

# 4. Calcul des Aciers Longitudinaux à l'ELU en Flexion Simple

## 4.1 Hypothèses de calcul (A.4.3,2)

Nous nous intéresserons à une poutre de section rectangulaire, sollicitée en flexion simple et à l'ELU. L'ELU est dans notre cas, l'état limite ultime de résistance des matériaux acier et béton.

1. Hypothèse de **Navier-Bernoulli** (les sections droites restent planes pendant la déformation)
2. **Pas de glissement relatif** entre acier et béton
3. **Résistance du béton en traction** négligée
4. **Diagramme contrainte -déformation du béton** (A.4.3,41)

La limite de la résistance des matériaux est déterminée à partir d'un critère de ruine minorée par des coefficients de sécurité  $\gamma_s$  pour l'acier et  $\gamma_b$  pour le béton.

$f_{bu} = 0,85.f_{cj}/(\theta.\gamma_b)$ . L'origine de  $\gamma_b$  vient des dispersions des résistances réelles par rapport à  $f_{cj}$ , ainsi que des défauts localisés.  $\theta$  dépend de la durée d'application des charges. Lorsque celles-ci sont appliquées plus de 24h,  $\theta$  est égal à 1.

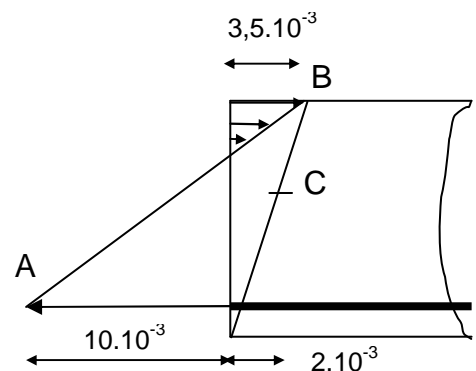
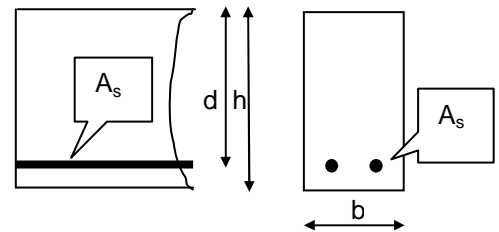
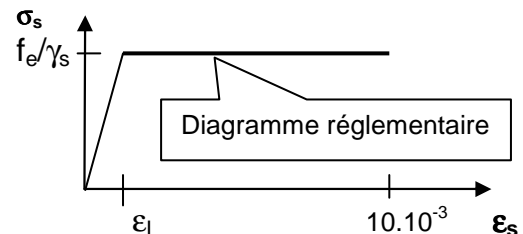
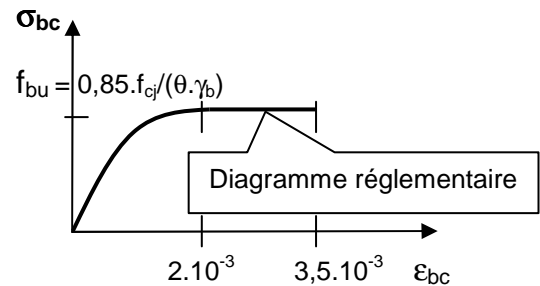
5. **Diagramme contrainte -déformation de l'acier**  
La valeur de  $E_s$  module d'élasticité longitudinale est 200000 MPa.  
L'origine de  $\gamma_s$  est la prise en compte du mauvais positionnement des barres dans le coffrage et des dispersions possibles entre les essais de laboratoire et la réalité.

6. **Concentration de la section d'acier** au centre de gravité

7. **Diagrammes des déformations limites de la section** (A4.3,3)

Les diagrammes possibles résultent des déformations limites fixées pour le béton et l'acier, définis à partir de "3 pivots": A, B et C.

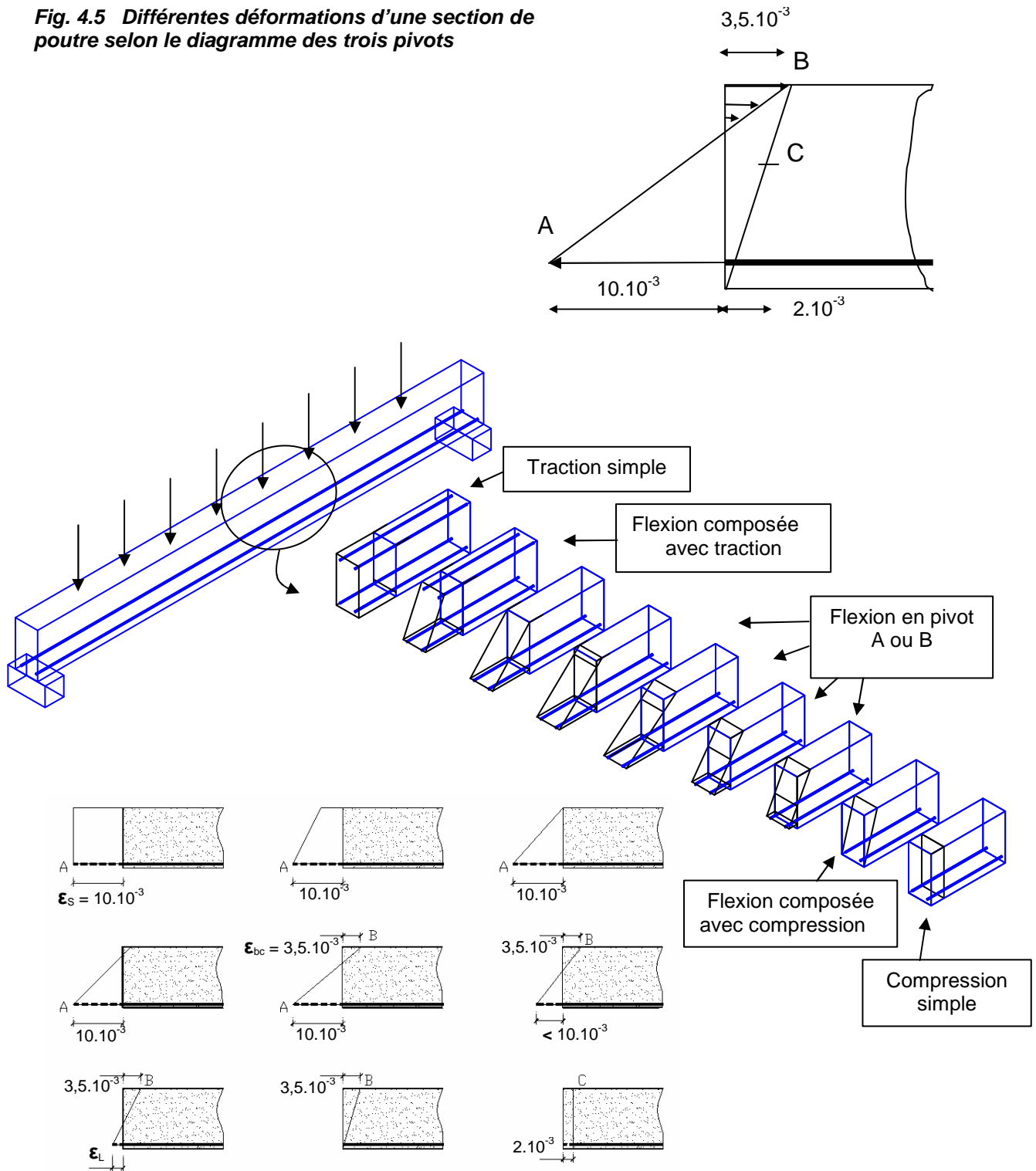
- Pivot A : Traction simple puis flexion simple ou composée
- Pivot B : Flexion simple ou composée
- Pivot C : Flexion composée avec compression puis compression simple



