs des fractions rationnelles ne possédant qu'un pôle réel (même lorsque ce pôle est multiple). Cet exemple ne constitue pas une démonstration, mais on voit qu'on peut appliquer le même type de raisonnement pour d'autres numérateurs, d'autres pôles réels et d'autres ordres de multiplicité.
C'est pourquoi on a choisi de définir les fractions rationnelles n'admettant qu'un seul pôle (réel) comme des éléments simples de première espèce à la condition que leur numérateur soit une constante.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.7 Paires de pôles complexes

Cours :
Elément simple de deuxième espèce

Exercices :
Exercice B.7

Les zéros complexes d'un polynôme à coefficients réels allant toujours par paires de conjugués, si, par exemple, $z = 3 + 2i$ annule un tel polynôme, alors il en va de même de $\overline{z} = 3 - 2i$. Ces valeurs sont en effet racines du polynôme $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - [3 + 2i])(x - [3 - 2i]) \\ &= x^2 - 3x - 2ix - 3x + 2ix + 9 + 4 \\ &= x^2 - 6x + 13 \end{aligned}$$

$Q(x)$ est bien à coefficients réels, et, d'après le paragraphe de cours, les éléments simples de deuxième espèce admettant $z = 3 \pm 2i$ comme (seuls) pôles complexes conjugués sont de la forme :

$$F(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 - 6x + 13)^n} \quad \text{avec } A\,,\ B \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.8 Choix des éléments simples dans une décomposition

Cours :
Décomposition (principe)

Illustrons les propos du cours à l'aide de la fraction rationnelle F suivante :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-12}{x^2-x-2}$$

Elle est irréductible, car le seul zéro du numérateur P est $x = 4$ et il n'annule pas le dénominateur Q. De plus, le numérateur P est de degré strictement inférieur au dénominateur Q, donc on ne peut pas dégager de partie entière.

On remarque par ailleurs que F admet deux pôles réels d'ordre 1 : $x = -1$ et $x = 2$, de sorte que F peut s'écrire :

$$F(x) = \frac{3x-12}{(x+1)(x-2)}$$

En particulier, on voit que F n'est pas un élément simple de première ou de deuxième espèce. On aimerait donc pouvoir décomposer F en une somme d'éléments simples F_1, $F_2, \ldots$:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Or, F n'étant pas définie pour les valeurs $x = -1$ et $x = 2$ (et uniquement pour ces deux valeurs), il doit en être de même pour la somme "$F_1 + F_2 + \ldots$". De plus, en ajoutant ces fractions, donc en les mettant au même dénominateur, on doit retrouver F : le dénominateur commun à obtenir doit être Q. Par conséquent, les seuls éléments simples qui puissent apparaître dans la décomposition de F sont de la forme :

$$\frac{A}{x+1} \text{ et } \frac{B}{x-2} \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

C'est à dire :

$$F(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

Ainsi, on a vu, sur ce cas particulier basique, comment déterminer les seuls éléments simples pouvant apparaître dans la décomposition d'une fraction rationnelle. Le théorème qu'on va énoncer dans les paragraphes suivants donne des règles plus précises pour trouver ces éléments simples dans n'importe quel cas, et garantit qu'on peut trouver les valeurs des constantes figurant aux numérateurs des éléments simples pour que la décomposition soit correcte.

Reprenons notre exemple basique, et vérifions qu'il existe bien des valeurs A et B réelles permettant de satisfaire l'égalité $(\star)$. Pour cela, on calcule :

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x \ + \ (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$$

Exemple A.8
Choix des éléments simples dans une décomposition

On a alors obtenu deux écritures de F sous forme de fractions ayant le même dénominateur :

$$F(x) = \frac{3x - 12}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x \; + \; (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$$

Les numérateurs sont donc des polynômes égaux, et on peut identifier les coefficients des termes de même degré :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 3 \\ -2A + B = -12 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = -B + 3 \\ 2B - 6 + B = -12 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = 5 \\ B = -2 \end{array} \right.$$

Finalement, on a montré que F se décomposait de la façon suivante :

$$F(x) = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-2}$$

Exemple A.8
Choix des éléments simples dans une décomposition

Exemple A.9 Décomposition d'une fraction

Cours :
Décomposition (théorème 1)

Exercices :
Exercice B.8
Exercice B.9

Appliquons le théorème particulier de décomposition avec la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 7x + 9}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

On vérifie que cette fraction est irréductible en s'assurant que les zéros $x = 2$, $x = i$ et $x = -i$ du dénominateur Q n'annulent pas la numérateur P. Par ailleurs, le degré de P est strictement inférieur au degré de Q, donc on est bien dans le cadre du théorème.

On remarque que le dénominateur est donné sous forme factorisée avec des polynômes irréductibles. On en déduit les pôles de F et leurs ordres de multiplicité :

– $x = 2$ est un pôle réel d'ordre 2, donc la décomposition de F comportera la somme des deux éléments simples de première espèce suivante :

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \text{ avec } A,\ B \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

- $x = i$ et $x = -i$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 1, donc la décomposition de F comportera un seul élément simple de deuxième espèce, à savoir :

$$\frac{Cx + D}{x^2 + 1} \text{ avec } C\,,\ D \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la décomposition de F en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \text{ avec } A\,,\ B\,,\ C\,,\ D \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la valeur des constantes A, B, C et D, on calcule cette somme en mettant tous les éléments simples au même dénominateur $Q(x)$. Ainsi :

$$F(x) = \frac{A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

On développe et on réorganise le numérateur obtenu :

$$F(x) = \frac{(A+C)x^3 + (-2A+B-4C+D)x^2 + (A+4C-4D)x + (-2A+B+4D)}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

Comme on a obtenu une nouvelle écriture de F avec le même dénominateur Q qu'à l'origine, on peut identifier les numérateurs des deux écritures ce qui conduit au système :

Exemple A.9
Décomposition d'une fraction

Exemple A.9
Décomposition d'une fraction

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+B-4C+D=-4 \\ A+4C-4D=-7 \\ -2A+B+4D=9 \end{cases} \iff \begin{cases} A=2-C \\ -4+2C+B-4C+D=-4 \\ 2-C+4C-4D=-7 \\ -4+2C+B+4D=9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=2-C \\ B-2C+D=0 \\ 3C-4D=-9 \\ B+2C+4D=13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=2-C \\ B=2C-D \\ 3C-4D=-9 \\ 2C-D+2C+4D=13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=2-C \\ B=2C-D \\ 3C-4D=-9 \\ 4C+3D=13 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=3 \end{cases}$$

Finalement, la décomposition de F en éléments simples est :

$$F(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x+3}{x^2+1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.10 Décomposition d'une fraction quelconque

Cours :
Décomposition (théorème 2)

Exercices :
Exercice B.10
Exercice B.11

Illustrons le théorème général de décomposition avec la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^6 - x^5 - 10x^4 + 18x^3 - 27x^2 + 44x - 25}{(x^2+1)(x-2)^2(x-1)}$$

Suivons les étapes suggérées par le théorème :

1. On constate tout d'abord que la fraction F n'est pas irréductible car les zéros du dénominateur Q sont $x = i$, $x = -i$, $x = 2$ et $x = 1$. Or on calcule : $P(i) = -9 + 27i \neq 0$, $P(-i) = -11 - 27i \neq 0$, $P(2) = -29 \neq 0$ et $P(1) = 0$. Ainsi, $x = 1$ est un zéro commun au numérateur et au dénominateur : la fraction F n'est pas irréductible. Plus précisément, on peut factoriser $P(x)$ par $(x-1)$; par identification ou par division euclidienne, on montre que :

$$P(x) = (x-1)(x^5 - 10x^3 + 8x^2 - 19x + 25)$$

De sorte que l'on peut simplifier F :

$$F(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{x^5 - 10x^3 + 8x^2 - 19x + 25}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.10
Décomposition d'une fraction quelconque

Sous cette forme, F est maintenant irréductible.