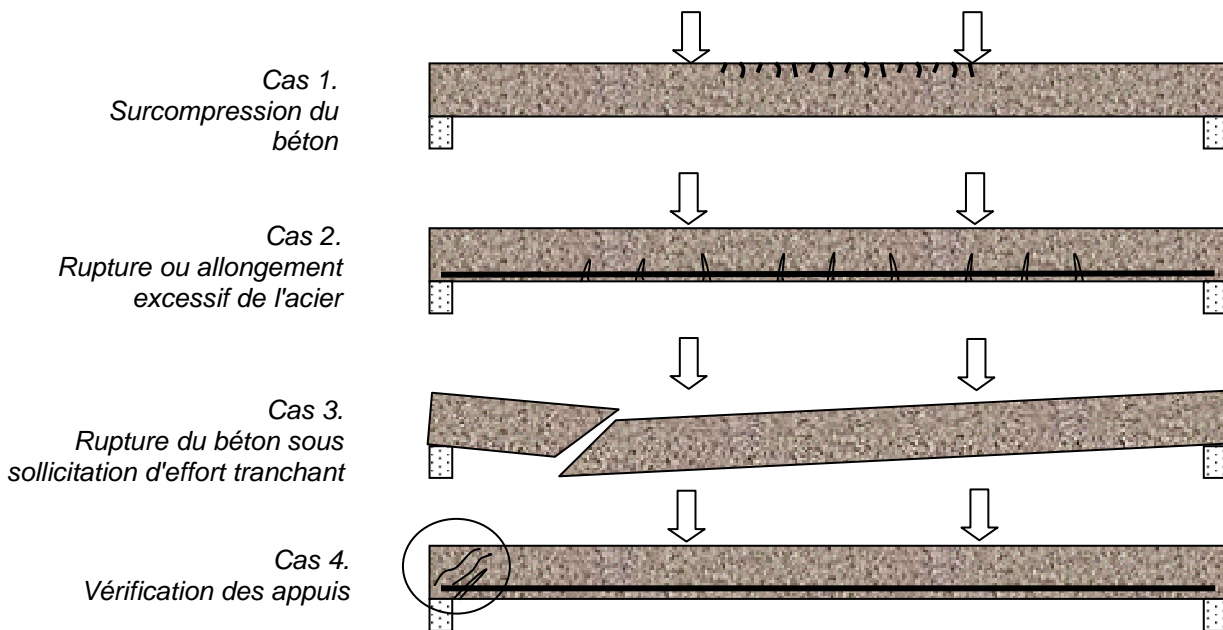
**Diagramme dit "des 3 pivots"**

**Fig 4.1 à 4.4 Hypothèses de calculs**

**Fig. 4.5** Différentes déformations d'une section de poutre selon le diagramme des trois pivots



## 4.2. Essais de poutres. Modes de rupture



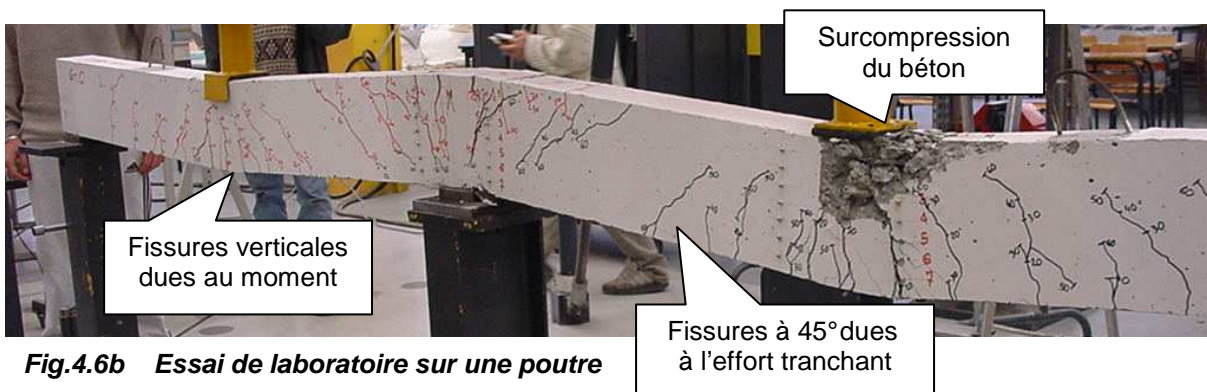
**Fig.4.6 Modes de rupture d'une poutre sur 2 appuis sollicitée en flexion**

Si l'on mène des essais jusqu'à rupture de poutres armées sollicitées en flexion simple, on constate trois modes de rupture principaux. Deux sous l'effet du moment fléchissant et un sous l'effet de l'effort tranchant.

- Cas 1. C'est une rupture par excès de compression du béton sur les fibres supérieures de la poutre. C'est le cas le plus fréquent. Il y a épuisement de la résistance en compression du béton.
- Cas 2. Il s'agit d'une rupture par épuisement de la résistance de l'acier dans la partie tendue de la poutre, sur les fibres inférieures. Il y a allongement excessif de l'acier, voire rupture complète.
- Cas 3. Le 3<sup>ème</sup> mode de rupture que l'on rencontre concerne l'effet de l'effort tranchant  $V$ . C'est une rupture par cisaillement au voisinage d'un appui, avec fissure voisine de  $45^\circ$ . Ce cas sera étudié dans le chapitre 5 (Calcul des aciers transversaux)
- Cas 4. Dans le chapitre 6 seront abordés les problèmes de l'appui d'about de poutre où l'on peut avoir un ferrailage insuffisant ou insuffisamment ancré et une bielle de béton sur-comprimé

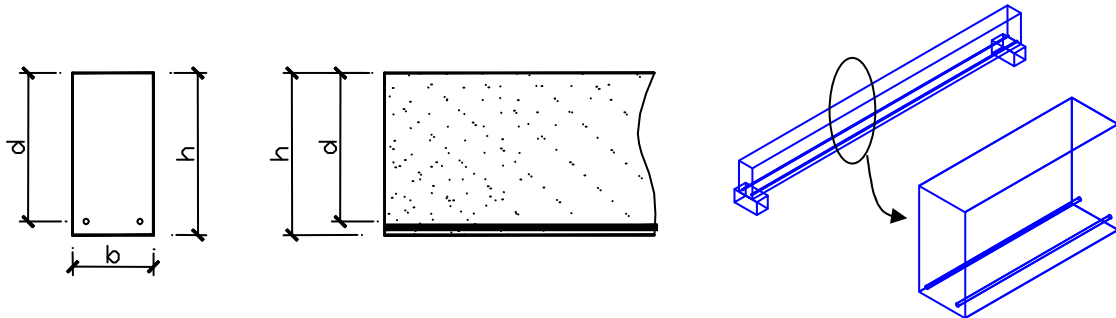
L'E.L.U est un état fictif représentatif de ces modes de rupture (critère de ruine) par rapport auxquels on prend une sécurité - au niveau des sollicitations par des coefficients de pondération sur les charges.  
- au niveau des matériaux par les coefficients partiels de sécurité.

Si cette sécurité n'existait pas, à l'E.L.U sous l'effet des charges appliquées, la section serait théoriquement dans un état de rupture. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au cas de rupture 1 et 2 et nous verrons comment construire les diagrammes "Contraintes - Déformations" correspondants, pour les matériaux acier et béton.



**Fig.4.6b Essai de laboratoire sur une poutre**

## 4.3 Déformations, état de contraintes

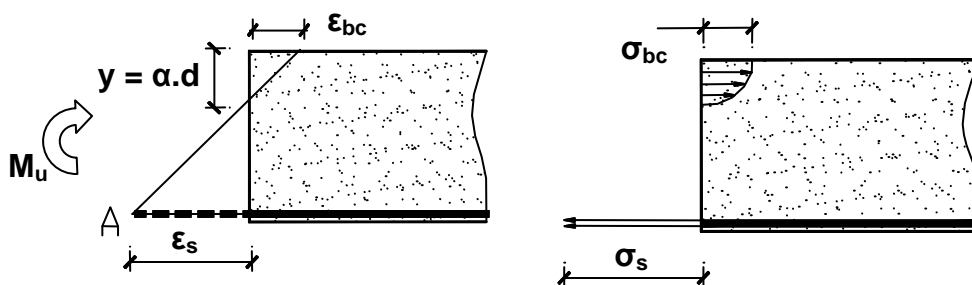


**Fig.4.7 Géométrie de la section droite**

Le long de la poutre, à l'abscisse "x", au centre de gravité d'une "coupure" plane, perpendiculaire à l'axe longitudinal de la poutre, on a évalué à partir d'une combinaison des actions (1,35.G +1,5.Q le plus souvent), un moment fléchissant ultime d'intensité  $M_u$  (exprimé en m.MN).

- b est la largeur de la section droite
- h est la hauteur de coffrage de la poutre
- d est la hauteur utile de la section droite (du CdG des aciers tendus à la fibre de béton la plus comprimé)
- $A_s$  est l'aire totale d'acier du groupe de plusieurs barres

### a. Si le moment fléchissant $M_u$ a une intensité "faible". Pivot A



**Fig.4.8 Déformée et contraintes d'une section droite**

La membrure comprimée de la poutre va subir des raccourcissements relatifs, les fibres supérieures du béton, les plus sollicitées, vont subir un raccourcissement relatif  $\epsilon_{bc}$  valant au plus  $3,5 \cdot 10^{-3}$ . La hauteur de béton comprimé vaut  $y = \alpha \cdot d$

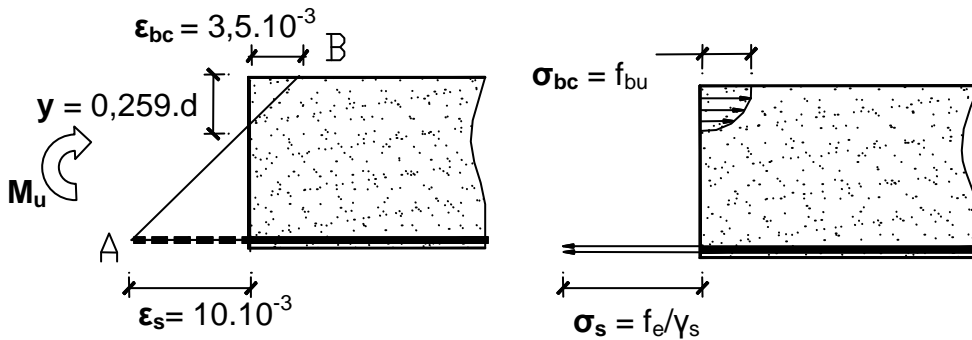
La membrure tendue de la poutre va subir des allongements relatifs. La résistance du béton à la traction étant négligée, on l'arme avec des aciers longitudinaux, de section globale  $A_s$ , qui vont donc subir un allongement relatif limité à la valeur  $10 \cdot 10^{-3}$ .

Si le béton est faiblement sollicité, il supporte des raccourcissements relatifs  $\epsilon_{bc}$  faibles et inférieurs à  $2 \cdot 10^{-3}$ . Le coefficient  $\alpha$  est donc aussi "faible". Pour déduire l'état de contrainte de la membrure comprimée du béton, il faut établir la relation déformation -contrainte. (voir "diagramme de calcul du béton").

- Au niveau de l'axe neutre, pas de déformation donc les contraintes normales sont nulles.
- Puis les raccourcissements croissent linéairement, il leur correspond donc une variation parabolique des contraintes  $\sigma_{bc}$  tant que  $\epsilon_{bc}$  est inférieur à  $2 \cdot 10^{-3}$ . Dans la membrure tendue, on souhaite disposer une section d'acier  $A_s$  minimale, il faut donc que l'acier travaille au mieux de ses possibilités. On admet qu'il subit un allongement relatif de  $10 \cdot 10^{-3}$  et que sa contrainte de traction vaut  $\sigma_s = f_e / \gamma_s$

Si l'on fait croître l'intensité de  $M_u$ , la hauteur de béton comprimé croît, le raccourcissement relatif du béton croît, le diagramme des contraintes de compression du béton devient "parabole -rectangle". La contrainte maximum plafonne à la valeur  $f_{bu}$ .

**b. Cas particulier : La droite des déformations passe par les pivots A et B**



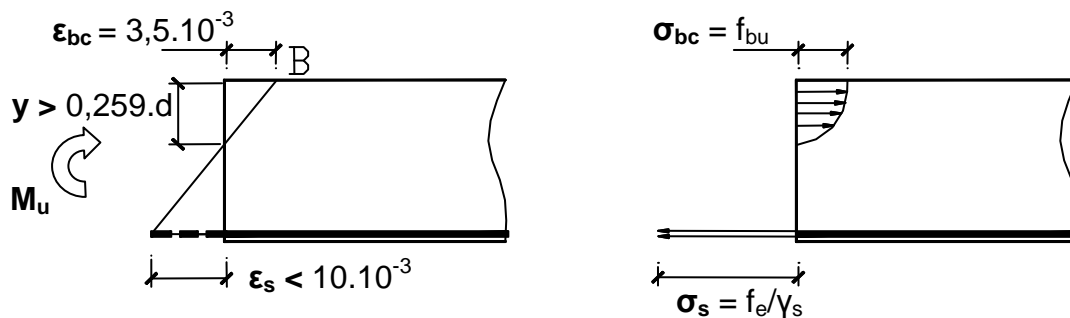
**Fig 4.9**  
Déformations et contraintes d'une section droite

Dans ce cas la membrure comprimée a une hauteur "y" telle que :

$$\frac{\epsilon_{bc}}{y} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_{bc}}{d} \text{ soit } y = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s} \cdot d = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}} d = 0,259d = \alpha \cdot d$$

D'où la valeur particulière  $\alpha = 0,259$

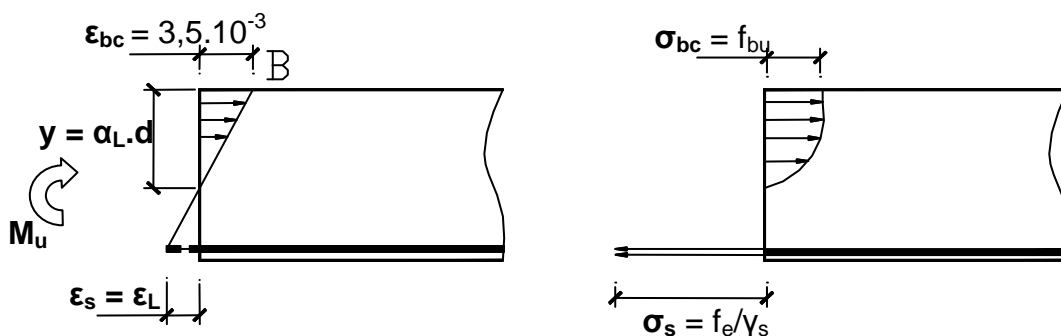
**c. Si l'on fait croître de nouveau l'intensité de  $M_u$ . Pivot B**



**Fig 4.10**  
Déformations et contraintes

La hauteur de la membrure comprimée continue à croître. L'allongement relatif de l'acier supérieur à  $\epsilon_L$  (voir diagramme de calcul des aciers) entraîne une contrainte de traction dans l'acier toujours égale à  $f_e / \gamma_s$ .

**d. Cas particulier et limite supérieure de l'intensité du moment.**



**Fig 4.11**  
Déformations et contraintes

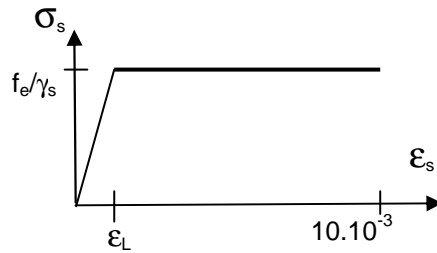
Dans ce cas la membrure comprimée a une hauteur  $y = \alpha_L \cdot d = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + \epsilon_L} d$  avec  $\epsilon_L = \frac{f_e / \gamma_s}{E_s}$

Dans le cas particulier où  $f_e = 500 \text{MPa}$  on obtient

$$\epsilon_L = \frac{500/1,15}{200000} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ et } \alpha_L = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,17 \cdot 10^{-3}} = 0,616$$

Vouloir augmenter encore l'intensité du moment ultime  $M_u$  conduirait à une aberration économique: En effet si  $\epsilon_s < \epsilon_L$  la contrainte de traction des aciers va valoir  $\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s < f_e / \gamma_s$ , (on est alors sur la "droite de Hooke") et cela conduira à une section d'acier énorme que l'on ne pourra, raisonnablement disposer dans la poutre (Voir Fig.4.17).

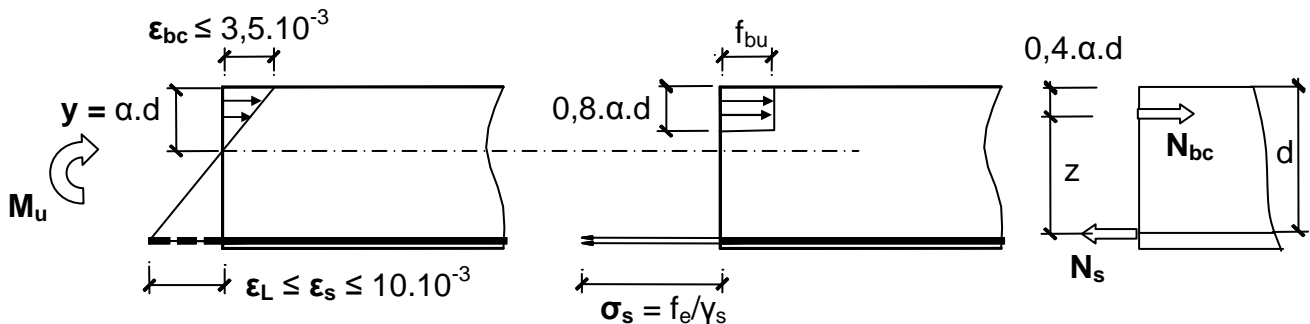
**Fig 4.12 Rappel du diagramme "Contraintes -Déformations" de l'acier**



$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$  d'où  
 $\epsilon_s = \sigma_s / E_s$  soit pour la limite  $\epsilon_L$   
 $\epsilon_L = [f_e / \gamma_s] / E_s$  d'où pour  $f_e = 500 \text{MPa}$   
 $\epsilon_L = [500/1,15] / 200000 = 2,17 \cdot 10^{-3}$

## 4.4 Méthode de calcul simplifiée, diagramme rectangulaire des contraintes

On admet, pour justifier la section d'acier  $A_s$  nécessaire pour équilibrer un moment ultime  $M_u$ , de remplacer les diagrammes "réels" (fraction de parabole ou parabole -rectangle) par un diagramme "rectangulaire" de hauteur  $0,8 \cdot y = 0,8 \cdot \alpha \cdot d$  et d'intensité  $f_{bu}$ .



**Fig 4.13 Déformations, contraintes, résultantes**

Le vecteur effort normal résultant des compressions  $N_{bc} = 0,8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b \cdot f_{bu}$  passe donc par le centre de gravité du volume des contraintes, soit à la distance  $0,4 \cdot \alpha \cdot d$  des fibres supérieures du béton.

Le vecteur effort normal résultant des tractions  $N_s = A_s \cdot f_e / \gamma_s$  passe lui par le centre de gravité du groupe des barres disposées dans la membrure tendue.

Le moment ultime  $M_u$  appliqué à la section équivaut donc au couple  $(N_{bc}, N_s)$  présentant un bras de levier  $z = (1 - 0,4 \cdot \alpha) \cdot d$

L'équation de moment par rapport aux aciers tendus permet d'écrire :

$$\begin{aligned} N_{bc} \cdot z &= M_u \\ (0,8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0,4 \cdot \alpha \cdot d) &= M_u \\ 0,8 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha) &= M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu}) \end{aligned}$$

$0,8. \alpha - 0,32. \alpha^2 - \mu = 0$  en posant  $\mu = M_u / (b.d^2.f_{bu})$  moment réduit  
 $0,32. \alpha^2 - 0,8. \alpha + \mu = 0$   
 $0,4.\alpha^2 - \alpha + \mu/0,8 = 0$  équation du second degré en  $\alpha$   
 $\Delta = 1 - 4 \times 0,4. \mu/0,8 = 1 - 2. \mu$   
 La racine ( $<1,25$ ) est  $\alpha = (1 - \Delta^{1/2})/0,8$  soit

$$\alpha = 1,25.[1 - (1-2 \mu)^{1/2}]$$

L'équation de moment par rapport à la fibre supérieure

$$N_{st.z} = M_u$$

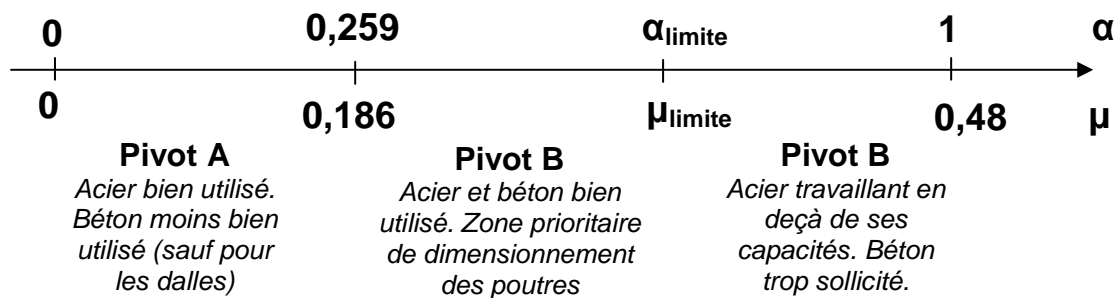
$A_s.f_e/\gamma_s.z = M_u$  en effet si  $\alpha \leq \alpha_L$  alors  $\sigma_s = f_e/\gamma_s$  d'où la valeur de  $A_s$

avec  $z = (1-0,4\alpha).d$

$$A_s = M_u / [(1-0,4\alpha)d.f_e/\gamma_s]$$

Dans la pratique du calcul, on limite la valeur de  $\alpha$  en deçà de la valeur  $\alpha_{limite}$ , pour des raisons d'utilisation optimale des caractéristiques mécaniques de l'acier.

Rappel : Si  $f_e = 500\text{MPa}$  alors  $\alpha_{limite} = 0,616$  et  $\mu_L = 0,371$



## 4.5 Condition de Non-Fragilité (A.4.2,1)

"Par définition est considérée comme non fragile, une section tendue ou fléchie telle que la sollicitation provoquant la fissuration du béton dans le plan de la section considérée entraîne dans les aciers une contrainte au plus égale à leur limite d'élasticité garantie".