2. Le nouveau numérateur P_1 étant de degré 5 et le dénominateur Q_1 étant de degré 4, la fraction F admet une partie entière de degré 1. Plus précisément, la division euclidienne de P_1 par Q_1 donne :

$$P_1(x) = (x+4)Q_1(x) + (2x^3 - 4x^2 - 7x + 9)$$

Ainsi, F s'écrit :

$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q_1(x)} = x + 4 + \frac{2x^3 - 4x^2 - 7x + 9}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

3. 4. et 5. On remarque que la fraction $\frac{R(x)}{Q_1(x)}$ est la même que celle étudiée dans l'exemple précédent. Les 3 dernières étapes indiquées dans le théorème général ont donc déjà été réalisées quand on a appliqué le théorème particulier dans l'exemple précédent.

On peut finalement donner la décomposition complète de $F(x)$:

$$F(x) = x + 4 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+3}{x^2+1}$$

Remarque : on voit qu'il n'est, à aucun moment, nécessaire de factoriser le numérateur d'une fraction rationnelle à décomposer. Par contre, on a en général besoin de connaître le dénominateur à la fois sous forme développée (pour poser la division euclidienne permettant d'obtenir la partie entière) et sous forme factorisée (pour en déduire les pôles et donc la forme de la décomposition en éléments simples).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

Exercice B.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi ”Exercice B.1” depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi ”Exercice B.1” de l’exemple A.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l’un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2 Irréductibilité de fractions rationnelles

Cours :
Irréductibilité

Exemples :
Exemple A.3

On considère les fractions rationnelles $F_1(x)$ et $F_2(x)$ suivantes :

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 11} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Les affirmations suivantes sont-elles correctes ?

– La fraction F_1 est irréductible :
vrai faux conseil

– La fraction F_2 est irréductible :
vrai faux conseil

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3 Pôles et ordres de multiplicité

Cours :
Pôles

Exemples :
Exemple A.4

On considère les fractions rationnelles irréductibles F_1 et F_2 suivantes :

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)} \text{ et } F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{2x-8}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Les affirmations suivantes sont-elles correctes ?

- $x = 1$ est un pôle réel d'ordre 2 de F_1 : vrai faux
- $x = -2$ est un pôle réel d'ordre 3 de F_1 : vrai faux
- $x = 1 + 2i$ est un pôle complexe d'ordre 2 de F_1 : vrai faux
- $x = 3$ est un pôle d'ordre 1 de F_2 : vrai faux
- F_2 n'a que des pôles réels : vrai faux

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4 Pôles et factorisation du dénominateur

Cours :
Pôles

Exemples :
Exemple A.4

On donne les pôles de trois fractions rationnelles irréductibles et leurs ordres de multiplicité respectifs. Déterminer le dénominateur de chacune de ces fractions.

1. La fraction $F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ admet $x = 2$ comme pôle réel d'ordre 1 et $x = 1$ comme pôle réel d'ordre 2. Son dénominateur $Q_1(x)$ peut s'écrire (une seule réponse correcte) :
   - Réponse a : $Q_1(x) = (x + 2)(x + 1)^2$ Conseil
   - Réponse b : $Q_1(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$
   - Réponse c : $Q_1(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 1)$
   - Réponse d : $Q_1(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$
2. La fraction $F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ admet $x = -1$ et $x = 1$ comme pôles réels d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ comme pôles complexes conjugués d'ordre 2. Son dénominateur $Q_2(x)$ peut s'écrire (une seule réponse correcte) :
   - Réponse a : $Q_2(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ Conseil
   - Réponse b : $Q_2(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 - 1)$
   - Réponse c : $Q_2(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 - 2x + 1)$
   - Réponse d : $Q_2(x) = x^4 - 1$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5 Propriétés et calculs de parties entières

Cours :
Partie entière

Exemples :
Exemple A.5

On travaille tout d'abord avec les fractions rationnelles irréductibles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3x + 1} \text{ et } F_2(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

1. La partie entière de la fraction rationnelle F_1 est :
   - Réponse a : nulle
   - Réponse b : de degré 0
   - Réponse c : de degré 3
   - Réponse d : de degré 4
2. La partie entière de la fraction rationnelle F_2 est :
   - Réponse a : nulle
   - Réponse b : de degré 0
   - Réponse c : de degré 3
   - Réponse d : de degré 4

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5
Propriétés et calculs de parties entières

On travaille maintenant avec les fractions rationnelles irréductibles suivantes :

$$F_3(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1} \text{ et } F_4(x) = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

3. Sans poser de division euclidienne, déterminer laquelle des relations suivantes est correcte :
   - Réponse a : $F_3(x) = 6x + 2 + \frac{3x-4}{x^2+x+1}$
   - Réponse b : $F_3(x) = 2x^2 - 2x - 3 + \frac{6x+2}{x^2+x+1}$
   - Réponse c : $F_3(x) = 2x^2 - 2x - 1 + \frac{6x+2}{x^2+x+1}$
4. Calculer la partie entière E_4 de la fraction rationnelle F_4 et déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :
   - Réponse a : $E_4(x) = x - 3$
   - Réponse b : $E_4(x) = x + 1$
   - Réponse c : $E_4(x) = 8x^2 - 10x + 9$
   - Réponse d : $E_4(x) = x - \frac{1}{2}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6 Eléments simples de première espèce

Cours :
Elémént simple de première espèce

Exemples :
Exemple A.6

Les fractions rationnelles suivantes sont-elles des éléments simples de première espèce ?

- La fraction $F_1(x) = \frac{-15}{(x-7)^2}$: oui non
- La fraction $F_2(x) = \frac{4x+3}{(x+8)^4}$: oui non
- La fraction $F_3(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$: oui non
- La fraction $F_4(x) = \frac{5}{2x-3}$: oui non
- La fraction $F_5(x) = \frac{8}{(x^2-8x+16)^3}$: oui non

Exercice B.7 Eléments simples de deuxième espèce

Cours :
Elémént simple de deuxième espèce

Exemples :
Exemple A.7

Les fractions rationnelles suivantes sont-elles des éléments simples de deuxième espèce ?