"pour évaluer la sollicitation de fissuration, les calculs sont conduits dans l'hypothèse d'un diagramme des contraintes linéaire sur toute la hauteur de la section supposée non armée et non fissurée, en prenant sur la fibre la plus tendue une contrainte égale à  $f_{tj}$ "

Dans le cas d'une section rectangulaire sollicitée en flexion simple, le calcul est le suivant :

Valeur du moment qui crée la première fissure

$$f_{tj} = M_{fiss} / [bh^2/6] \text{ soit } M_{fiss} = [bh^2/6].f_{tj}$$

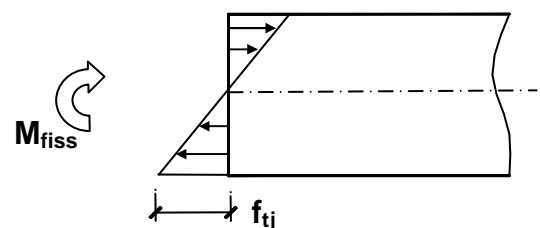


Fig.4.14 Diagramme linéaire des contraintes

Armons maintenant la section avec des aciers longitudinaux capables d'équilibrer le moment  $M_{fiss}$  tout en travaillant à une contrainte de traction égale à  $f_e$ . Admettons une hauteur utile  $d = 0,9.h$  et un "bras de levier"  $z = 0,9.d$ . D'où  $z \approx 0,81h$

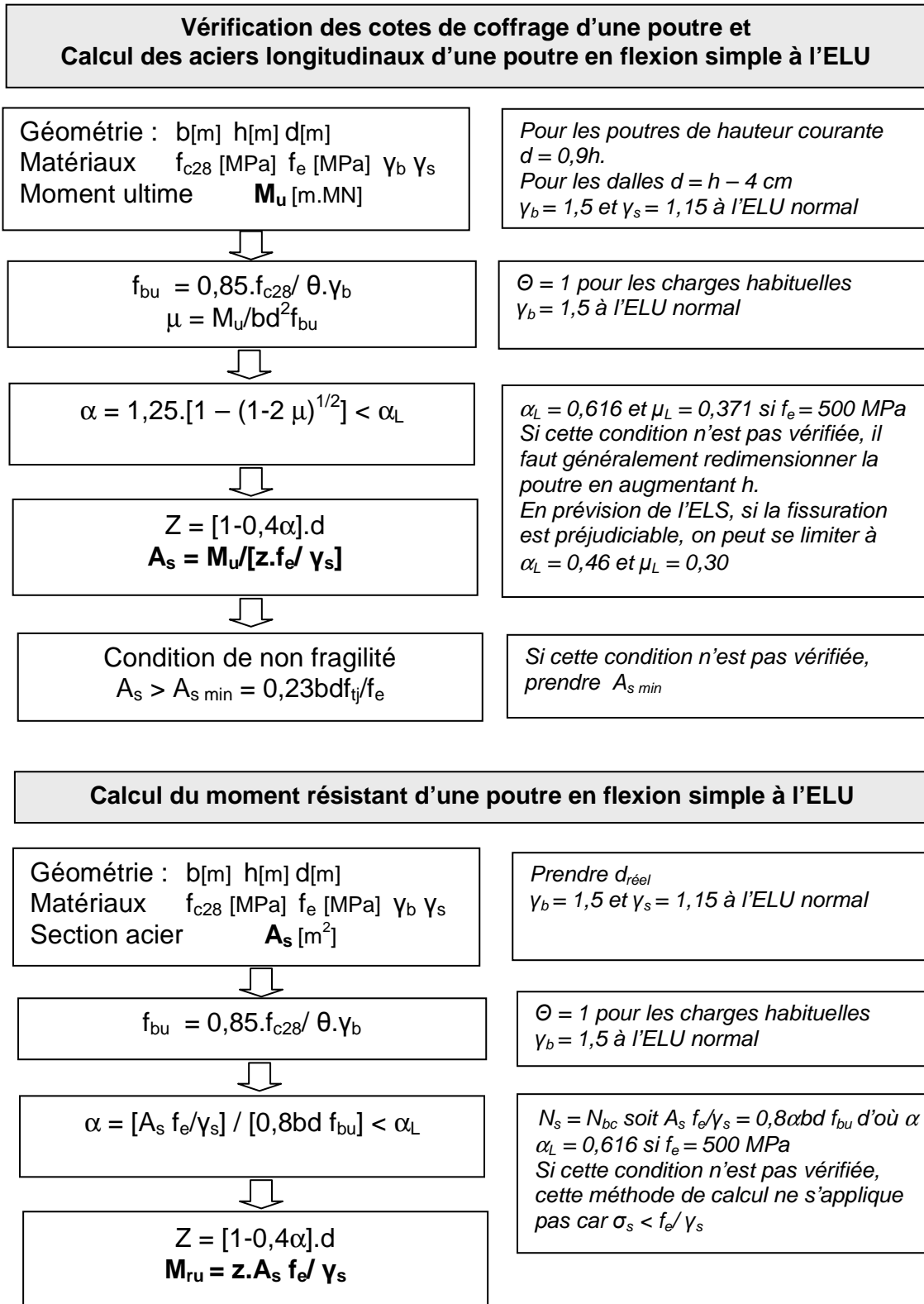
$$A_s = M_{fiss} / [z.f_e] = [bh^2/6].f_{tj} / [0,81hf_e] = bh.f_{tj} / [6 \times 0,81f_e] = b[d/0,9].f_{tj} / [6 \times 0,81f_e] = 0,23bdf_{tj}/f_e$$

$$A_s > A_{s \text{ min}} = 0,23bdf_{tj}/f_e$$

Quelle que soit la sollicitations, la section d'armatures longitudinales dans un poutre de section rectangulaire ne sera pas inférieure à cette valeur.

## 4.6. Organigrammes Poutres en flexion simple à l'ELU

On donne ci-après deux organigrammes. Le premier permet le dimensionnement des aciers connaissant le moment ultime de la poutre en flexion simple. Le second permet de calculer le moment résistant d'une section, connaissant la section d'acier mise en place.





## Programme pour Casio

### =ELU=

" B = [m] " ? → B :

" D = [m] " ? → D :

" FBU = [Mpa]" ? → F :

" MU = [m.MN]" ? → M :  $M \div B \div D^2 \div F \rightarrow N$  :

"ALPHA " :  $1.25x (1 - \sqrt{(1-2N)}) \rightarrow A$  ▲

"AS [cm<sup>2</sup>]" :  $M \div (1-0.4xA) \div D \div 500x1.15x10000$

### =ELS=

" B = [m] " ? → B :

" D = [m] " ? → D :

" AS = [cm<sup>2</sup>]" ? → A :

" MSER = [m.MN]" ? → M :  $A \times 10^{-4} \rightarrow A$  :

" Y = [m] " :  $(-15xA + \sqrt{(225xA^2 + 30xAxBxD)}) \div B \rightarrow Y$  ▲

" I = [m<sup>4</sup>] " :  $BxY^3 \div 3 + 15xAx(D-Y)^2 \rightarrow I$  ▲

"SIGMA BETON [MPa]" :  $MxY \div I$  ▲

"SIGMA ACIER [MPa]" :  $15xMx(D-Y) \div I +$  ▲

## Programme pour Texas Instrument

### =ELU=

Disp " B = [m] "

Input B

Disp " D = [m] "

Input D

Disp " FBU = [Mpa]"

Input F

Disp " Mu = [M.MN] "

Input M

Clear Home

M/B/D<sup>2</sup>/F→N

$1.25x (1 - \sqrt{(1-2N)}) \rightarrow A$

Disp "Alpha"

Disp A

M/(1-0,4xA)/D/500x1,15x10000→X

Disp "AS [cm<sup>2</sup>]"

Disp X

### =ELS=

Disp " B = [m] "

Input B

Disp " D = [m] "

Input D

Disp "AS [cm<sup>2</sup>]"

Disp A

Input A

$A \times 10^{-4} \rightarrow A$

Disp " Mser = [m.MN] "

Input M

Clear Home

$(-15xA + \sqrt{(225xA^2 + 30xAxBxD)})/B \rightarrow Y$

Disp "Y [m]"

Disp Y

$BxY^3/3 + 15xAx(D-Y)^2 \rightarrow I$

Disp "Y [m<sup>4</sup>]"

Disp I

Pause

$MxY/I \rightarrow X$

Disp "SIGMA BETON [MPa]"

Disp X

$15xMx(D-Y)/I \rightarrow Z$

Disp "SIGMA ACIER [MPa]"

Disp Z

## 4.7 Application 1 : Suite de la poutre étudiée au chapitre 1

Largeur de poutre	<b>b = 0,20m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,50m</b>
Hauteur utile	<b>d = 0,9h = 0,45m</b>
Matériaux : béton	<b>f<sub>c28</sub> = 25 MPa</b> $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal
Acier	<b>f<sub>e</sub> = 500 MPa</b> $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b>M<sub>u</sub> = 0,0221x6<sup>2</sup>/8 = 0,0995 m.MN</b>

Contrainte de calcul du béton	<b>f<sub>bu</sub> = 0,85.f<sub>c28</sub>/ <math>\theta</math>.<math>\gamma_b</math> = 0,85x25/(1x1,5) = 14,17 MPa</b>
Moment réduit	<b><math>\mu = M_u/bd^2f_{bu} = 0,0995/(0,20x0,45^2x14,17) = 0,173</math></b>
Position de l'axe neutre	<b><math>\alpha = 1,25.[1 - (1-2\mu)^{1/2}] = 0,239 &lt; \alpha_L = 0,616</math></b>
Bras de levier	<b>z = [1-0,4<math>\alpha</math>].d = (1-0,4x0,239) .0,45 = 0,407m</b>

Section d'armature	<b>A<sub>s</sub> = M<sub>u</sub>/[z.f<sub>e</sub>/ <math>\gamma_s</math>] = 0,0995/(0,407x500/1,15) m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s</sub> = 5,62 cm<sup>2</sup></b>
Condition de non fragilité	<b>A<sub>s min</sub> = 0,23bdf<sub>ij</sub>/f<sub>e</sub> = 0,23x0,20x0,45x2,1/500 m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s min</sub> = 0,87 cm<sup>2</sup></b>

Choix d'un ferrailage :

La poutre fait 20cm de largeur, on peut prendre 2 barres par lit.  
Soit **4 HA14** sur 2 lits.

## Application 2 : Poutre

Dans un bâtiment à usage industriel la structure est faite de poteaux en béton armé coulés en oeuvre, de poutres béton armé préfabriquées au sol, levées et clavetées en tête des poteaux. Les poutres ont une portée de 12,00 m, elles supportent en leur milieu une ferme triangulée en bois massif par l'intermédiaire d'un sabot mécano-soudé "spité" sur le flanc de la poutre.