- La fraction $F_1(x) = \frac{5x-14}{(x^2+x+1)^3}$: oui non
- La fraction $F_2(x) = \frac{3}{2x^2+7}$: oui non
- La fraction $F_3(x) = \frac{-2x+3}{(3x^2+x-5)^4}$: oui non

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.8 Forme de décompositions

Cours :
Décomposition (théorème 1)
Exemples :
Exemple A.9
Exercices :
Exercice B.9

On considère les fractions rationnelles irréductibles F_1 et F_2 suivantes :

$$F_1(x) = \frac{3x^4 + 7x^3 - 2x + 9}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)^2} \text{ et } F_2(x) = \frac{6x^5 - 5x^4 + x^2 - 13}{(x+3)^3(x^2-4)(x^2+1)}$$

Faire la liste des pôles de ces deux fractions ainsi que de leurs ordres de multiplicité, puis donner la FORME de leurs décompositions en éléments simples (cela signifie qu'**on ne demande pas de trouver la valeur des constantes apparaissant aux numérateurs des éléments simples**).

Solutions : solution pour F_1 et solution pour F_2

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.9 Recherche de décompositions simples

Cours :
Décomposition (théorème 1)

Exemples :
Exemple A.9

On considère les fractions rationnelles irréductibles F_1 et F_2 suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)} \text{ et } F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Faire la liste des pôles de ces deux fractions ainsi que de leurs ordres de multiplicité, puis donner leurs décompositions en éléments simples.

Solution pas à pas pour F_1 :
1. Liste des pôles
2. Forme de la décomposition
3. Système d'identification des constantes
4. Décomposition finale

Solution pas à pas pour F_2 :
1. Liste des pôles
2. Forme de la décomposition
3. Système d'identification des constantes
4. Décomposition finale

Exercice B.10 Reconnaissance de décompositions

Cours :
Décomposition (théorème 2)

Exemples :
Exemple A.10

Exercices :
Exercice B.11

Pour chacune des fractions rationnelles suivantes, préciser si la décomposition proposée est bien une décomposition en éléments simples.

$$F_1(x) = 3x^2 + 7 - \frac{1}{x+2} + \frac{7x+1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x} + \frac{1-x}{1+x^2}$$

F_1 est bien décomposée en éléments simples : vrai / faux

$$F_2(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2}{3(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{(x^2+1)^4}$$

F_2 est bien décomposée en éléments simples : vrai / faux

$$F_3(x) = 8x + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+3}{(1+x^2)^2} + \frac{4x+5}{x^2-3}$$

F_3 est bien décomposée en éléments simples : vrai / faux

$$F_4(x) = 4x^3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x-9}{x^2+3x+2} + \frac{x+1}{(x^2+3x+2)^2}$$

F_4 est bien décomposée en éléments simples : vrai / faux

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.11 Décomposition complète

Cours :
Décomposition (théorème 2)

Exemples :
Exemple A.10

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples après avoir factorisé son dénominateur $Q(x)$:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Solution pas à pas :

- Factorisation du dénominateur
- Irréductibilité
- Partie entière
- Liste des pôles
- Forme de la décomposition
- Système d'identification des constantes
- Décomposition finale

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.1 Quelques compléments

Document C.1.1 Décomposition et transformée de Laplace

Cours :
Fraction rationnelle (définition)

En théorie des Circuits, l'outil "transformée de Laplace" permet entre autres de simplifier la résolution des équations différentielles linéaires. Dans le cas des circuits, on obtient alors simultanément le régime transitoire et le régime permanent.

La méthode s'articule autour de 4 étapes :

1. Transformer l'équation différentielle avec les formules de Laplace.
2. Exprimer la transformée de la solution $Y(p)$ comme une fraction rationnelle de la variable p.
3. **Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle obtenue.**
4. Appliquer les formules de transformée inverse pour revenir à la solution cherchée.

On trouvera un exemple simple de ce type de problème dans la prochaine version de ce cours.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Autour du domaine de définition

Cours :
Irréductibilité
Eléments simples
Décomposition (théorème 2)

Dans ce cours, on laisse de côté les questions de domaines de définition. Il faut cependant avoir à l'esprit les deux considérations suivantes :

– La recherche du domaine de définition d'une fonction rationnelle se ramène à la détermination des zéros réels de son dénominateur. Ces zéros sont effectivement les seuls nombres réels n'appartenant pas au domaine de définition de la fonction.

– En toute rigueur, avant de travailler avec une fonction, on commence par préciser son domaine de définition. On ne l'a pas fait dans ce cours afin de ne pas alourdir les propos. Le lecteur attentif aura cependant remarqué que la question du domaine de définition n'est pas anodine en particulier lors de l'étude de l'irréductibilité d'une fraction rationnelle.
En effet, soit a un nombre réel, zéro d'ordre de multiplicité q du dénominateur $Q(x)$ d'une fraction $F(x)$ et également zéro du numérateur $P(x)$ mais avec un

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

ordre de multiplicité $p \geq q$. On a alors :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)^p P_1(x)}{(x-a)^q Q_1(x)} = \frac{(x-a)^{p-q} P_1(x)}{Q_1(x)} \qquad \forall x \in \mathcal{D}_F$$

où P_1 et Q_1 sont des polynômes tels que $P_1(a) \neq 0$ et $Q_1(a) \neq 0$.
La fraction rationnelle $F(x)$ n'est donc a priori pas définie en $x = a$, ce qui n'est pas le cas de la fraction obtenue après simplification...

C.2 Solutions des exercices à choix multiples

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.1 Irréductibilité des fractions rationelles (1)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}$$

Votre réponse est correcte : en effet, les zéros du numérateur sont de manière évidente $x = 1$ et $x = -3$, or ils n'annulent pas le dénominateur, car :

$$Q_1(1) = -11 \quad \text{et} \quad Q_1(-3) = 181$$

Le numérateur et le dénominateur ne peuvent donc pas avoir de zéro commun : F_1 est une fraction rationnelle irréductible.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.2 Irréductibilité des fractions rationelles (2)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}$$

Votre réponse est fausse : en effet, dire que la fraction rationnelle F_1 n'est pas irréductible signifie que le numérateur P_1 et le dénominateur Q_1 ont au moins un zéro commun. Or, les seuls zéros du numérateur P_1 sont de manière évidente $x = 1$ et $x = -3$, et ces valeurs n'annulent pas le dénominateur Q_1 :

$$Q_1(1) = -11 \quad \text{et} \quad Q_1(-3) = 181$$

Puisque P_1 et Q_1 n'ont pas de zéro commun, F_1 est une fraction rationnelle irréductible.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.3 Irréductibilité des fractions rationelles (3)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}$$