Pour chaque ferme le charpentier bois annonce les réactions d'appui suivantes :

G = charge permanente = 60 kN

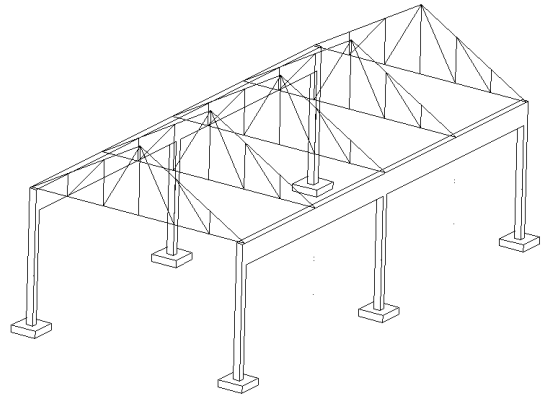
S = charge de neige = 50 kN.

Combinaison de charges à étudier à l'ELU :  $1,35G+1,5S$

Le béton utilisé est tel que  $f_{c28} = 25\text{MPa}$

Les aciers sont à haute adhérence  $f_e = 500\text{MPa}$

La poutre est de section 25cmx85cm



La note de calcul des aciers longitudinaux sera rédigée selon le plan type suivant :

- Modélisation
- Bilan des charges
- Sollicitations
- Acier longitudinaux

### Solution

- Modélisation

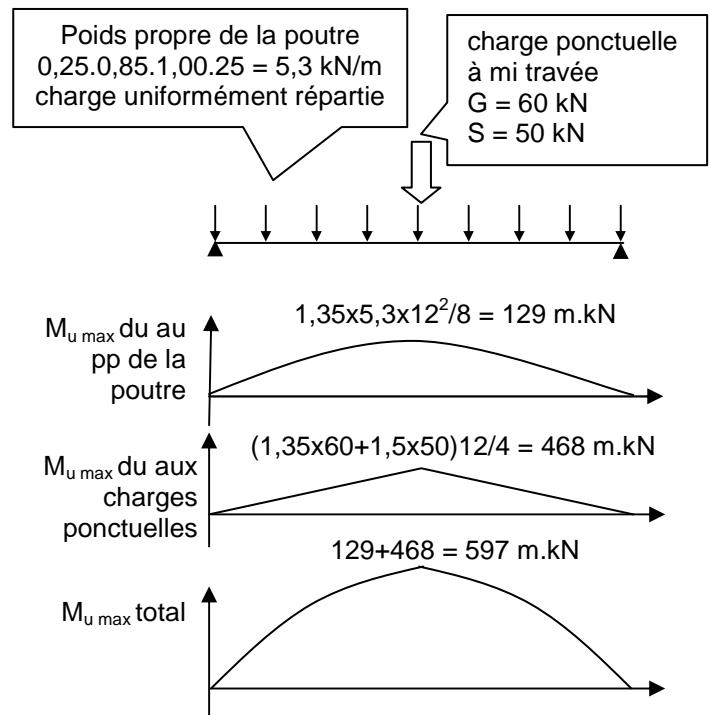
On suppose que chaque travée de poutre de portée 12m est indépendante de la travée suivante (non continuité de poutres) et qu'elle repose simplement sur ses appuis.

- Bilan des charges

Les seules charges qui font fléchir la poutre sont représentées sur le schéma ci-contre

- Calcul du moment

Les charges sont pondérées par 1,35 et 1,5.  
Les moments sont calculés en appliquant le principe de superposition.

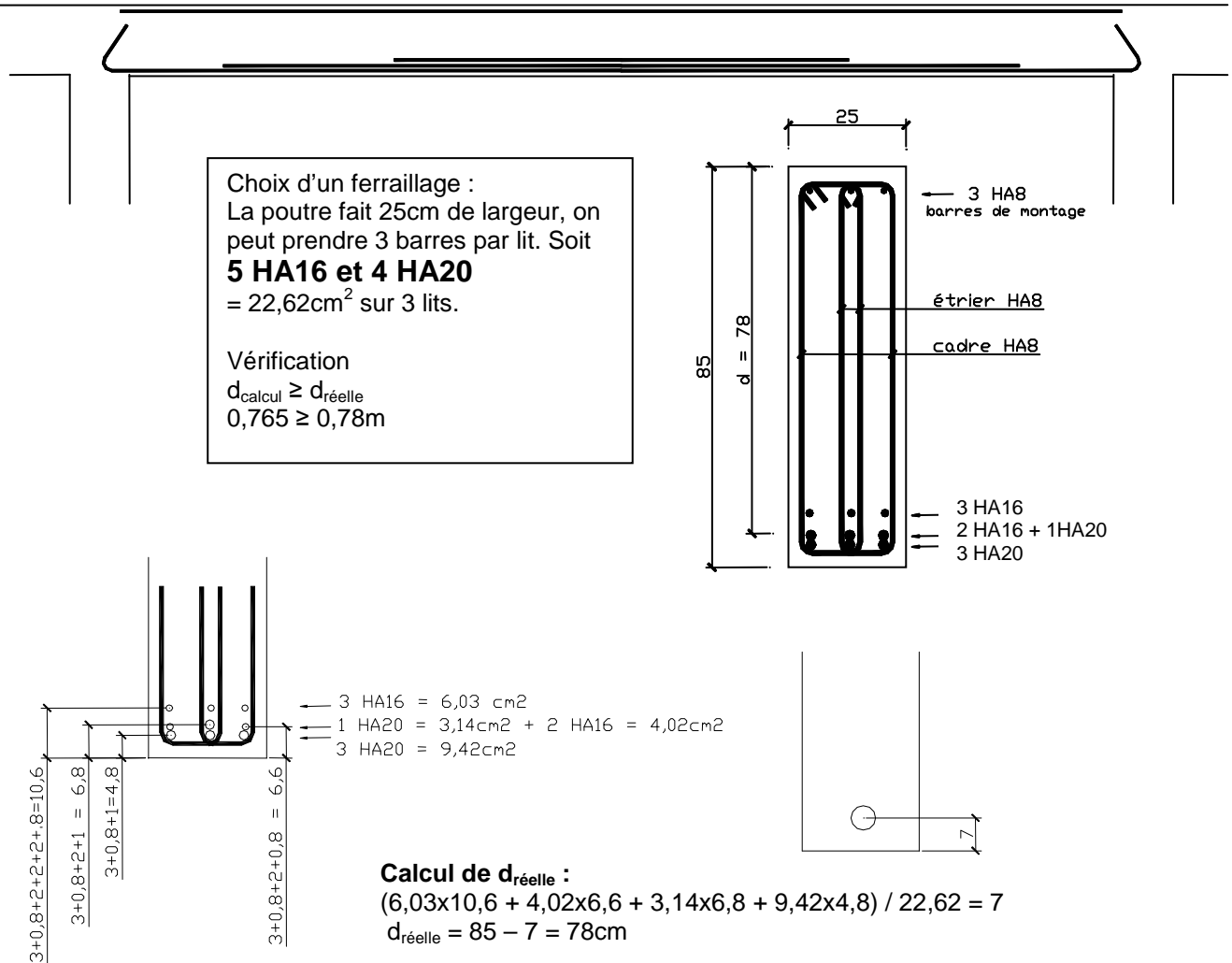


d. Calcul des aciers

Largeur de poutre	<b>b = 0,25m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,85m</b>
Hauteur utile	<b>d = 0,9h = 0,765m</b> Cette valeur est à ce stade prise approximativement et sera vérifiée.
Matériaux :	béton <b>f<sub>c28</sub> = 25 MPa</b> $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal
	Acier <b>f<sub>e</sub> = 500 MPa</b> $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b>M<sub>u</sub> = 0,597 m.MN</b>

Contrainte de calcul du béton	<b>f<sub>bu</sub> = 0,85.f<sub>c28</sub>/θ.γ<sub>b</sub> = 0,85x25/(1x1,5) = 14,17 MPa</b>
Moment réduit	<b>μ = M<sub>u</sub>/bd<sup>2</sup>f<sub>bu</sub> = 0,597/(0,25x0,765<sup>2</sup>x14,17) = 0,288</b>
Position de l'axe neutre	<b>α = 1,25.[1 - (1-2 μ)<sup>1/2</sup>] = 0,436 &lt; α<sub>L</sub> = 0,616</b>
Bras de levier	<b>z = [1-0,4α].d = (1-0,4x0,436) .0,765 = 0,632m</b>

Section d'armature	<b>A<sub>s</sub> = M<sub>u</sub>/[z.f<sub>e</sub>/γ<sub>s</sub>] = 0,597/(0,638x500/1,15) m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s</sub> = 21,8 cm<sup>2</sup></b>
Condition de non fragilité	<b>A<sub>s min</sub> = 0,23bdf<sub>ij</sub>/f<sub>e</sub> = 0,23x0,25x0,765x2,1/500 m<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s min</sub> = 1,86 cm<sup>2</sup></b> <b>A<sub>s</sub> = 21,5 cm<sup>2</sup> &gt; 1,86 cm<sup>2</sup></b>



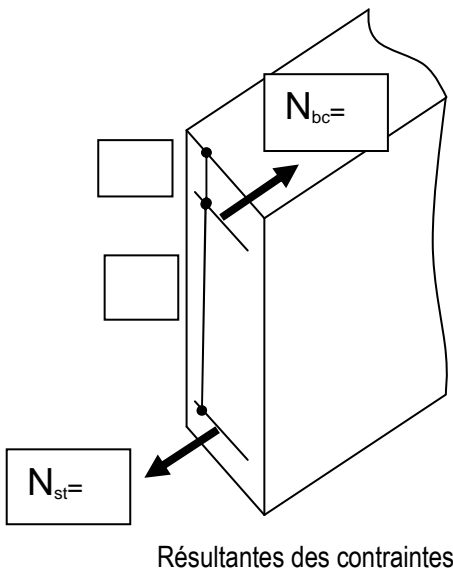
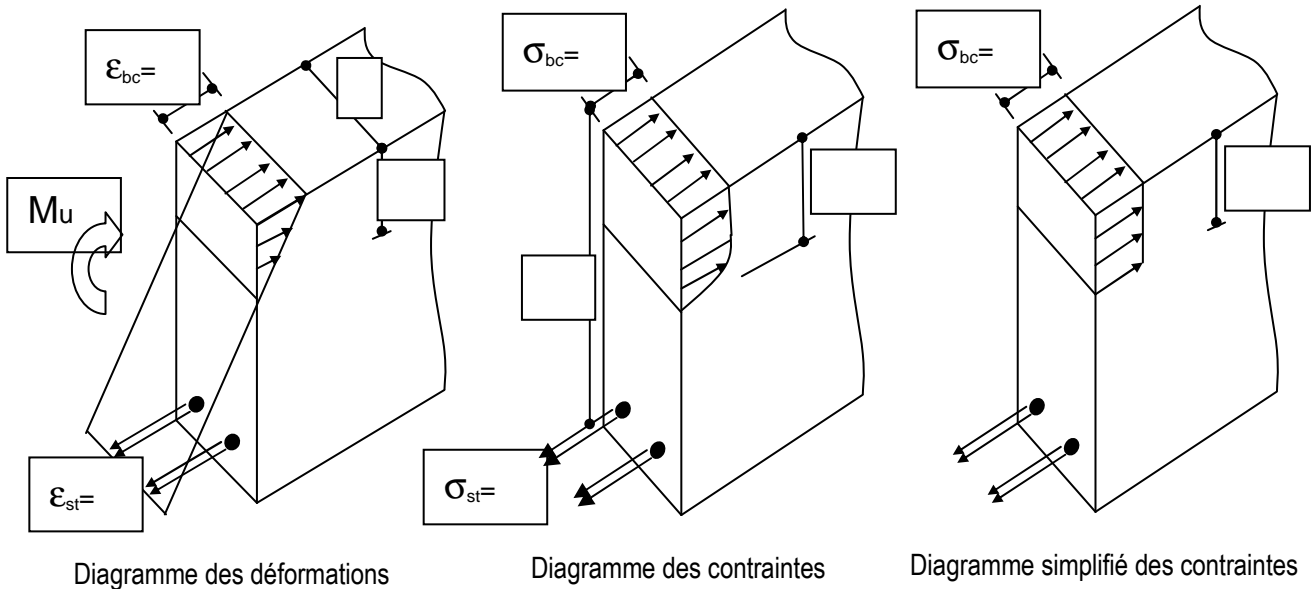
## Application 3 : Diagrammes de contraintes et déformations