Conseil : déterminez, sans aucun calcul, les deux seules valeurs qui puissent être des zéros communs au numérateur et au dénominateur, puis testez ces valeurs.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.4 Irréductibilité des fractions rationelles (4)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Votre réponse est fausse : en effet, dire que la fraction rationnelle F_2 est irréductible signifie que le numérateur P_2 et le dénominateur Q_2 n'ont aucun zéro commun. Or, les seuls zéros du numérateur P_2 sont de manière évidente $x = 1$ et $x = -1$. La première de ces deux valeurs n'annule pas le dénominateur Q_2, mais il en va autrement de la seconde :

$$Q_2(1) = 6 \quad \text{et} \quad Q_2(-1) = 0$$

Par conséquent, P_2 et Q_2 admettent $x = -1$ comme zéro commun et F_2 n'est donc pas une fraction rationnelle irréductible. Plus précisément, on peut factoriser P_2 et Q_2 par $(x+1)$ (la factorisation de Q_2 peut s'obtenir par division euclidienne de $Q_2(x)$ par $x+1$ par exemple), puis simplifier la fraction F_2 :

$$F_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.5 Irréductibilité des fractions rationelles (5)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Votre réponse est correcte : en effet, les zéros du numérateur P_2 sont de manière évidente $x = 1$ et $x = -1$, or $Q_2(-1) = 0$. Puisque P_2 et Q_2 admettent $x = -1$ comme zéro commun, alors F_2 n'est pas une fraction rationnelle irréductible. Plus précisément, on peut factoriser P_2 et Q_2 par $(x + 1)$ (la factorisation de Q_2 peut s'obtenir par division euclidienne de $Q_2(x)$ par $x + 1$ par exemple), puis simplifier la fraction F_2 :

$$F_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.6 Irréductibilité des fractions rationelles (6)

Exercices :
Exercice B.2

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Conseil : déterminez, sans aucun calcul, les deux seules valeurs qui puissent être des zéros communs au numérateur et au dénominateur, puis testez ces valeurs.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.7 Pôles et ordres de multiplicité (1)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est fausse : attention, les pôles d'une fraction rationnelle irréductible sont les zéros de son dénominateur, et non pas ceux de son numérateur. Or $x = 1$ annule le numérateur et non pas le dénominateur.

D'une manière générale, on va voir que, lorsqu'on veut décomposer une fraction rationnelle **irréductible** en éléments simples, on n'a jamais besoin de connaître les zéros de son numérateur.

Document C.2.8 Pôles et ordres de multiplicité (2)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est correcte : la valeur $x = 1$ n'annule pas le dénominateur $Q_1(x)$ et n'est donc pas un pôle de F_1.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.9 Pôles et ordres de multiplicité (3)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est correcte : la valeur $x = -2$ annule le facteur $(x+2)$ qui est présent avec un exposant 3 dans le dénominateur factorisé $Q_1(x)$, et cette valeur n'annule pas les autres facteurs de $Q_1(x)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.10 Pôles et ordres de multiplicité (4)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est fausse : la valeur $x = 2$ est bien un pôle de F_1 puisqu'elle annule le dénominateur $Q_1(x)$. Plus précisément, elle annule le facteur $(x+2)$ qui est présent avec un exposant 3 dans le dénominateur factorisé $Q_1(x)$, et n'annule pas les autres facteurs de $Q_1(x)$: c'est donc un pôle d'ordre 3.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.11 Pôles et ordres de multiplicité (5)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est fausse : le nombre complexe $x = 1+2i$ est bien un pôle de F_1 puisque c'est une racine du trinôme "x^2-2x+5" qui figure dans le dénominateur factorisé $Q_1(x)$. Cependant, ce n'est pas un pôle d'ordre 2 mais d'ordre 1, car ce facteur "x^2-2x+5" est présent sans exposant explicite, c'est à dire avec l'exposant 1.

Plus précisément, dans $\mathbb{C}$, l'expression "x^2-2x+5" se factorise en :

$$x^2-2x+5 = (x-[1+2i])(x-[1-2i])$$

Cette factorisation fait apparaître plus clairement que $x = 1+2i$ et $x = 1-2i$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 1 chacun.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.12 Pôles et ordres de multiplicité (6)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+2)^3(x^2-2x+5)}$$

Votre réponse est correcte : en effet, le facteur "x^2-2x+5" annulé par $x = 1+2i$ n'est présent qu'avec l'exposant 1 dans la factorisation de $Q_1(x)$. Par conséquent, $x = 1+2i$ est un pôle complexe d'ordre 1 de F_1 et non pas d'ordre 2.

On remarque au passage que le nombre conjugué $\overline{x} = 1-2i$ est également un pôle complexe d'ordre 1 de F_1. De manière générale, les pôles complexes d'une fraction rationnelle réelle vont toujours par paires de conjugués.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.13 Pôles et ordres de multiplicité (7)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{2x-8}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Votre réponse est fausse : le nombre $x = 3$ est bien un pôle de F_2 puisqu'il annule son dénominateur Q_2. On peut donc factoriser Q_2 par "$x-3$". Or cette factorisation (obtenue par identification ou division euclidienne) s'écrit :

$$Q_2(x) = (x-3)(x^2-2x-3)$$

Le polynôme "x^2-2x-3" s'annule encore pour $x = 3$, donc ce nombre est un pôle réel de F_2 au moins d'ordre 2 et non pas d'ordre 1.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.14 Pôles et ordres de multiplicité (8)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{2x-8}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Votre réponse est correcte : le nombre $x = 3$ est bien un pôle de F_2 puisqu'il annule son dénominateur Q_2. On peut donc factoriser Q_2 par "$x-3$" et on obtient :

$$Q_2(x) = (x-3)(x^2-2x-3)$$

Comme le polynôme "x^2-2x-3" s'annule encore pour $x = 3$, alors ce nombre est un pôle réel de F_2 au moins d'ordre 2 et non pas d'ordre 1.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.15 Pôles et ordres de multiplicité (9)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{2x-8}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Votre réponse est correcte : on a vu à la question précédente que le dénominateur de F_2 pouvait se factoriser en :

$$Q_2(x) = (x-3)(x^2-2x-3)$$

Comme le polynôme "x^2-2x-3" a un discriminant Δ strictement positif, les zéros du dénominateur Q_2, c'est à dire les pôles de F_2, sont bien tous réels. Plus précisément, on voit que F_2 admet $x=3$ comme pôle réel double et $x=-1$ comme pôle réel simple.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.16 Pôles et ordres de multiplicité (10)

Exercices :
Exercice B.3

$$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{2x-8}{x^3-5x^2+3x+9}$$

Votre réponse est fausse : on a vu à la question précédente que le dénominateur de F_2 pouvait se factoriser en :

$$Q_2(x) = (x-3)(x^2-2x-3)$$

Comme le polynôme "x^2-2x-3" a un discriminant Δ strictement positif, les zéros du dénominateur Q_2, c'est à dire les pôles de F_2, sont tous réels. Plus précisément, on voit que F_2 admet $x=3$ comme pôle réel double et $x=-1$ comme pôle réel simple.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.17 Pôles et factorisation du dénominateur (1)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 2$ pôle réel d'ordre 1 et $x = 1$ pôle réel d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_1(x) = (x + 2)(x + 1)^2$

Votre réponse est fausse : les valeurs $x = 1$ et $x = 2$ doivent annuler $Q_1(x)$ ce qui n'est pas le cas si $Q_1(x) = (x + 2)(x + 1)^2$.