Pour la section poutre étudiée dans l'application 2 précédente, on s'aperçoit que  $d_{réelle} = 0,78 > d_{calcul} = 0,9 \cdot h = 0,765$ . Ce qui est sécuritaire, on peut donc recommencer le calcul avec  $d_{réelle}$ , ce qui donnera une section d'acier plus faible, d'où une économie. Dans le cas étudié, la section d'acier réellement mise en place sera  $6HA16+3HA20 = 21,48\text{cm}^2$  (au lieu de  $5HA16$  et  $4HA20$ ).

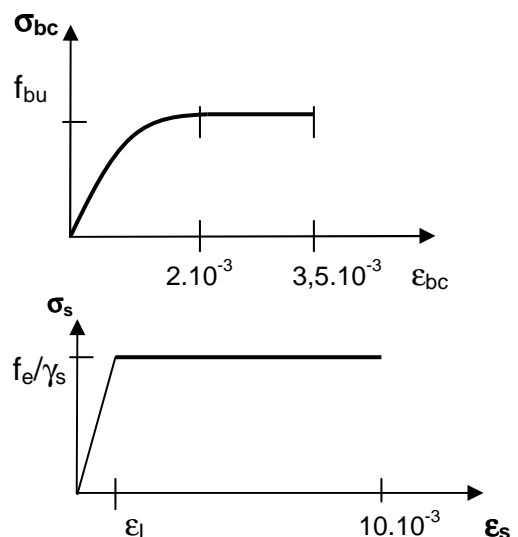
On souhaite déterminer les diagrammes de contraintes et de déformations de cette section.

Rappel des données :

$b = 0,25\text{m}$ ,  $h = 0,85\text{m}$ ,  $d = 0,78\text{m}$ ,  $A_s = 6HA16+3HA20 = 21,48\text{cm}^2$ ,  $M_u = 0,597\text{m.MN}$ ,  
 $f_{c28} = 25\text{MPa}$ ,  $\gamma_b = 1,5$ ,  $f_e = 500\text{MPa}$ ,  $\gamma_s = 1,15$



Placer sur les diagrammes contraintes- déformations les points représentatifs des états de contraintes et déformations des armatures et du béton comprimé.



## Solutions

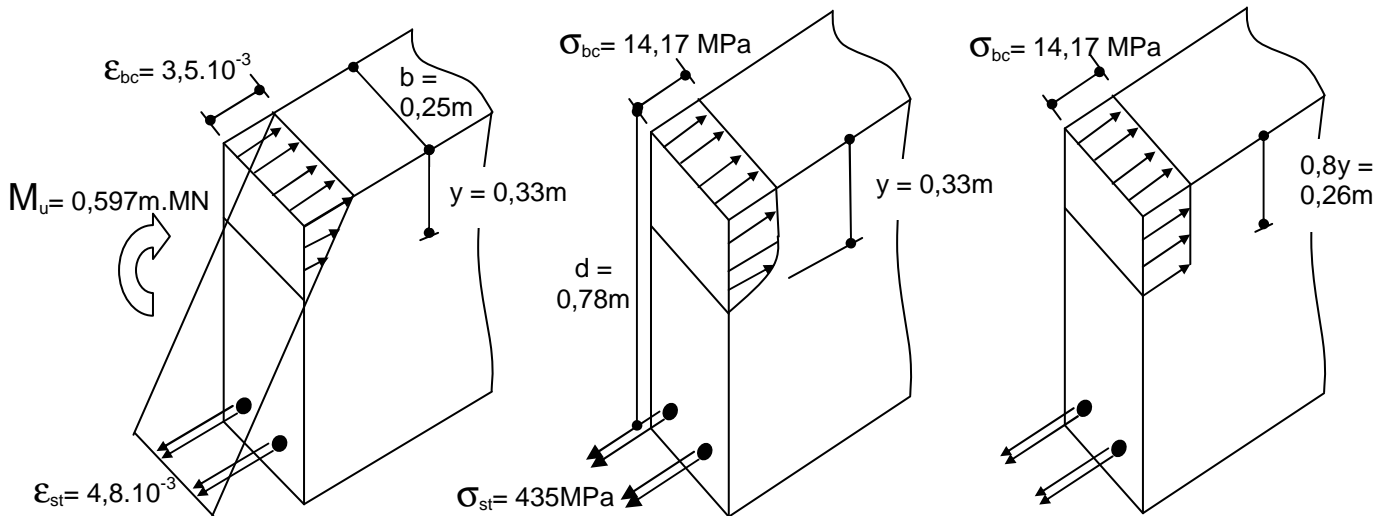
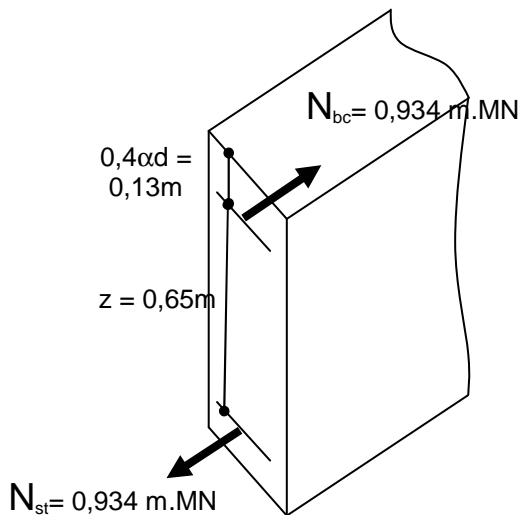


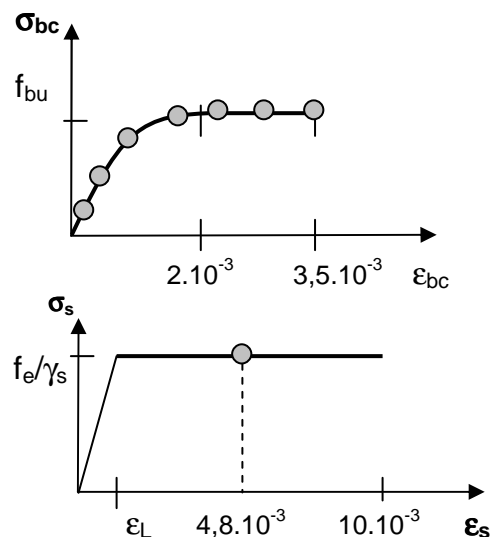
Diagramme des déformations

Diagramme des contraintes

Diagramme simplifié des contraintes



Résultantes des contraintes



### Contraintes

$$f_e / \gamma_s = 500 / 1,15 = 435 \text{ MPa}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot f_{c28} / \theta \cdot \gamma_b = 0,85 \times 25 / (1 \times 1,5) = 14,17 \text{ MPa}$$

### Résultantes

$$N_s = A_s \cdot f_e / \gamma_s = 21,48 \cdot 10^{-4} \cdot 435 = 0,934 \text{ MN}$$

$$N_{bc} = 0,8 \alpha d f_{bu} = 0,8 \cdot \alpha \cdot 0,25 \cdot 0,78 \cdot 14,17$$

$$N_s = N_{bc} \text{ d'où } 0,934 = 0,8 \cdot \alpha \cdot 0,25 \cdot 0,78 \cdot 14,17 \text{ soit } \alpha = 0,423$$

### Hauteur de béton comprimé

$$y = \alpha d = 0,423 \cdot 0,78 = 0,33 \text{ m}$$

$$0,8 \alpha d = 0,26 \text{ m}$$

### Bras de levier

$$z = [1 - 0,4 \alpha] \cdot d = (1 - 0,4 \times 0,423) \cdot 0,78 = 0,65 \text{ m}$$

### Déformations

$\alpha = 0,423$  ce qui correspond à un pivot B, soit  $\epsilon_{bc} = 3,5 \cdot 10^{-3}$  et  $\epsilon_s$  tel que :

$$\alpha / 3,5 \cdot 10^{-3} = d / (\epsilon_s + 3,5 \cdot 10^{-3}) \text{ soit } \epsilon_s = 4,8 \cdot 10^{-3}$$

## Application 4 : Hauteur économique

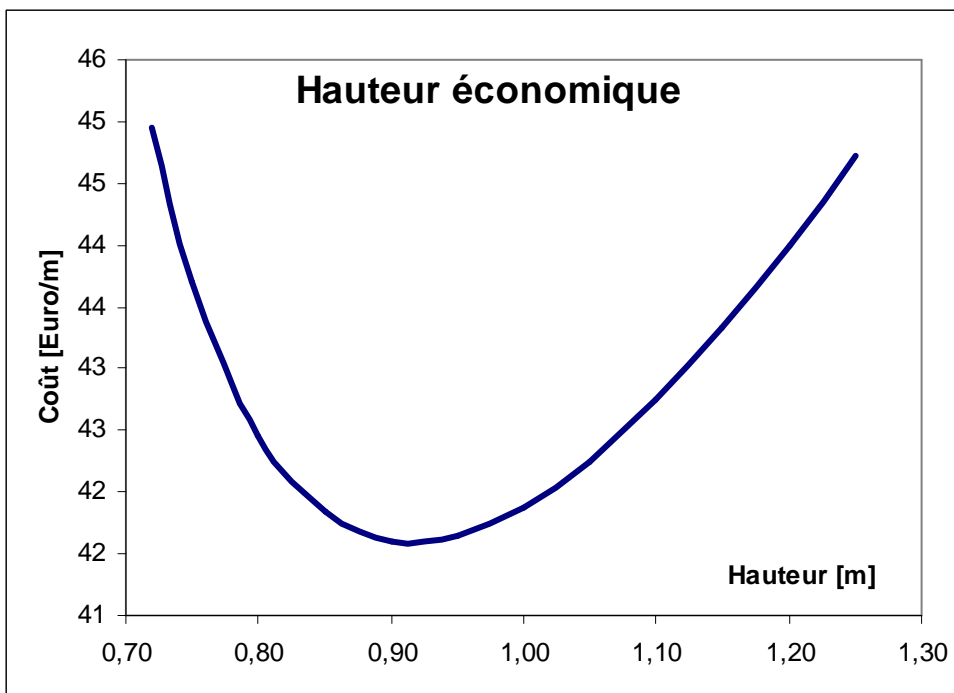
On souhaite déterminer la hauteur économique de la poutre précédente. Sachant que plus la hauteur de béton est importante, plus le bras de levier  $z$  est grand, donc plus la quantité d'acier  $A_s$  est faible. Mais à contrario le poids propre de la poutre augmente et donc le moment ultime aussi. De plus si on augmente la hauteur de béton, le volume et le coût du matériau béton augmente, alors que jusqu'à un certain point la quantité et le coût de l'acier diminue.

Il s'agit de reprendre les données de l'application 2 précédente, mais pour des valeurs de  $h$  variable de 0,70m à 1,30m.

1. Déterminer la section d'acier nécessaire pour chaque valeur de  $h$ . On prendra  $d = h - 7\text{cm}$ .
2. En déduire le coût en matériau 'un mètre de poutre armée seulement par  $A_s$ , en considérant le prix du m<sup>3</sup> de béton égal à 100.X et le prix du kg d'acier égal à 1,25.X

Solutions : Pour  $X = 1$  euro

<b>h</b> <i>m</i>	<b>Coût</b> <i>Euros</i>	<b>Mu</b> <i>m.MN</i>	<b>mu</b> <i>/</i>	<b>alpha</b> <i>/</i>	<b>z</b> <i>m</i>	<b>As</b> <i>cm<sup>2</sup></i>
0,72	44,96	0,577	0,386	0,653	0,48	27,6
0,75	43,71	0,582	0,355	0,578	0,52	25,6
0,80	42,46	0,590	0,312	0,484	0,59	23,0
0,85	41,84	0,597	0,277	0,415	0,65	21,1
0,90	41,61	0,605	0,248	0,362	0,71	19,6
0,95	41,64	0,612	0,223	0,320	0,77	18,4
1,00	41,87	0,620	0,202	0,286	0,82	17,3
1,05	42,25	0,627	0,184	0,257	0,88	16,4
1,10	42,75	0,635	0,169	0,233	0,93	15,6
1,15	43,33	0,643	0,156	0,213	0,99	15,0
1,20	44,00	0,650	0,144	0,195	1,04	14,4
1,25	44,72	0,658	0,133	0,180	1,10	13,8

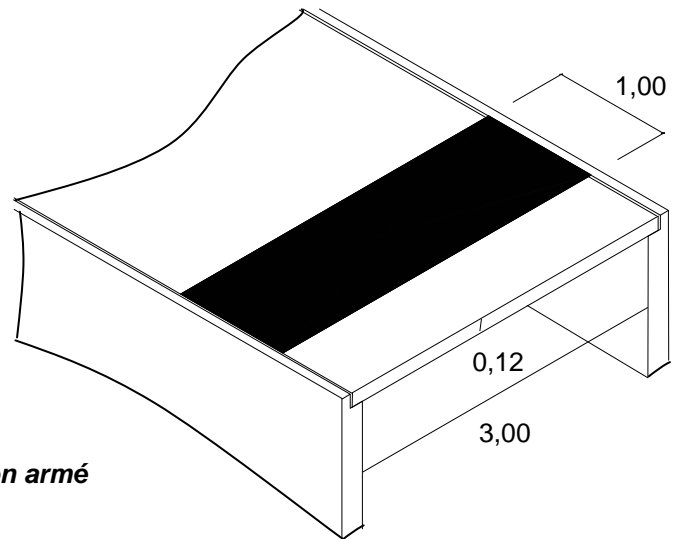
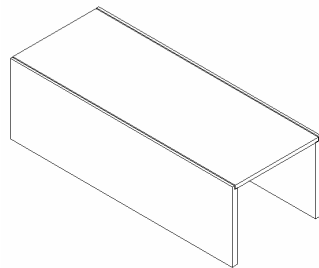


## Application 5 : Dalle sur deux appuis

Une dalle pleine en béton armé, d'épaisseur 12cm, couvre une galerie enterrée de 3,00m de largeur. Elle supporte une charge d'exploitation de 5kN/m<sup>2</sup> et repose dans des feuillures que l'on assimile à des appuis simples. On prendra un enrobage des armatures de 2cm.

Déterminer le ferrailage longitudinal en treillis soudé de la dalle. Le béton choisi est tel que  $f_{c28} = 25\text{MPa}$ . La note de calcul des aciers longitudinaux sera rédigée selon le plan type suivant :

- Modélisation
- Bilan des charges
- Sollicitations
- Acier longitudinal

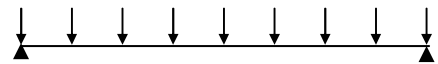


### Etude d'une bande de 1m de dalle pleine en béton armé

#### Solution :

- Modélisation

On étudie la flexion d'une "bande" courante de 1,00 m de largeur et de 3,00 m de portée et reposant simplement sur deux appuis



- Bilan des charges

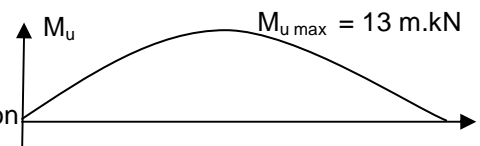
Charges permanentes: Poids propre de la dalle  $(1,00 \times 1,00 \times 0,12) \times 25 = G = 3 \text{ kN/m}$   
 Charge d'exploitation :  $1 \times 5 = Q = 5 \text{ kN/m}$   
 Combinaison des actions à l'ELU:  $1,35.G + 1,5.Q = 1,35 \times 3 + 1,5 \times 5 = 11,55 \text{ kN/ml}$

- Moment fléchissant

La valeur maximum, à mi-travée, vaut à l'ELU :

$$M_u = pL^2/8 = 11,55 \times 3^2 = 13 \text{ m.kN}$$

Ce moment sollicite la membrure inférieure en traction



- Aciers longitudinaux

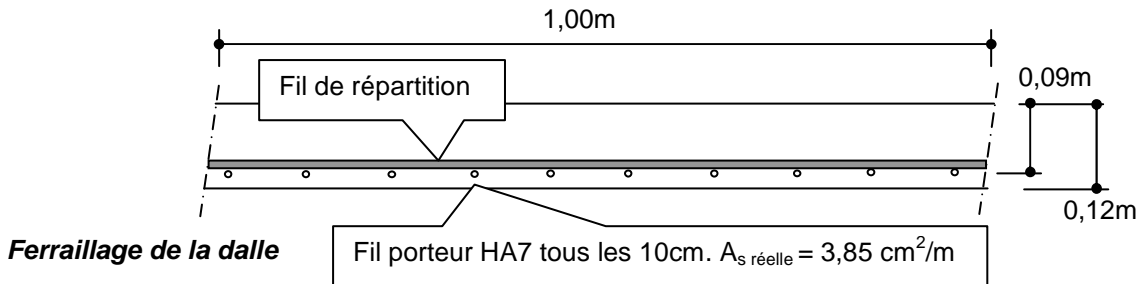
Largeur de poutre	<b>b = 1,00m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,12m</b>
Hauteur utile	<b>d = On choisit d'armer cette zone avec un panneau de treillis soudé on adopte une hauteur utile de 9 cm (enrobage 2cm), soit d = 0,09 m.</b>
.Matériaux :	béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal Acier $f_e = 500 \text{ MPa}$ $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b><math>M_u = 0,013 \text{ m.MN}</math></b>

Contrainte de calcul du béton	$f_{bu} = 0,85.f_{c28}/\theta.\gamma_b = 0,85 \times 25 / (1 \times 1,5) = 14,17 \text{ MPa}$
Moment réduit	$\mu = M_u / b d^2 f_{bu} = 0,013 / (1 \times 0,09 \times 14,17) = 0,113$
Position de l'axe neutre	$\alpha = 1,25.[1 - (1 - 2\mu)^{1/2}] = 0,150 < \alpha_L = 0,616$
Bras de levier	$z = [1 - 0,4\alpha].d = (1 - 0,4 \times 0,15) \cdot 0,09 = 0,084 \text{ m}$



Section d'armature nécessaire pour armer, à l'ELU de résistance, la bande de 1,00 m de poutre dalle, est  $A_s = M_y/[z.f_e/\gamma_s] = 0,013/(0,084 \times 500/1,15) \text{ m}^2$   
 $A_s = 3,53 \text{ cm}^2$

On choisit un panneau de treillis soudé **ST 35** (Voir doc. ADETS) qui présente une section résistante de  $3,85 \text{ cm}^2$  par mètre.



- Pour maintenir en position le panneau de treillis soudé pendant le coulage du béton on peut utiliser:
- Des cales en béton dont l'épaisseur « e » correspond à l'enrobage souhaité du panneau de treillis soudé.
  - Des distanciers en matière plastique dont l'épaisseur e correspond à l'enrobage souhaité. Certains estiment que ce produit serait à l'origine de l'éclatement du béton (gel, variation de température,...)

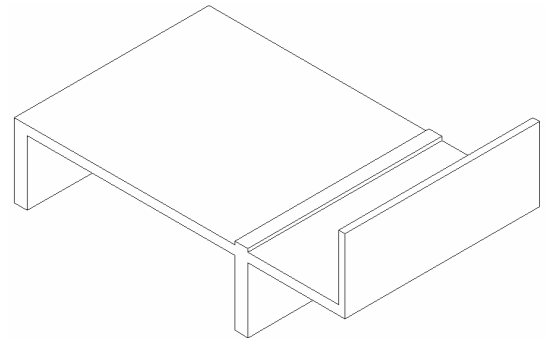
Remarque.

Si l'enrobage  $e = 2,5 \text{ cm}$ , la hauteur utile réelle de la section droite vaut  $d = 120 - 25 - 7/2 = 91,5 \text{ mm} = 9 \text{ cm}$  cette valeur serait alors cohérente avec  $d = 9 \text{ cm}$  initialement choisie.

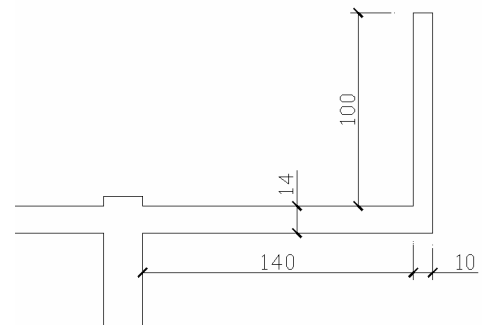
Si l'on avait souhaité un enrobage plus important il eut fallu calculer  $A_s$  à partir d'une valeur de  $d$  plus faible.

## Application 6 : Balcon

Le balcon "filant" représenté ci-contre se justifie comme une poutre en porte à faux par rapport à la façade de l'immeuble. Il est ici dans le prolongement du plancher de l'étage considéré. On admet de n'étudier qu'une "bande" de 1,00 mètre linéaire de balcon. Déterminer le ferrailage du balcon armé avec des barres indépendantes à haute adhérence de limite élastique  $f_e = 500 \text{ MPa}$ .



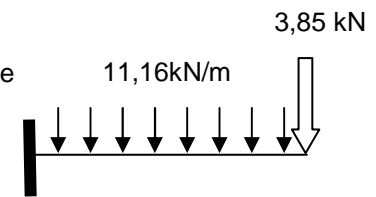
Le béton a une résistance à 28 jours de  $30 \text{ MPa}$   
 La charge d'exploitation sur le balcon est de  $3,5 \text{ kN/m}^2$   
 Le revêtement de sol de  $4 \text{ cm}$  d'épaisseur a un poids volumique de  $22 \text{ kN/m}^3$ . A l'ELU la combinaison à étudier est  $1,35G+1,5Q$



## Solution.

### a. Modélisation

Poutre en console encastrée à une extrémité et libre de l'autre



### b. Bilan des charges pour une bande de 1m

Charge uniformément répartie sur 1,4m de long :

Poids propre de la dalle	$0,14 \times 1 \times 25 = 3,5 \text{ kN/m}$
Poids propre du revêtement de sol	$0,04 \times 1 \times 22 = 0,88 \text{ kN/m}$
Charge d'exploitation	$1 \times 3,5 = 3,5 \text{ kN/m}$
Total pondéré $1,35g + 1,5q$	$1,35 \cdot (0,88 + 3,5) + 1,5 \times 3,5 = 11,16 \text{ kN/m}$

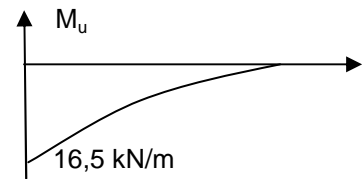
Charge concentrée à l'extrémité

Poids propre pondéré du garde corps	$1,35 \times 1,14 \times 0,10 \times 25 = 3,85 \text{ kN/m}$
-------------------------------------	--

### c. Sollicitations maximums

$$V_u = 11,16 \times 1,40 + 3,85 = 19,5 \text{ kN}$$

$$M_u = 11,16 \times 1,40^2 / 2 + 3,85 \times 1,45 = 16,5 \text{ m.kN}$$



### d. Aciers longitudinaux

Le sens du moment entraîne une mise en traction de la membrure supérieure de la dalle du balcon, les aciers longitudinaux porteurs seront donc à disposer en partie haute de la dalle, on dira "**en chapeaux**". La section droite à armer est donc une section rectangulaire dans laquelle les aciers tendus occupent la partie supérieure: Il n'est pas ici conseillé de surestimer la hauteur utile  $d$ , en cours de chantier, les aciers "supérieurs" ont une fâcheuse tendance à se retrouver plus bas que prévu.

Largeur de poutre	<b>b = 1,00m</b>
Hauteur de poutre	<b>h = 0,14m</b>
Hauteur utile	<b>d = 0,10m.</b>
.Matériaux :	béton $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ $\gamma_b = 1,5$ à l'ELU normal
	Acier $f_e = 500 \text{ MPa}$ $\gamma_s = 1,15$
Moment ultime	<b><math>M_u = 0,0165 \text{ m.MN}</math></b>

Contrainte de calcul du béton	$f_{bu} = 0,85 \cdot f_{c28} / \theta \cdot \gamma_b = 0,85 \times 30 / (1 \times 1,5) = 17 \text{ MPa}$
Moment réduit	$\mu = M_u / b d^2 f_{bu} = 0,0165 / (1 \times 0,09 \times 17) = 0,116$
Position de l'axe neutre	$\alpha = 1,25 \cdot [1 - (1 - 2 \mu)^{1/2}] = 0,154 < \alpha_L = 0,616$
Bras de levier	$z = [1 - 0,4 \alpha] \cdot d = (1 - 0,4 \times 0,154) \cdot 0,10 = 0,094 \text{ m}$

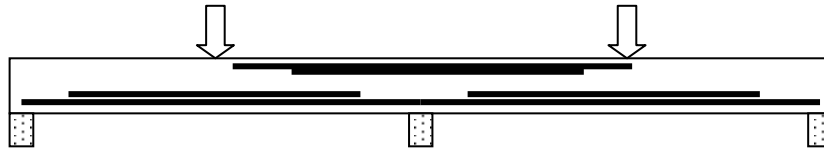
Section d'armature nécessaire pour armer, à l'ELU de résistance, la bande de 1,00 m de poutre dalle, est  $A_s = M_u / [z \cdot f_e / \gamma_s] = 0,0165 / (0,094 \times 500 / 1,15) \text{ m}^2$   
 **$A_s = 4,04 \text{ cm}^2$**

Cela correspond à 5,15 HA 10 par mètre, soit une barre HA10 tous les 19 cm.

On évitera le contact d'un éventuel retour de l'armature avec la sous-face du balcon. (risque d'oxydation et d'éclatement du béton)

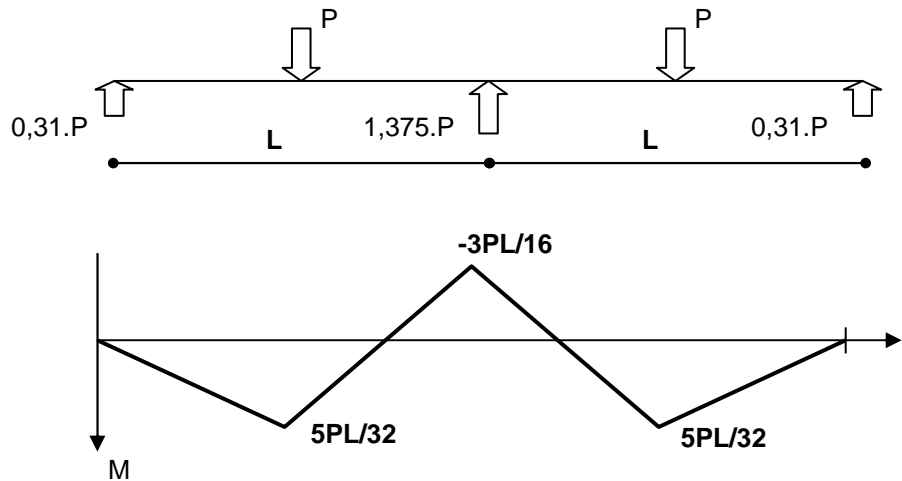
Le balcon n'est pas encastré dans la façade mais prolonge le plancher. Aussi équilibre-t-on le balcon en prolongeant les aciers porteurs sur une distance équivalente à celle du porte à faux. Au stade de la mise en oeuvre il faut adopter les dispositifs conduisant à maintenir en position supérieure les aciers porteurs (distanciers, cage d'armature carrée ou triangulaire...). L'usage de panneaux de treillis soudé comme aciers porteurs de balcon a conduit à des accidents mortels. Constitués de fils relativement fins, ils sont plus "écrasables" sous les pieds des ouvriers...

## Application 7 : Poutre sur 3 appuis



Une poutre de section 10x20 et de 3,50m de longueur est posée sur trois appuis de 10cm de largeur. Cette poutre franchit donc deux travées de longueur 1,60m de nu à nu et est chargée par deux charges ponctuelles P appliquées au milieu de chaque travée. En négligeant le poids propre et pour une valeur pondérée de  $1,5 \times 30 = 45$  kN pour chaque force ponctuelle, déterminer le ferrailage longitudinal.

On donne les réactions d'appui et la courbe de moment fléchissant



Les barres sont à haute adhérence  $f_e = 500$  MPa.

Le béton a une résistance à 28 jours de 30MPa.

### Solution :

	En travée	Sur appui
Géométrie	$b = 0,10$ m $h = 0,20$ m $d = 0,17$ m	
Matériaux	$f_{c28} = 25$ MPa $\gamma_b = 1,5$ $f_{bu} = 14,17$ MPa $f_e = 500$ MPa $\gamma_s = 1,15$	
Moment	$M_u = (5/32) \cdot (1,5 \times 30) \cdot 1,60$ $M_u = 11,25$ m.kN $M_u = 0,01125$ m.MN	$M_u = (3/16) \cdot (1,5 \times 30) \cdot 1,60$ $M_u = 13,5$ m.kN $M_u = 0,0135$ m.MN
Fraction de hauteur comprimée	$\alpha = 0,411 < \alpha_L$	$\alpha = 0,520 < \alpha_L$
Aciers longitudinaux	$A_s = 1,82$ cm <sup>2</sup>	$A_s = 2,31$ cm <sup>2</sup>
Choix d'armatures	4xHA8 = 2,01 cm <sup>2</sup>	2xHA8 + 2xHA10 = 2,58 cm <sup>2</sup>

Principe de ferrailage :