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.18 Pôles et factorisation du dénominateur (2)

Exercices :
Exercice B.4

Conseil : un même polynôme peut s'écrire de diverses manières. Il est préférable ici d'essayer de déterminer Q_1 sans regarder les réponses proposées, puis de chercher laquelle de ces solutions est une écriture particulière de Q_1 .

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.19 Pôles et factorisation du dénominateur (3)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 2$ pôle réel d'ordre 1 et $x = 1$ pôle réel d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_1(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$

Votre réponse est fausse : en effet, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc le polynôme $(x^2 - 1)(x - 2)$ admet $x = 1$, $x = -1$ et $x = 2$ comme zéros d'ordre 1 chacun.

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.20 Pôles et factorisation du dénominateur (4)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 2$ pôle réel d'ordre 1 et $x = 1$ pôle réel d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_1(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 1)$

Votre réponse est correcte : en effet, en calculant le discriminant puis les racines du trinôme $x^2 - 3x + 2$, on voit qu'on peut le factoriser :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Par conséquent, le polynôme proposé s'écrit, sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de la façon suivante :

$$(x^2 - 3x + 2)(x - 1) = (x - 2)(x - 1)^2$$

Il admet bien $x = 2$ comme zéro simple, et $x = 1$ comme zéro double.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.21 Pôles et factorisation du dénominateur (5)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 2$ pôle réel d'ordre 1 et $x = 1$ pôle réel d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_1(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$

Votre réponse est fausse : en effet, en calculant le discriminant du trinôme $x^2 + 3x + 2$, on voit que ses racines sont $x = -2$ et $x = -1$. Or ces valeurs ne font pas partie de la liste des pôles proposés.

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.22 Pôles et factorisation du dénominateur (6)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 1$ et $x = -1$ pôles réels d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_2(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

Votre réponse est fausse : le polynôme proposé s'annule bien pour $x = \pm 1$ et $x = \pm i$, mais ces dernières valeurs ne sont que des zéros d'ordre 1 chacune, puisque :

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

Plus généralement, l'ordre de multiplicité de chaque pôle d'une paire de pôles complexes conjugués est donné par l'exposant du facteur $(ax^2 + bx + c)$ qu'ils annulent dans la factorisation du dénominateur $Q_2(x)$ (factorisation en polynômes irréductibles).

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.23 Pôles et factorisation du dénominateur (7)

Exercices :
Exercice B.4

Conseil : un même polynôme peut s'écrire de diverses manières. Il est préférable ici d'essayer de déterminer Q_2 sans regarder les réponses proposées, puis de chercher laquelle de ces solutions est une écriture particulière de Q_2 .

Document C.2.24 Pôles et factorisation du dénominateur (8)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 1$ et $x = -1$ pôles réels d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_2(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 - 1)$

Votre réponse est correcte : en effet, $x = i$ et $x = -i$ annulent le facteur x^2+1 qui apparaît avec un exposant 2 dans la factorisation du polynôme proposé ; ce sont donc des zéros complexes conjugués d'ordre 2 de ce polynôme. De plus, on reconnaît, dans le deuxième facteur, une identité remarquable :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Ecrit de cette façon, on voit bien que -1 et 1 sont des zéros simples du polynôme proposé. Ce polynôme correspond donc au dénominateur $Q_2(x)$ recherché.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.25 Pôles et factorisation du dénominateur (9)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 1$ et $x = -1$ pôles réels d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_2(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 + 2x - 1)$

Votre réponse est fausse : la valeur $x = -1$ n'annule pas le polynôme proposé.

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.26 Pôles et factorisation du dénominateur (10)

Exercices :
Exercice B.4

Liste des pôles : $x = 1$ et $x = -1$ pôles réels d'ordre 1, et $x = i$ et $x = -i$ pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Solution choisie : $Q_2(x) = x^4 - 1$

Votre réponse est fausse : le polynôme proposé s'annule bien pour $x = \pm 1$ et $x = \pm i$, mais ces dernières valeurs ne sont que des zéros d'ordre 1 chacune, puisque :

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$$

Plus généralement, l'ordre de multiplicité de chaque pôle d'une paire de pôles complexes conjugués est donné par l'exposant du facteur $(ax^2 + bx + c)$ qu'ils annulent dans la factorisation du dénominateur $Q_2(x)$ (factorisation en polynômes irréductibles).

Déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions à la lumière de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.27 Propriétés et calculs de parties entières (1)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_1(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3x + 1}$$

Votre réponse est correcte : le numérateur de F_1 étant de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F_1 est nulle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.28 Propriétés et calculs de parties entières (2)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_1(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3x + 1}$$

Votre réponse est fausse : le numérateur de F_1 étant de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F_1 est nulle. Or, par convention, le polynôme nul n'est pas de degré 0 mais de degré "égal à $-\infty$" ; les polynômes de degré 0 sont les polynômes de la forme $P(x) = k$ où k est une constante non nulle.

Document C.2.29 Propriétés et calculs de parties entières (3)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_1(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3x + 1}$$

Votre réponse est fausse : le numérateur de F_1 étant de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F_1 est nulle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.30 Propriétés et calculs de parties entières (4)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_2(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

Votre réponse est fausse : le numérateur de F_2 étant de degré supérieur à celui du dénominateur, la partie entière de F_1 n'est pas nulle.

Retrouvez, dans la partie cours, la propriété permettant de connaître le degré de la partie entière en fonction des degrés du numérateur et du dénominateur, puis déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.31 Propriétés et calculs de parties entières (5)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_2(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

Votre réponse est fausse : le numérateur de F_2 étant de degré **strictement** supérieur à celui du dénominateur, la partie entière de F_1 est un polynôme de degré **strictement** positif.

Retrouvez, dans la partie cours, la propriété permettant de connaître le degré de la partie entière en fonction des degrés du numérateur et du dénominateur, puis déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.32 Propriétés et calculs de parties entières (6)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_2(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

Votre réponse est fausse : attention, le degré de la partie entière **NE s'obtient PAS** en divisant le degré du numérateur par le degré du dénominateur.

Retrouvez, dans la partie cours, la propriété permettant de connaître le degré de la partie entière en fonction des degrés du numérateur et du dénominateur, puis déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.33 Propriétés et calculs de parties entières (7)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_2(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

Votre réponse est correcte : le numérateur de F_2 étant de degré 6, et le dénominateur étant de degré 2, on en déduit que la partie entière sera de degré égal à $6 - 2 = 4$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.34 Propriétés et calculs de parties entières (8)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_3(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Solution choisie : $F_3(x) = 6x + 2 + \frac{3x-4}{x^2+x+1}$

Votre réponse est fausse : le numérateur de F_3 étant de degré 4, et le dénominateur étant de degré 2, on en déduit que la partie entière sera de degré égal à $4 - 2 = 2$ ce qui n'est pas le cas dans la relation proposée. On peut également vérifier que la relation proposée est fausse en la testant avec des valeurs particulières de x, comme $x = 0$.

A l'aide de ces explications déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.35 Propriétés et calculs de parties entières (9)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_3(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Solution choisie : $F_3(x) = 2x^2 - 2x - 3 + \frac{6x+2}{x^2+x+1}$

Votre réponse est fausse : on peut vérifier que la relation proposée est fausse en la testant avec des valeurs particulières de x, comme $x = 0$. Ainsi, on doit avoir $F_3(0) = 1$, or, avec la relation proposée, on obtient : $F_3(0) = -1$.

A l'aide de ces explications déterminez la bonne réponse parmi les autres propositions.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.36 Propriétés et calculs de parties entières (10)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_3(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Solution choisie : $F_3(x) = 2x^2 - 2x - 1 + \frac{6x+2}{x^2+x+1}$

Votre réponse est correcte : en effet, on peut remarquer que c'est la seule relation qui prend la même valeur que $F_3(x)$ pour $x = 0$ par exemple.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.37 Propriétés et calculs de parties entières (11)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_4(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Solution choisie : $E_4(x) = x - 3$

Votre réponse est fausse : pensez à tester votre résultat en vous assurant que l'égalité suivante est satisfaite pour diverses valeurs de x :

$$F_4(x) = E_4(x) + \frac{R_4(x)}{Q_4(x)}$$

(où $R_4(x)$ est le reste obtenu dans la division euclidienne de P_4 par Q_4)

Vérifiez vos calculs avec le début de solution suivant :

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3 & x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ \cline{2-2} -(\underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x)} & x + \dots \\ x^3 + \quad \dots & \end{array}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.38 Propriétés et calculs de parties entières (12)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_4(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Solution choisie : $E_4(x) = x - 1$

Votre réponse est correcte : le quotient de la division euclidienne de P_4 par Q_4 est effectivement $x + 1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & +9x^2 & -13x & +3 & x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\
\cline{6-6}
-(x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -6x) & & x+1 \\
\cline{1-4}
 & x^3 & +6x^2 & -7x & +3 & \\
 & -(x^3 & -2x^2 & +3x & -6) & \\
\cline{2-5}
 & & 8x^2 & -10x & +9 &
\end{array}$$

Document C.2.39 Propriétés et calculs de parties entières (13)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_4(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Solution choisie : $E_4(x) = 8x^2 - 10x + 9$

Votre réponse est fausse : attention, la partie entière d'une fraction rationnelle est le quotient, et non pas le reste, de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. De plus, on sait que la partie entière sera de degré égal à $\deg P_4 - \deg Q_4$, c'est à dire de degré 1.

Déterminez la bonne réponse parmi les propositions restantes à l'aide de cette explication.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.40 Propriétés et calculs de parties entières (14)

Exercices :
Exercice B.5

$$F_4(x) = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Solution choisie : $E_4(x) = x - \frac{1}{2}$

Votre réponse est fausse : pensez à tester votre résultat en vous assurant que l'égalité suivante est satisfaite pour diverses valeurs de x :

$$F_4(x) = E_4(x) + \frac{R_4(x)}{Q_4(x)}$$

(où $R_4(x)$ est le reste obtenu dans la division euclidienne de P_4 par Q_4)

Vérifiez vos calculs avec le début de solution suivant :

$$\begin{array}{rl|l} & x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3 & x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ \cline{3-3} -(& \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x)} & x + \dots \\ & x^3 + \quad \dots & \end{array}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.41 Eléments simples de première espèce (1)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_1(x) = \frac{-15}{(x-7)^2}$$

Votre réponse est correcte : en effet, F_1 est bien de la forme "$\frac{A}{(x-a)^n}$" avec $A = -15$, $a = 7$ et $n = 2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.42 Eléments simples de première espèce (2)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_1(x) = \frac{-15}{(x-7)^2}$$

Votre réponse est fausse : F_1 a la forme requise pour être un élément simple de première espèce, puisqu'elle s'écrit "$\frac{A}{(x-a)^n}$" avec $A = -15$, $a = 7$ et $n = 2$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.43 Eléments simples de première espèce (3)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_2(x) = \frac{4x+3}{(x+8)^4}$$

Votre réponse est fausse : F_2 n'a pas la forme requise pour être un élément simple de première espèce, puisque son numérateur est un polynôme du premier degré et non pas une constante.

Document C.2.44 Eléments simples de première espèce (4)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_2(x) = \frac{4x+3}{(x+8)^4}$$

Votre réponse est correcte : F_2 n'a effectivement pas la forme requise pour être un élément simple de première espèce, puisque son numérateur est un polynôme du premier degré et non pas une constante.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.45 Eléments simples de première espèce (5)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_3(x) = \frac{-1}{x^2 + x + 1}$$

Votre réponse est fausse : F_3 n'a pas la forme requise pour être un élément simple de première espèce, puisque son dénominateur est un polynôme du second degré admettant deux racines complexes conjuguées et non pas une racine réelle multiple. Plus formellement, le dénominateur "$x^2 + x + 1$" ne peut pas se mettre sous la forme "$(x - a)^n$" où a serait un nombre réel (et n un entier positif).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.46 Eléments simples de première espèce (6)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_3(x) = \frac{-1}{x^2 + x + 1}$$

Votre réponse est correcte : F_3 n'a effectivement pas la forme requise pour être un élément simple de première espèce, puisque son dénominateur est un polynôme du second degré admettant deux racines complexes conjuguées et non pas une racine réelle multiple.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.47 Eléments simples de première espèce (7)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_4(x) = \frac{5}{2x-3}$$

Votre réponse est correcte : F_4 peut effectivement se mettre sous la forme "$\frac{A}{(x-a)^n}$" avec a et A réel, et n entier positif, puisque :

$$F_4(x) = \frac{5}{2 \times (x - \frac{3}{2})} = \frac{\frac{5}{2}}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.48 Eléments simples de première espèce (8)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_4(x) = \frac{5}{2x-3}$$

Votre réponse est fausse : en utilisant des règles de calcul élémentaires, la fraction F_4 peut se mettre sous la forme "$\frac{A}{(x-a)^n}$" avec a et A réel, et n entier positif, puisque :

$$F_4(x) = \frac{5}{2 \times (x - \frac{3}{2})} = \frac{\frac{5}{2}}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^1}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.49 Eléments simples de première espèce (9)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_5(x) = \frac{8}{(x^2 - 8x + 16)^3}$$

Votre réponse est correcte : on constate en effet au dénominateur la présence d'une identité remarquable, de sorte que la fraction F_5 peut s'écrire :

$$F_5(x) = \frac{8}{[(x-4)^2]^3} = \frac{8}{(x-4)^6}$$

Ainsi, elle a bien la forme d'un élément simple de première espèce.

Document C.2.50 Eléments simples de première espèce (10)

Exercices :
Exercice B.6

$$F_5(x) = \frac{8}{(x^2 - 8x + 16)^3}$$

Votre réponse est fausse : contrairement aux apparences, la fraction F_5 n'admet qu'un seul pôle réel, car le discriminant du trinôme du second degré apparaissant au dénominateur est nul. Plus précisément, on constate au dénominateur la présence d'une identité remarquable, de sorte que la fraction F_5 peut s'écrire :

$$F_5(x) = \frac{8}{[(x-4)^2]^3} = \frac{8}{(x-4)^6}$$

Ainsi, elle a bien la forme d'un élément simple de première espèce.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.51 Eléments simples de deuxième espèce (1)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_1(x) = \frac{5x - 14}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Votre réponse est correcte : F_1 a bien la forme d'un élément simple de deuxième espèce puisque le dénominateur est une puissance d'un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif, et le numérateur est un polynôme de degré 1.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.52 Eléments simples de deuxième espèce (2)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_1(x) = \frac{5x - 14}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Votre réponse est fausse : la fraction F_1 s'écrit bien sous la forme "$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$" avec :

- A et B dans $\mathbb{R}$, puisque $A = 5$ et $B = -14$
- $a = b = c = 1$, et $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ d'où les pôles de F_1 sont complexes conjugués
- $n = 3 \in \mathbb{N}^*$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.53 Eléments simples de deuxième espèce (3)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_2(x) = \frac{3}{2x^2 + 7}$$

Votre réponse est correcte : le numérateur de la fraction F_2 est bien de la forme "$Ax + B$", mais avec $A = 0$ et $B = 3$, tandis que le polynôme au dénominateur admet uniquement deux pôles complexes conjugués : $x = \pm\frac{7}{2}i$. F_2 est donc bien un élément simple de deuxième espèce.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.54 Eléments simples de deuxième espèce (4)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_2(x) = \frac{3}{2x^2 + 7}$$

Votre réponse est fausse : le numérateur de la fraction F_2 est bien de la forme "$Ax + B$", mais avec $A = 0$ et $B = 3$, tandis que le polynôme au dénominateur admet uniquement deux pôles complexes conjugués : $x = \pm\frac{7}{2}i$. F_2 est donc bien un élément simple de deuxième espèce.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.55 Eléments simples de deuxièmes espèce (5)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_3(x) = \frac{-2x+3}{(3x^2+x-5)^4}$$

Votre réponse est fausse : la fraction F_3 n'est pas un élément simple de deuxième espèce, car elle admet deux pôles réels distincts, et non pas deux pôles complexes conjugués. En effet, le discriminant du trinôme au dénominateur est strictement positif : $\Delta = 61$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.56 Eléments simples de deuxièmes espèce (6)

Exercices :
Exercice B.7

$$F_3(x) = \frac{-2x+3}{(3x^2+x-5)^4}$$

Votre réponse est correcte : la fraction F_3 admet deux pôles réels distincts, et non pas deux pôles complexes conjugués, puisque le discriminant du trinôme au dénominateur est strictement positif : $\Delta = 61$. F_3 n'est donc pas un élément simple de deuxième espèce

Document C.2.57 Forme de décompositions (1)

Exercices :
Exercice B.8

$$F_1(x) = \frac{3x^4 + 7x^3 - 2x + 9}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)^2}$$

Liste des pôles :

- $x = -1$ pôle réel d'ordre 1
- $x = 1$ pôle réel d'ordre 3
- $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ pôles complexes conjugués d'ordre 2

Forme de la décomposition :

$$F_1(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}$$

avec A, B, ... , H réels

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.58 Forme de décompositions (2)

Exercices :
Exercice B.8

$$F_2(x) = \frac{6x^5 - 5x^4 + x^2 - 13}{(x+3)^3(x^2-4)(x^2+1)}$$

Liste des pôles :

- $x = -3$ pôle réel d'ordre 3
- $x = 2$ et $x = -2$ pôles réels d'ordre 1 chacun, car on peut factoriser le polynôme "$x^2 - 4$" à l'aide d'une identité remarquable : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
- $x = \pm i$ pôles complexes conjugués d'ordre 1

Forme de la décomposition :

$$F_2 = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$$

avec A, B, ... , G réels

Document C.2.59 Recherche de décompositions simples (1)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_1(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 - 4)}$$

Liste des pôles : comme $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, alors $x = 1$, $x = -2$ et $x = 2$ sont tous des pôles simples de F_1.

Document C.2.60 Recherche de décompositions simples (2)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_1(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)}$$

Forme de la décomposition :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \text{ avec } A\,,\ B\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Etape intermédiaire

Liste des pôles : comme $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, alors $x = 1$, $x = -2$ et $x = 2$ sont tous des pôles simples de F_1.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.61 Recherche de décompositions simples (3)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_1(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)}$$

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -3B+C=0 \\ -4A+2B-2C=1 \end{cases}$$

Etapes intermédiaires

Liste des pôles : comme $x^2-4=(x+2)(x-2)$, alors $x=1$, $x=-2$ et $x=2$ sont tous des pôles simples de F_1.

Forme de la décomposition :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \text{ avec } A\,,\ B\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.62 Recherche de décompositions simples (4)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_1(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)}$$

Décomposition finale :

$$F_1(x) = \frac{-2}{3(x-1)} + \frac{5}{12(x+2)} + \frac{5}{4(x-2)}$$

Etapes intermédiaires

Liste des pôles : comme $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, alors $x = 1$, $x = -2$ et $x = 2$ sont tous des pôles simples de F_1 .

Forme de la décomposition :

$$F_1(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \text{ avec } A\,,\ B\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -3B + C = 0 \\ -4A + 2B - 2C = 1 \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.63 Recherche de décompositions simples (5)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Liste des pôles : $x = 0$ est un pôle réel d'ordre 1, et $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.64 Recherche de décompositions simples (6)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Forme de la décomposition :

$$F_2(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Etape intermédiaire

Liste des pôles : $x = 0$ est un pôle réel d'ordre 1, et $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Document C.2.65 Recherche de décompositions simples (7)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ 3A+B+C+D=0 \\ 2A+C+E=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Etapes intermédiaires

Liste des pôles : $x=0$ est un pôle réel d'ordre 1, et $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Forme de la décomposition :

$$F_2(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.66 Recherche de décompositions simples (8)

Exercices :
Exercice B.9

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Décomposition finale :

$$F_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

Etapes intermédiaires

Liste des pôles : $x = 0$ est un pôle réel d'ordre 1, et $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre 2.

Forme de la décomposition :

$$F_2(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ 3A + B + C + D = 0 \\ 2A + C + E = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.67 Reconnaissance de décompositions (1)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_1(x) = 3x^2 + 7 - \frac{1}{x+2} + \frac{7x+1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x} + \frac{1-x}{1+x^2}$$

Votre réponse est fausse : en effet, la fraction $\frac{7x+1}{(x+2)^2}$ n'est pas un élément simple, puisqu'elle admet un pôle réel unique et que son numérateur n'est pas une constante mais un polynôme de degré 1. La décomposition proposée n'est donc pas une décomposition en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.68 Reconnaissance de décompositions (2)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_1(x) = 3x^2 + 7 - \frac{1}{x+2} + \frac{7x+1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x} + \frac{1-x}{1+x^2}$$

Votre réponse est correcte : la fraction $\frac{7x+1}{(x+2)^2}$ n'est effectivement pas un élément simple, puisqu'elle admet un pôle réel unique et que son numérateur n'est pas une constante mais un polynôme de degré 1.

Document C.2.69 Reconnaissance de décompositions (3)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_2(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2}{3(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{(x^2+1)^4}$$

Votre réponse est correcte : tous les éléments présents dans cette décomposition sont bien des éléments simples.

Document C.2.70 Reconnaissance de décompositions (4)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_2(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{2}{3(x^2+1)^2} - \frac{3x+1}{(x^2+1)^4}$$

Votre réponse est fausse : tous les éléments présents dans cette décomposition sont bien des éléments simples. Plus précisément :

- "$2x+1$" est la partie entière de F_2 .
- "$\frac{1}{x}$" est un élément simple de première espèce associé au pôle réel simple $x = 0$.
- "$-\frac{2}{x-3}$" et "$\frac{7}{(x-3)^2}$" sont des éléments simples de première espèce associés au pôle réel d'ordre 2 $x = 3$.
- "$\frac{2}{3(x^2+1)^2}$" et "$-\frac{3x+1}{(x^2+1)^4}$" sont des éléments simples de deuxième espèce associés aux pôles complexes conjugués d'ordre 4 : $x = \pm i$. Avec de tels pôles, on pouvait s'attendre à obtenir 4 éléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^3} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^4}$$

mais il se trouve que les constantes A , B , C , E et F sont toutes nulles.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.71 Reconnaissance de décompositions (5)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_3(x) = 8x + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+3}{(1+x^2)^2} + \frac{4x+5}{x^2-3}$$

Votre réponse est fausse : en effet, la fraction $\frac{4x+5}{x^2-3}$ n'est pas un élément simple, puisqu'elle admet deux pôles réels distincts ($x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$) et non pas un seul. La décomposition proposée n'est donc pas une décomposition en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.72 Reconnaissance de décompositions (6)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_3(x) = 8x + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+3}{(1+x^2)^2} + \frac{4x+5}{x^2-3}$$

Votre réponse est correcte : la fraction $\frac{4x+5}{x^2-3}$ n'est effectivement pas un élément simple, puisqu'elle admet deux pôles réels distincts ($x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$) et non pas un seul.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.73 Reconnaissance de décompositions (7)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_4(x) = 4x^3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x-9}{x^2+3x+2} + \frac{x+1}{(x^2+3x+2)^2}$$

Votre réponse est fausse : en effet, les fractions $\frac{2x-9}{x^2+3x+2}$ et $\frac{x+1}{(x^2+3x+2)^2}$ ne sont pas des éléments simples, puisqu'elles admettent deux pôles réels distincts ($x = -1$ et $x = -2$, le discriminant de $x^2 + 3x + 2$ étant strictement positif) et non pas un seul. La décomposition proposée n'est donc pas une décomposition en éléments simples.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.74 Reconnaissance de décompositions (8)

Exercices :
Exercice B.10

$$F_4(x) = 4x^3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x-9}{x^2+3x+2} + \frac{x+1}{(x^2+3x+2)^2}$$

Votre réponse est correcte : les fractions $\frac{2x-9}{x^2+3x+2}$ et $\frac{x+1}{(x^2+3x+2)^2}$ ne sont effectivement pas des éléments simples, puisqu'elles admettent deux pôles réels distincts ($x = -1$ et $x = -2$, le discriminant de $x^2 + 3x + 2$ étant strictement positif) et non pas un seul.

Document C.2.75 Décomposition complète (1)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Document C.2.76 Décomposition complète (2)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Etape intermédiaire

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.77 Décomposition complète (3)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Partie entière : la division euclidienne de P par Q donne :

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) + (8x^2 - 10x + 9)$$

D'où :

$$F(x) = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)}$$

Etapes intermédiaires

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.78 Décomposition complète (4)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Liste des pôles : d'après la factorisation de $Q(x)$, on voit que F n'a que des pôles simples : un pôle réel $x = 2$ et deux pôles complexes conjugués $x = \pm i\sqrt{3}$.

Etapes intermédiaires

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Partie entière : la division euclidienne de P par Q donne :

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) + (8x^2 - 10x + 9)$$

D'où :

$$F(x) = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.79 Décomposition complète (5)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Forme de la décomposition de la fraction résiduelle après la détermination de la partie entière :

$$\frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+3}$$

Etapes intermédiaires

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Partie entière : la division euclidienne de P par Q donne :

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) + (8x^2 - 10x + 9)$$

D'où :

$$F(x) = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)}$$

Liste des pôles : d'après la factorisation de $Q(x)$, on voit que F n'a que des pôles simples : un pôle réel $x = 2$ et deux pôles complexes conjugués $x = \pm i\sqrt{3}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.80 Décomposition complète (6)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A + B = 8 \\ -2B + C = -10 \\ 3A - 2C = 9 \end{cases}$$

Etapes intermédiaires

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.80
Décomposition complète (6)

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Partie entière : la division euclidienne de P par Q donne :

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) + (8x^2 - 10x + 9)$$

D'où :

$$F(x) = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)}$$

Liste des pôles : d'après la factorisation de $Q(x)$, on voit que F n'a que des pôles simples : un pôle réel $x = 2$ et deux pôles complexes conjugués $x = \pm i\sqrt{3}$.

Forme de la décomposition de la fraction résiduelle après la détermination de la partie entière :

$$\frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.81 Décomposition complète (7)

Exercices :
Exercice B.11

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 9x^2 - 13x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

Décomposition finale :

$$F(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} + \frac{5x}{x^2+3}$$

Etapes intermédiaires

Factorisation du dénominateur : on remarque que $x = 2$ est une racine évidente du dénominateur Q (les racines "évidentes" sont à chercher en général parmi les nombres -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3). On peut donc factoriser $Q(x)$ par $(x-2)$, et on obtient, par division euclidienne par exemple :

$$Q(x) = (x-2)(x^2+3)$$

Les autres racines de Q sont donc $x = \pm i\sqrt{3}$.

Document C.2.81
Décomposition complète (7)

Irréductibilité : on vérifie que $x = 2$, $x = i\sqrt{3}$ et $x = -i\sqrt{3}$ n'annulent pas le numérateur P. Par conséquent, F est irréductible.

Partie entière : la division euclidienne de P par Q donne :

$$P(x) = (x+1) \times Q(x) + (8x^2 - 10x + 9)$$

D'où :

$$F(x) = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = x + 1 + \frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)}$$

Liste des pôles : d'après la factorisation de $Q(x)$, on voit que F n'a que des pôles simples : un pôle réel $x = 2$ et deux pôles complexes conjugués $x = \pm i\sqrt{3}$.

Forme de la décomposition de la fraction résiduelle après la détermination de la partie entière :

$$\frac{8x^2 - 10x + 9}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3}$$

Système d'identification des constantes obtenu après avoir mis tous les éléments simples au même dénominateur :

$$\begin{cases} A + B = 8 \\ -2B + C = -10 \\ 3A - 2C = 9 \end{cases}$$

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

B

C

D

E

F

Index des notions

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents