



**Transformée de Fourier Discrète**  
**Transformée de Fourier rapide (F.F.T.)**

**Pierre Le Bars**  
(avec la collaboration de Francis Gary)  
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

# Transformée de Fourier Discrète Transformée de Fourier rapide (F.F.T.)

## I/ Enoncé du problème

On a vu la dualité temps - fréquence ; connaissant le signal  $x(t)$ , on peut en déduire sa transformée de Fourier  $X(f)$  :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j.2.\pi.f.t} .dt \quad (I)$$

Le problème est le suivant :  $x(t)$  étant connu expérimentalement (et non mathématiquement), est-il possible d'évaluer cette intégrale, autrement dit, est-il possible de déterminer expérimentalement le spectre  $X(f)$  de  $x(t)$  ?

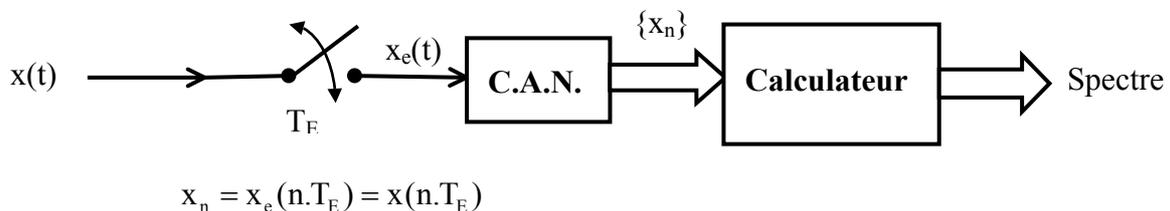
Il existe deux types d'analyseur de spectre :

- analyseurs analogiques, utilisés en hautes fréquences (supérieures à quelques mégahertz). Ils permettent notamment d'aborder les problèmes de CEM.
- analyseurs numériques, utilisés en basses fréquences.

Nous allons étudier cette deuxième catégorie d'analyseurs de spectre.

## II/ Transformée de Fourier Discrète (TFD)

### -1- Principe



On suppose le nombre de bits du convertisseur suffisant pour négliger les effets de la quantification, et surtout on suppose que l'échantillonnage est correct :

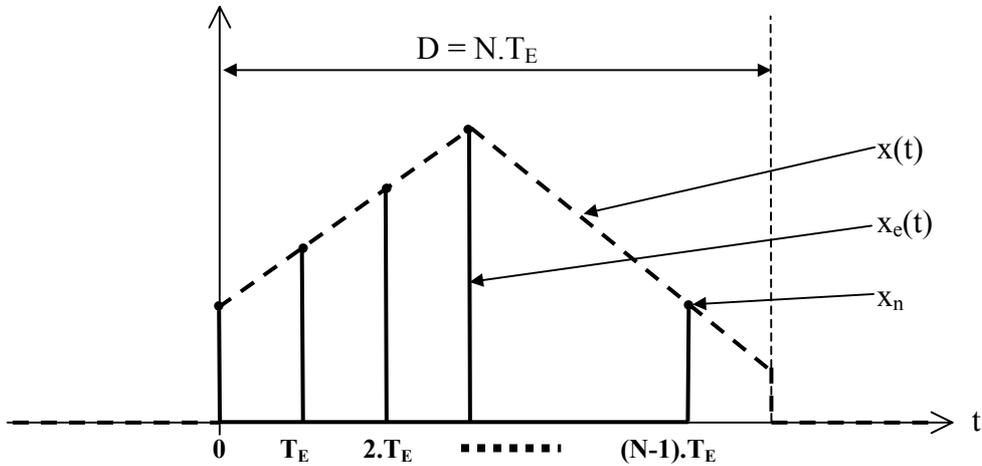
**le théorème de Shannon est respecté.**

On dispose d'un nombre  $N$  fini d'échantillons, numérotés de  $n = 0$  à  $n = N - 1$ , stockés dans la mémoire du calculateur. On connaît donc  $x(t)$  sur une durée  $D = N.T_E$ .

Le problème consiste à évaluer l'intégrale (I) avec les  $N$  échantillons. Or les bornes d'intégration de (I) s'étendent de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et on ne connaît le signal que de  $t = 0$  à  $t = N.T_E$ . Pour définir  $x(t)$  pour toutes les valeurs de  $t$  (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ), il faut donner des valeurs arbitraires à  $x(t)$  pour  $t < 0$  ou pour  $t > N.T_E$ .

On peut envisager deux solutions simples :

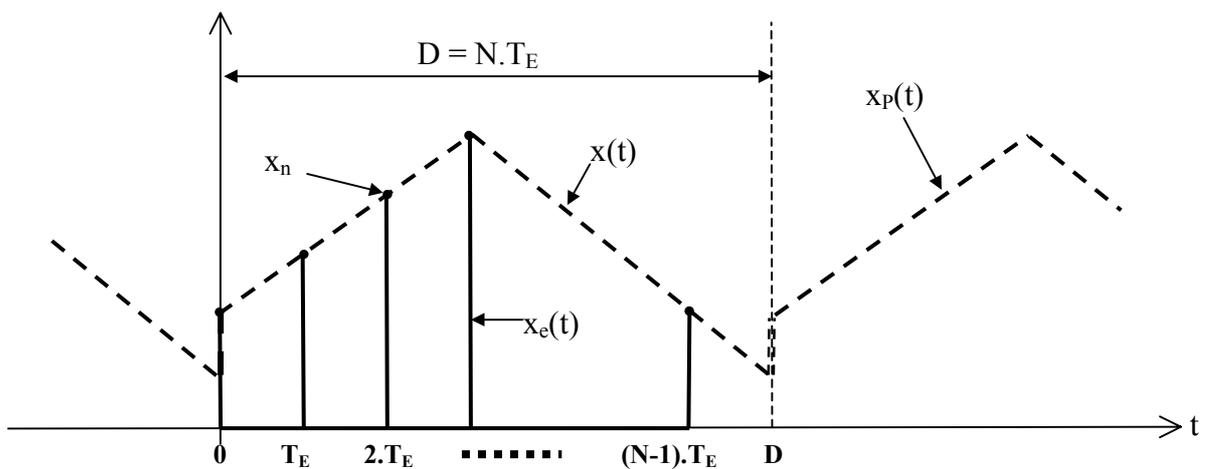
①  $x(t) = 0$  pour  $t < 0$  ou  $t > N.T_E$



Le signal  $x(t)$  est de durée limitée : il possède une transformée de Fourier  $X(f)$ .  
 La fonction  $X$  de la variable continue  $f$  n'est pas accessible à un système de traitement numérique : le calculateur devrait calculer une infinité de valeurs  $X(f)$  pour toutes les fréquences  $f$ .  
 Cette solution n'est pas possible en pratique, donc sans intérêt.

② « périodiser »  $x(t)$

Soit  $x_p(t)$  un signal périodique, de période  $D$ , tel que sur l'intervalle  $[0, D]$ ,  $x_p(t) = x(t)$ .



$x_p(t)$  est un signal périodique, qui peut être décomposé en série de Fourier, et sur l'intervalle  $[0, D]$  :

$$x_p(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi k \frac{1}{D} t} \quad \text{car : } f_0 = \frac{1}{D} = \text{fréquence de } x_p(t)$$

Mais nous avons supposé que le théorème de Shannon est vérifié ; c'est à dire que :

$$X_k = 0 \text{ si } \left| k \cdot \frac{1}{D} \right| > \frac{f_E}{2} \quad \text{soit } |k| > \frac{N}{2} \quad \text{car } D = N \cdot T_E = \frac{N}{f_E}.$$

On peut donc écrire finalement :

$$(1) \quad x_p(t) = x(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_k \cdot e^{j2\pi k \frac{1}{D} t} \quad (\text{sur l'intervalle } [0, D])$$

Cette solution est intéressante car le calculateur doit déterminer  $N$  valeurs  $X_k$ , correspondant aux fréquences  $k \cdot \frac{1}{D} = k \cdot \frac{1}{N \cdot T_E} = k \cdot \frac{f_E}{N}$ , c'est à dire qu'il doit calculer un nombre fini de valeurs.

## **-2- Transformée de Fourier Discrète : définition**

La relation (1) est vérifiée pour toute valeur de  $t$  comprise entre 0 et  $D$  ; on peut l'écrire en particulier aux instants d'échantillonnage  $t = n \cdot T_E$  :

$$x_p(n \cdot T_E) = x(n \cdot T_E) = x_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_k \cdot e^{j2\pi k \frac{1}{N \cdot T_E} \cdot n \cdot T_E} \quad \text{car : } D = N \cdot T_E$$

Soit :

$$x_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

Peut-on évaluer  $X_k$  à partir des échantillons  $x_n$  ?

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{D} \int_0^D x(t) \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{D} t} dt \quad (\text{calcul des coefficients de Fourier}) \\ &\approx \frac{1}{N \cdot T_E} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot T_E) \cdot e^{-j k \frac{2\pi}{N} n} \cdot T_E \end{aligned}$$

Par définition, la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) de la suite numérique  $\{x_n\}$  est la suite numérique  $\{X_k\}$  telle que :

$$\boxed{x_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}} \quad (2)$$

$$\boxed{X_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}} \quad (3)$$

### -3- Vérification

Le raisonnement approché suivi ci-dessus (calcul approché de l'intégrale par une somme de Darboux) permet de comprendre l'origine de la relation (3). On peut vérifier à posteriori la cohérence de ces relations :

$$\begin{aligned}
 (3) : \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k n} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_p \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} p n} \right] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k n} \quad (\text{en introduisant la relation (2)}) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_p \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} (p-k) n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} X_p \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (p-k) n}}_S
 \end{aligned}$$

Calculons la somme S :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (p-k) n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} v^n \quad (\text{en posant : } v = e^{j \frac{2\pi}{N} (p-k)}) \\
 &= \begin{cases} \frac{1-v^N}{1-v} & \text{si } v \neq 1 \text{ soit } p \neq k \\ N & \text{si } v = 1 \text{ soit } p = k \end{cases} \quad (\text{somme des termes d'une progression géométrique})
 \end{aligned}$$

Or, si  $p \neq k$  :

$$v^N = e^{j \frac{2\pi}{N} (p-k) N} = e^{j 2\pi (p-k)} = 1 \Rightarrow S = \frac{1-v^N}{1-v} = 0$$

La somme S' se réduit donc au seul terme correspondant à  $p = k$ , tous les autres étant nuls.

On a donc :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \cdot X_k \cdot N = X_k$$

C'est bien ce qu'on voulait démontrer.

#### **-4- Propriétés de la T.F.D.**

##### 4.1. Périodicité

La suite  $\{X_k\}$  est une suite périodique de période  $N$ .

En effet :

$$X_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot (k+N) \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot N \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} = X_k$$

$$e^{-j \cdot 2\pi \cdot n} = 1 \quad \forall n$$

On pouvait s'attendre à ce résultat : le signal  $x(t)$  a été échantillonné. On a donc rendu son spectre périodique de période  $F_E = \frac{N}{N \cdot T_E} = \frac{1}{T_E}$

##### 4.2. Autre expression de la T.F.D.

En tenant compte de la périodicité, on peut remplacer tous les termes  $X_k$  d'indice négatif par  $X_{N-k}$ . Les relations 2 et 3 deviennent alors :

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad (2')$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad (3)$$

##### 4.3. Symétrie

$$X_{-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot (-k) \cdot n} = X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \left( e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \right)^* = X_k^*$$

où  $X_k^*$  désigne le complexe conjugué de  $X_k$ .

Avec la propriété de périodicité, on peut dire que :

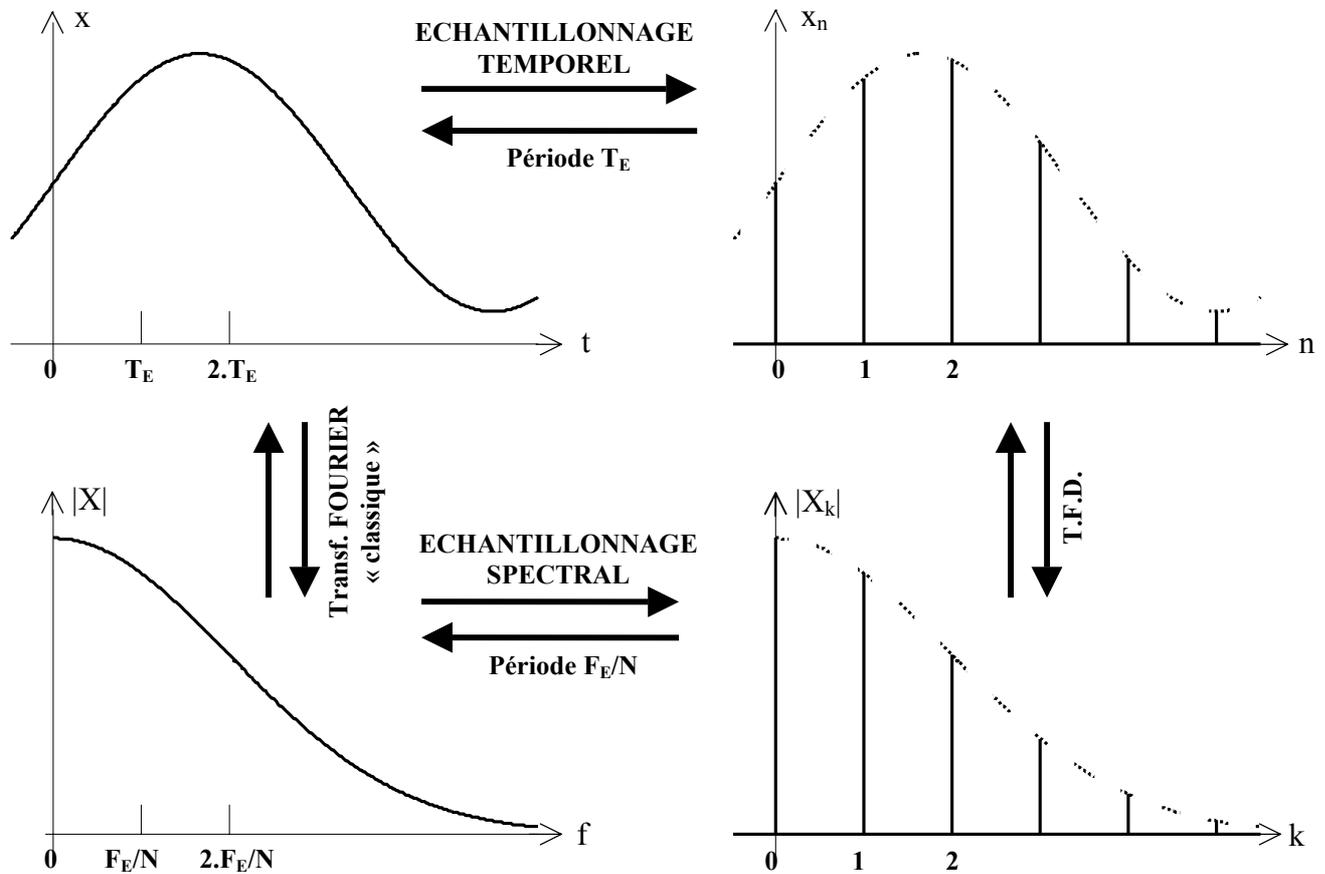
$$X_{-k} = X_{N-k} = X_k^* \quad (4)$$

Conséquence pratique : le calculateur ne calculera que  $N/2$  coefficients  $X_k$ , puis on complétera par symétrie.

#### **-5- Le double échantillonnage**

Le signal  $x(t)$  est tout d'abord échantillonné dans le temps avec une période d'échantillonnage  $T_E$ . On calcule à partir des échantillons  $x_n$  les coefficients  $X_k$ , amplitudes complexes du spectre de  $x(t)$  pour les fréquences  $k \cdot \frac{1}{D} = k \cdot \frac{1}{N \cdot T_E} = k \cdot \frac{F_E}{N}$ , c'est à dire qu'on

obtient un échantillonnage en fréquence du spectre de  $x(t)$  avec une période (fréquentielle !)  $F_E/N$ .



### -6- Dualité temps - fréquence

En échantillonnant un signal  $x(t)$  dans le domaine temporel, on « périodise » son spectre (voir le théorème de Shannon). De même en échantillonnant le spectre  $X(f)$  (dans le domaine spectral), on « périodise » le signal  $x(t)$  (dans le domaine temporel).

## **III/ Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)**

On emploie généralement l'expression « transformée de Fourier rapide » ou « F.F.T. » (Fast Fourier Transform). On devrait dire en toute rigueur : « algorithme rapide de calcul de la transformée de Fourier discrète ».

### -1- Mise en œuvre d'une T.F.D.

On dispose de  $N$  échantillons  $x_n$ , et nous devons calculer  $\frac{N}{2}$  coefficients  $X_k$  (la relation 4 permet de ne calculer que la moitié des coefficients).

$$X_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

Pour un terme  $X_k$ , il faut faire :

- 2.N additions (N pour la partie réelle et N pour la partie imaginaire)
- 2.N multiplications (même raison)

soit pour  $\frac{N}{2}$  coefficients :

- $\frac{N}{2} \times (2.N) = N^2$  additions
- $\frac{N}{2} \times (2.N) = N^2$  multiplications

Un D.S.P. (Digital Signal Processor = processeur spécialisé dans le traitement numérique du signal) réalise l'ensemble multiplication + addition en 10 nanosecondes environ. Si on dispose de  $N = 4000$  échantillons, le calcul des coefficients de la TFD dure :

$$t_{\text{calcul}} = (4000)^2 \cdot 10^{-8} = 16 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} = 0,16 \text{ s}$$

excluant une utilisation en temps réel.

## -2- Algorithme de Cooley et Tukey<sup>1</sup>

De nombreux algorithmes ont été proposés, le premier étant celui de Cooley et Tukey.

Si N est pair, soit :  $N = 2.P$  :

$$X_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot u^{-k \cdot n} \quad (\text{en posant : } u = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}})$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left[ \sum_{q=0}^{P-1} x_{2,q} \cdot u^{-k \cdot 2,q} + \sum_{q=0}^{P-1} x_{2,q+1} \cdot u^{-k \cdot (2,q+1)} \right]$$

en séparant les échantillons d'indices pairs et d'indices impairs.

Or :  $u^{-k \cdot 2,q} = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot 2,q} = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{2,P} \cdot k \cdot 2,q} = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{P} \cdot k \cdot q}$

Si on pose :

$$x'_q = x_{2,q} ; y'_q = x_{2,q+1} \text{ et } u' = e^{j \cdot \frac{2\pi}{P}}$$

on a :

$$X_k = \frac{1}{N} \cdot \left\{ \sum_{q=0}^{P-1} x'_q \cdot u'^{-q,k} + u^{-k} \cdot \sum_{q=0}^{P-1} y'_q \cdot u'^{-q,k} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [X'_k + u^{-k} \cdot Y'_k]$$

où  $X'_k$  et  $Y'_k$  sont les TFD des suites  $x'_q$  et  $y'_q$  de longueur P.

Pour calculer  $X'_k$ , il faut  $P^2$  multiplications + additions, et autant pour  $Y'_k$ . De plus, il faut faire P multiplications + additions du type  $u^{-k} \cdot Y'_k$  (P/2 pour la partie réelle et P/2 pour la partie imaginaire).

Il faut donc faire :  $2 \times P^2 + P$  opérations (multiplication + addition), soit :  $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ .

Pour l'exemple ci-dessus, on passe de  $16 \cdot 10^6$  opérations à  $8,002 \cdot 10^6$ .

<sup>1</sup> Algorithme proposé en 1963

Mais si P est pair à son tour, on peut recommencer. De sorte que si N est de la forme  $N = 2^m$ , on peut recommencer m fois, et passer ainsi de  $N^2$  opérations à environ  $m \times N$ .

Exemple :  $N = 4096 = 2^{12}$

Si une opération multiplication + addition prend 10 ns, le calcul dure :

$$t_{\text{calcul}} = 12 \times 4096 \times 10 \text{ ns} \approx 500 \mu\text{s}$$

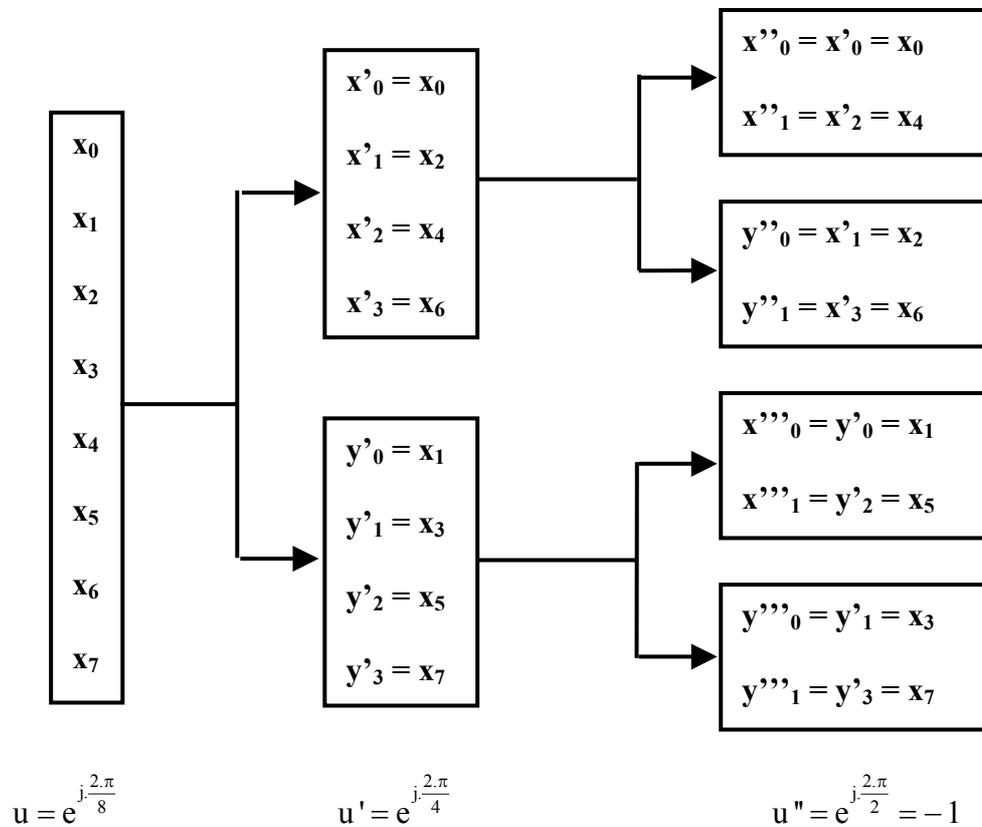
à comparer à

$$t_{\text{calcul}} = (4096)^2 \times 10 \text{ ns} \approx 0,17 \text{ s}$$

si on utilise directement la relation (3), soit un gain d'un facteur 340.

### -3- Exemple

Pour illustrer l'algorithme de Cooley et Tukey, prenons  $N = 8 = 2^3$  ( $m = 3$ )



$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{8} \cdot (X'_k + u^{-k} \cdot Y'_k) \\
 &= \frac{1}{8} \cdot [(X''_k + u'^{-k} \cdot Y''_k) + u^{-k} \cdot (X'''_k + u'^{-k} \cdot Y'''_k)]
 \end{aligned}$$

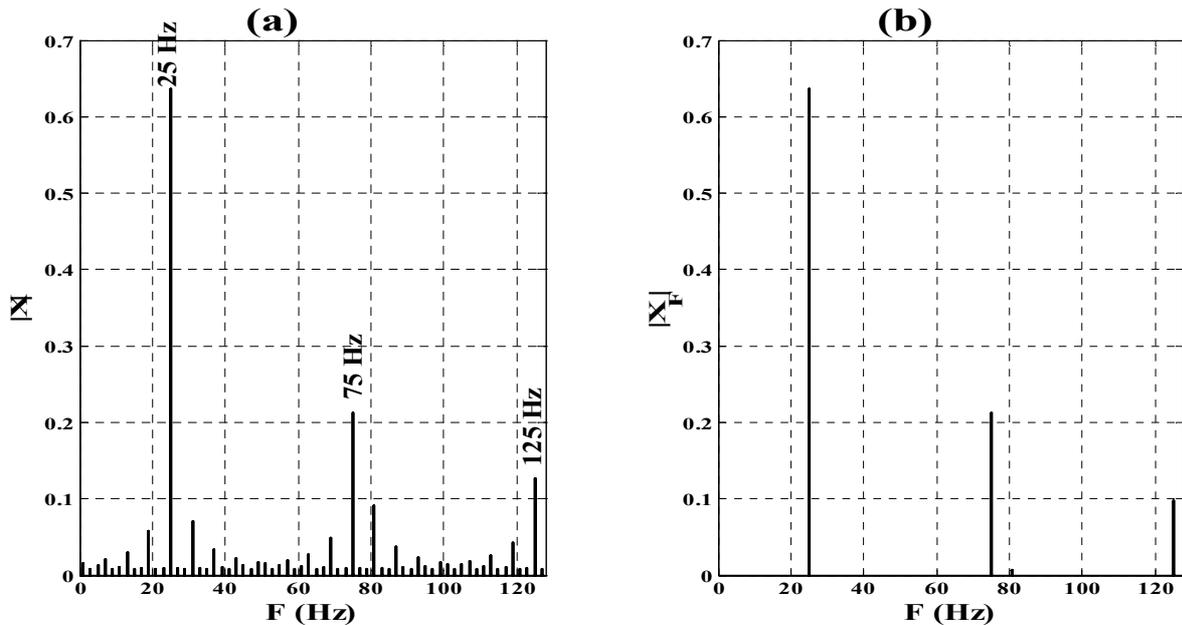
où :

$$\begin{aligned}
 X''_k &= x''_0 + (-1)^k \cdot x''_1 = x_0 + (-1)^k \cdot x_4 \\
 Y''_k &= y''_0 + (-1)^k \cdot y''_1 = x_2 + (-1)^k \cdot x_6 \\
 X'''_k &= x'''_0 + (-1)^k \cdot x'''_1 = x_1 + (-1)^k \cdot x_5 \\
 Y'''_k &= y'''_0 + (-1)^k \cdot y'''_1 = x_3 + (-1)^k \cdot x_7
 \end{aligned}$$

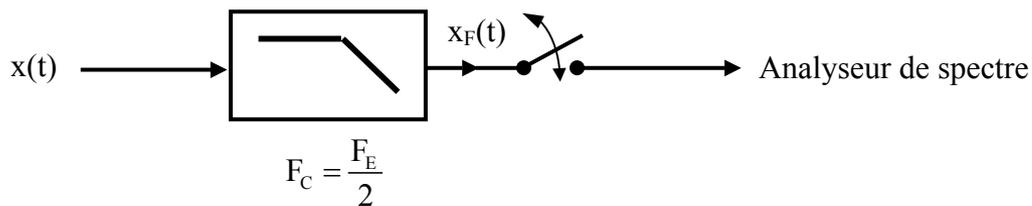
## IV/ Précautions d'utilisation

### -1- Echantillonnage temporel

Si on ne prend aucune précaution, la transformée de Fourier discrète (ou la FFT) donne un échantillonnage en fréquence du **spectre replié** de  $x(t)$ . L'exemple ci-dessous (figure a) donne le résultat de l'analyse FFT d'un signal carré de fréquence 25 Hz, échantillonné à 256 Hz, sur  $N = 2^{10} = 1\,024$  points (résolution  $\frac{f_E}{N} = \frac{256}{1024} = 0,25$  Hz).



Le remède est connu : il suffit de placer à l'entrée de l'analyseur un filtre d'antirepliement :



La figure b donne le résultat de l'analyse spectrale, réalisée dans les mêmes conditions, mais en intercalant, avant l'échantillonneur, un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 8 de fréquence de coupure 128 Hz.

### -2- Exemple de calcul

Soit  $x(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ , échantillonné à la fréquence  $f_E$  :  $x_n = e^{j2\pi f_1 n T_E}$ , respectant le théorème de Shannon :  $f_1 < \frac{f_E}{2}$ .

Dans la pratique, un tel signal n'existe pas :  $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$  ou  $\sin(2\pi f_1 t)$ , qu'on peut décomposer en deux signaux exponentiels de fréquences  $f_1$  et  $-f_1$ .

Cherchons la TFD  $\{X_k\}$  de la suite  $\{x_n\}$  :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_1 n T_E} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \left( f_1 T_E - \frac{k}{N} \right) n} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} v^n \quad \text{où} \quad v = e^{j2\pi \left( f_1 T_E - \frac{k}{N} \right)} \end{aligned}$$

- 1<sup>er</sup> cas : il existe une valeur  $k_0$  de  $k$  telle que  $f_1 T_E - \frac{k_0}{N} = 0$

$$f_1 T_E - \frac{k_0}{N} = 0 \Leftrightarrow f_1 = \frac{k_0}{N T_E} \Leftrightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{k_0}{D} \Leftrightarrow \underline{\underline{D = k_0 \cdot T_1}}$$

**On a enregistré un nombre entier de périodes du signal  $x(t)$ .**

$$\text{Pour cette valeur } k = k_0 : \sum_{n=0}^{N-1} v^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1^n = N \Rightarrow \underline{\underline{X_{k_0} = 1}}$$

Pour les autres valeurs de  $k$  :  $k' \neq k_0$  :

$$\sum_{n=0}^{N-1} v^n = \frac{1 - v^N}{1 - v} = \frac{1 - e^{j2\pi(k_0 - k')}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0 - k')}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{X_{k'} = 0}}$$

On obtient donc une seule raie à la fréquence  $k_0 \cdot \frac{F_E}{N} = f_1 \cdot N \cdot T_E \cdot \frac{F_E}{N} = f_1$

On obtient le spectre attendu.

- 2<sup>ème</sup> cas :  $k_0$  n'existe pas ; **on n'a pas enregistré un nombre entier de périodes.**  
On ne peut pas simplifier l'expression de  $X_k$  :

$$|X_k| = \frac{1}{N} \cdot \left| \frac{\sin(\pi N f_1 T_E)}{\sin\left(\pi f_1 T_E - k \frac{\pi}{N}\right)} \right|$$

### **-3- Nombre limité d'échantillons**

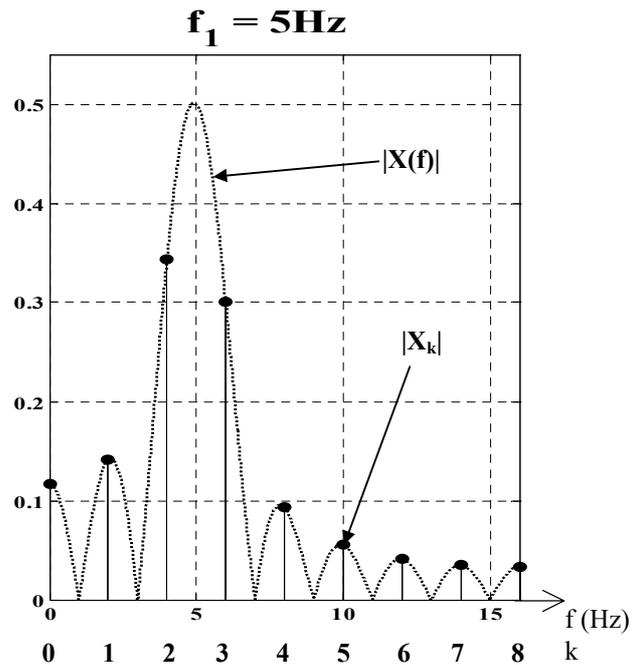
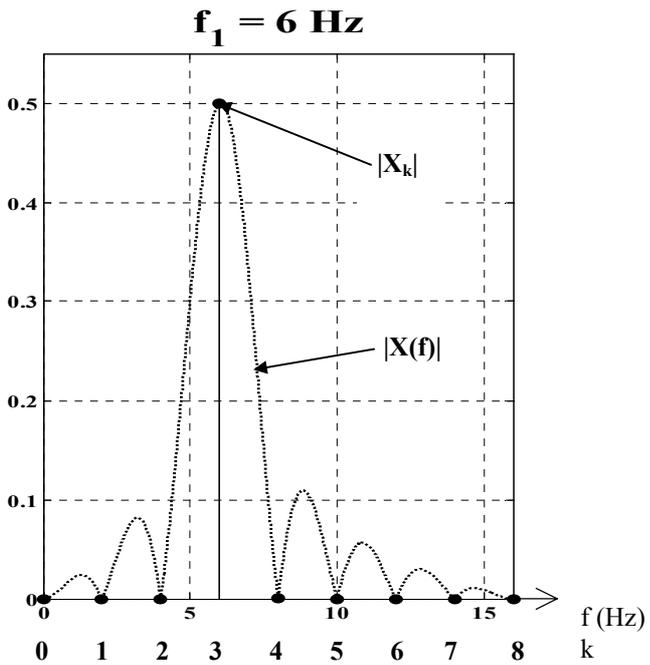
Dans l'exemple ci-dessus, on ne cherche pas la transformée de Fourier d'une sinusoïde (de durée infinie), mais la transformée de Fourier d'une sinusoïde de durée finie  $D$  (voir annexe du chapitre sur l'échantillonnage) :

$$|X(f)| = \frac{D}{2} \cdot \left| \frac{\sin[\pi(f_1 - f)D]}{\pi(f_1 - f)D} \right|$$

et, en plus, ce spectre est replié !

La figure ci-dessous donne le résultat de l'analyse spectrale, sur  $N = 2^4 = 16$  points du signal  $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$  échantillonné à  $f_E = 32$  Hz ( $D = N \cdot T_E = 16/32 = 0,5$  s), pour deux valeurs de  $f_1$  :

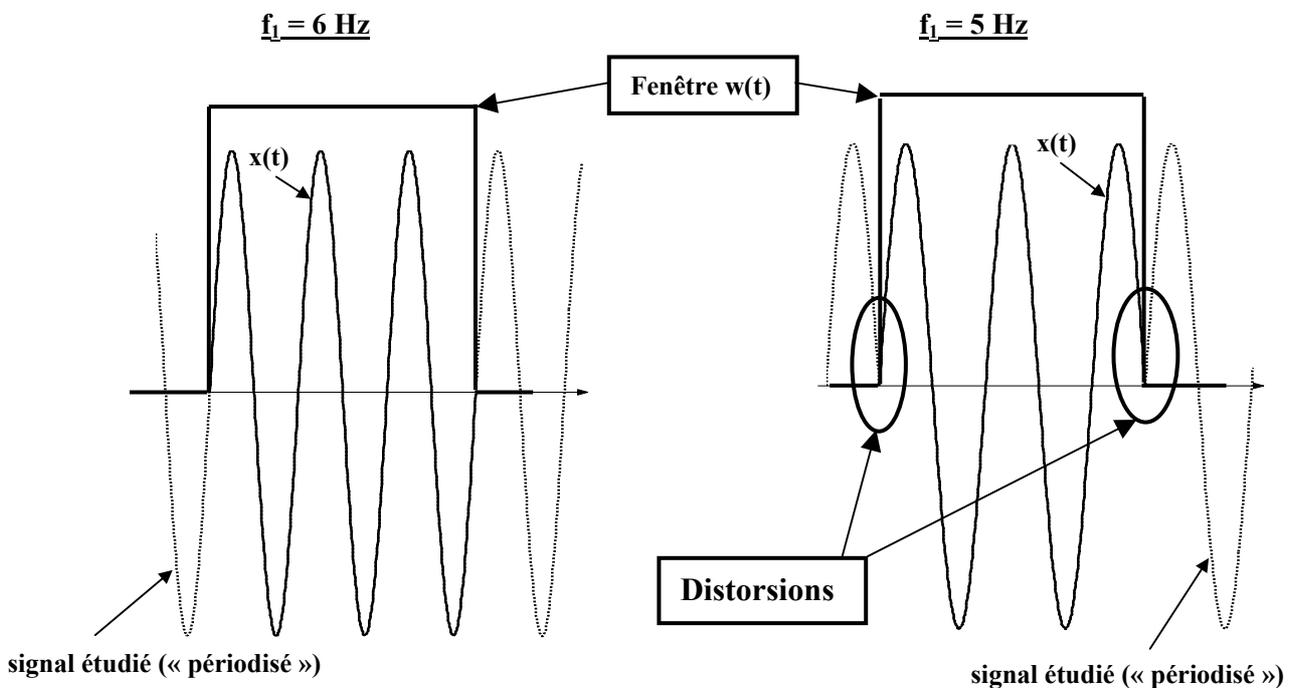
- $f_1 = 6$  Hz : on a enregistré un nombre entier de périodes ( $D = 0,5$  s =  $3 \cdot T_1$ )
- $f_1 = 5$  Hz



Dit d'une autre façon, la FFT ne connaît que les fréquences  $k \cdot \frac{F_E}{N} = k \cdot 2 \text{ Hz}$ .

#### -4- Interprétation physique

Pour introduire la TFD, nous avons rendu le signal  $x(t)$  périodique.



En rendant le signal périodique, on introduit des distorsions sur les bords de la « fenêtre d'observation » si on n'a pas enregistré un nombre entier de périodes.

## -5- Remède

### 5.1. Etude qualitative

La fenêtre  $w(t)$  utilisée précédemment est une fenêtre rectangulaire (parfois appelée fenêtre naturelle) :

$$w(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t < D \quad \text{et} \quad w(t) = 0 \text{ si } t \notin [0, D[$$

On constate que les distorsions introduites en rendant le signal périodique se situent sur les bords de la fenêtre ; l'idée consiste donc à utiliser une fenêtre déformante, privilégiant les échantillons au centre de la fenêtre.

On affecte chaque échantillon  $x_n$  d'un coefficient de pondération  $w_n = w(n.T_E)$ , et on calcule la FFT de la suite numérique  $y_n = x_n \cdot w_n$ . Ces coefficients sont tels que :

$$w_n \approx 1 \text{ pour } n \text{ voisin de } \frac{N}{2}, \text{ et } w_n \ll 1 \text{ pour } n \text{ voisin de } 0 \text{ ou voisin de } N-1$$

### 5.2. Etude quantitative

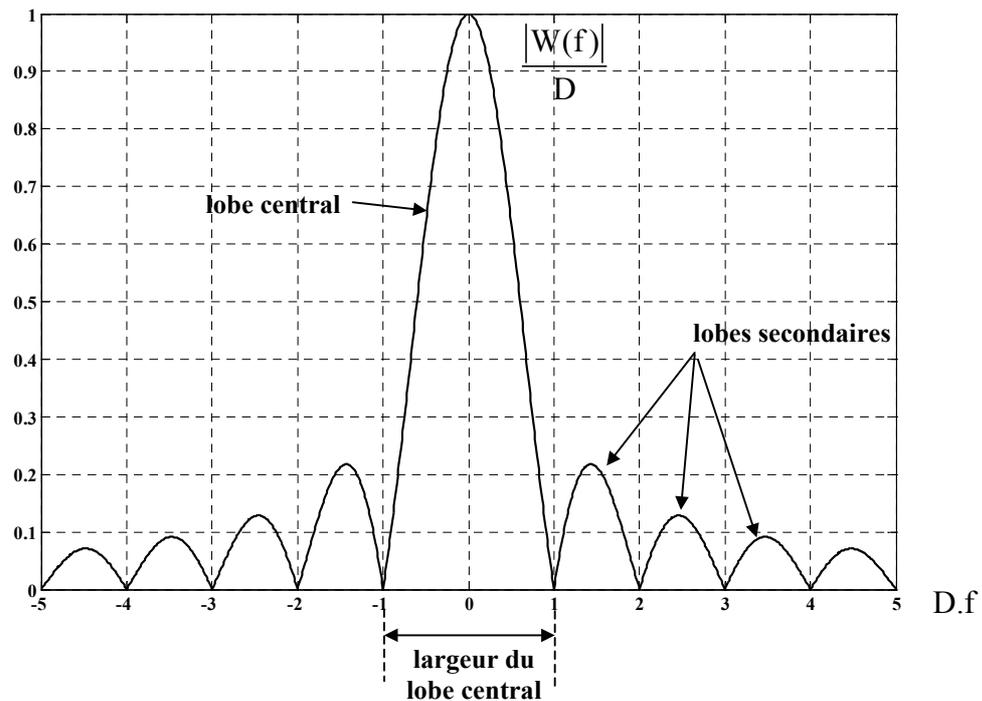
Soit  $y(t)$  le signal déformé par la fenêtre :  $y(t) = x(t) \cdot w(t)$ .

Si  $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ ,  $y(t) = w(t) \cdot \sin(2\pi f_1 t)$  :  $y(t)$  correspond à un signal modulé en amplitude « sans porteuse » (DSBSC), la porteuse ayant une fréquence  $f_1$ . Le spectre de  $y(t)$  est obtenu en décalant le spectre  $W(f)$  de  $w(t)$  de  $+f_1$  et de  $-f_1$  :

$$Y(f) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [W(f - f_1) - W(f + f_1)]$$

Pour une fenêtre rectangulaire :

$$W(f) = D \cdot \frac{\sin(\pi D f)}{\pi D f}$$



On a cherché  $w(t)$  de façon à ce que les lobes secondaires de  $W(f)$  aient les amplitudes les plus faibles. En général ceci s'accompagne d'un élargissement du lobe central (voir annexe).

### 5.3. Exemple : fenêtre de Hamming

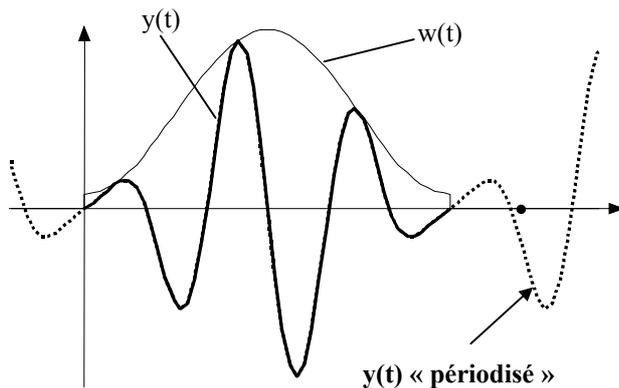
$$w(t) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{D}\right) & \text{si } t \in [0, D[ \\ 0 & \text{si } t \notin [0, D[ \end{cases}$$

Au centre de la fenêtre :  $w\left(\frac{D}{2}\right) = 0,54 + 0,46 = 1$

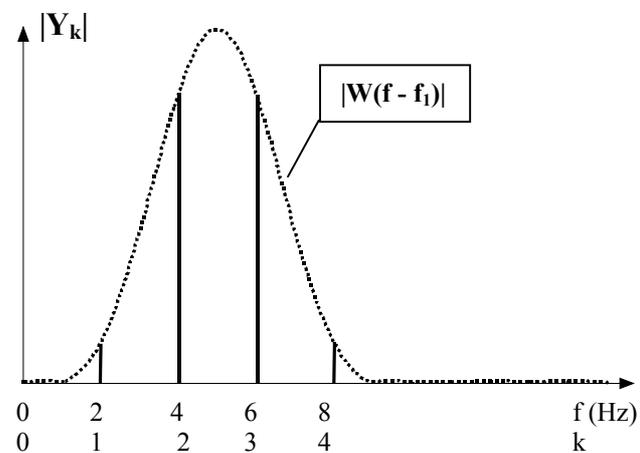
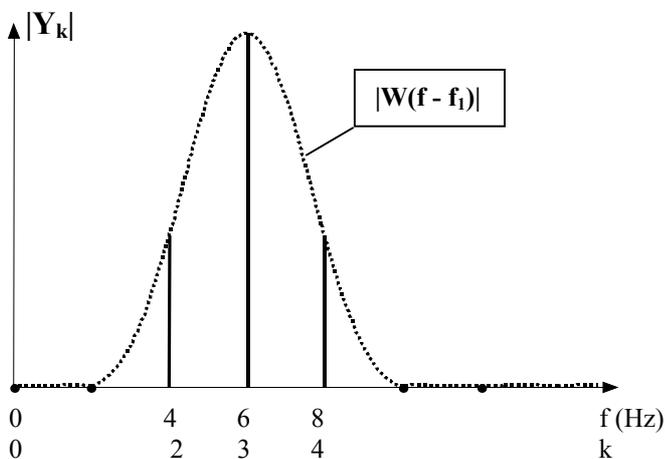
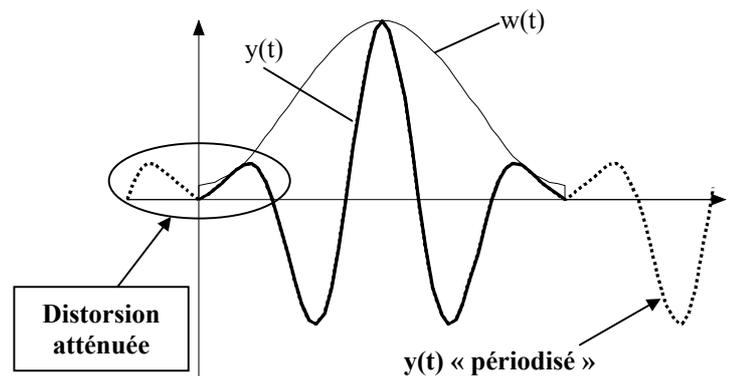
et sur les bords :  $w(0) = w(D) = 0,54 - 0,46 = 0,08$

En reprenant les deux exemples étudiés précédemment ( $f_E = 32$  Hz,  $N = 16$ ,  $D = 0,5$  s,  $f_1 = 6$  ou 5 Hz), on obtient, après pondération les résultats suivants :

$f_1 = 6$  Hz



$f_1 = 5$  Hz

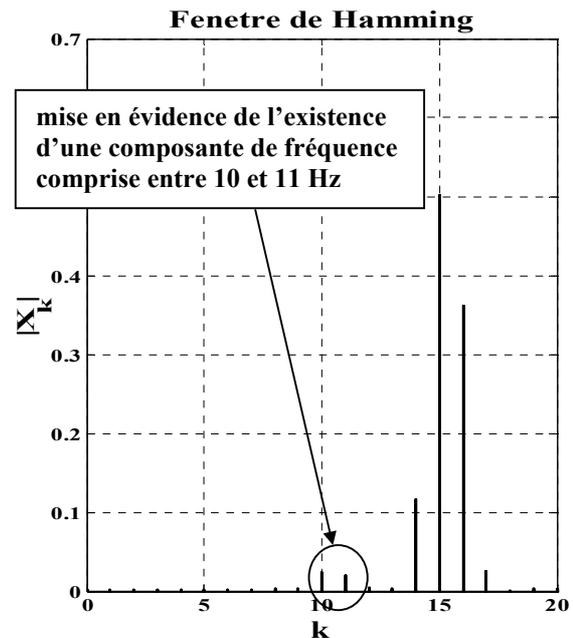
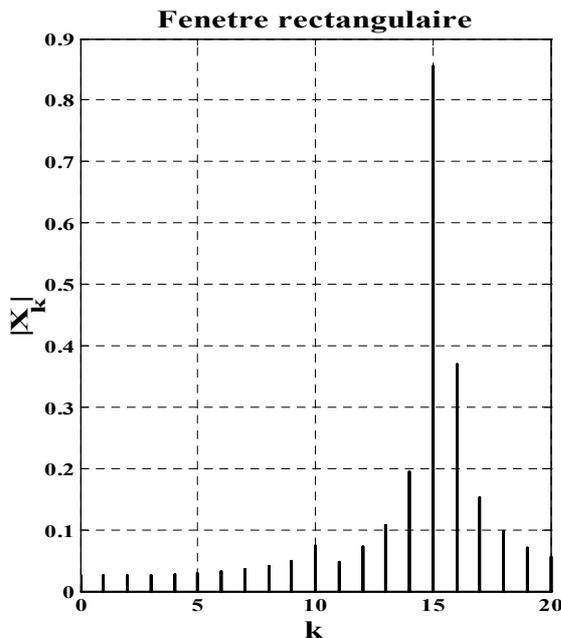


#### 5.4. Exemple d'analyse d'un signal complexe

On peut également mettre en évidence l'intérêt d'une fenêtre de pondération (de Hamming par exemple) en étudiant le signal :

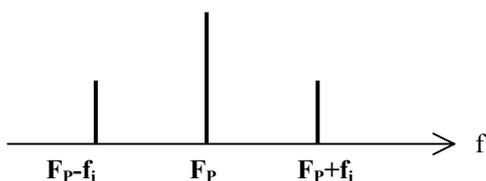
$$x(t) = 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + 0,1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t)$$

où  $f_1 = 15,3$  Hz et  $f_2 = 10,5$  Hz, échantillonné à 256 Hz sur une durée  $D = 1$  s (soit  $N = 256 = 2^8$ ). Les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas des multiples de  $f_E/N = 1$  Hz (cas défavorable), de plus il existe un facteur 20 entre les amplitudes de chaque composante.



#### V/ Utilisation d'un analyseur FFT : choix des paramètres

Nous prendrons l'exemple de l'analyse spectrale réalisée en TP : analyse d'un signal de fréquence  $F_p = 1$  kHz, modulé en amplitude par un signal de fréquence 100 Hz. Cette analyse a été faite à l'aide d'un oscilloscope à mémoire numérique Tektronix, muni d'un module de calcul FFT. Un véritable analyseur de spectre FFT, possède à l'entrée un filtre passe-bas d'antirepliement, ce qui n'est pas le cas de l'oscilloscope.



Le spectre du signal modulé est représenté ci-contre. Pour respecter le théorème de Shannon, il faut que :

$$f_E > 2 \cdot (F_p + f_i) = 2200 \text{ Hz}$$

L'oscilloscope dispose d'une mémoire de  $N = 2^{11} = 2048$  points ( $m = 11$ ). Ces 2048 points correspondent à un balayage de la base de temps.

Pour mettre en évidence les 3 raies il faut :

- respecter le théorème de Shannon
- avoir une résolution  $\frac{f_E}{N} = \frac{1}{D}$  petite devant  $f_i = 100$  Hz

Durée d'observation :  $D = 10 \times B$ , où  $B$  est le calibre de la base de temps en s/div.

$$\text{De plus : } D = 2048 \times T_E \Rightarrow F_E = \frac{2048}{D} = \frac{2048}{10.B}$$

On doit donc satisfaire aux conditions suivantes :

$$\text{Shannon : } f_E = \frac{2048}{10.B} > 2200 \Rightarrow \boxed{B < 93 \text{ ms/div}}$$

$$\text{résolution : } \frac{1}{10.B} \ll 100 \Rightarrow \boxed{B \gg 1 \text{ ms/div}}$$

On peut choisir par exemple  $B = 50 \text{ ms/div}$ , c'est à dire visualiser 50 périodes de l'information sur l'écran de l'oscilloscope : on a ainsi une fréquence d'échantillonnage de 4 kHz environ et une résolution de 2 Hz. Les échantillons sont pondérés par une fenêtre de Hamming.

On pourrait également prendre  $B = 20 \text{ ms/div}$  : résolution = 5 Hz et  $f_E \approx 10 \text{ kHz}$ , mais pas  $B = 100 \text{ ms/div}$  ( $f_E \approx 2 \text{ kHz} < 2.(F_P + f_i)$  !)

### ...Annexe : exemples de fenêtres...

L'annexe suivante présente 5 fenêtres classiques.

Il en existe bien d'autres. On peut citer :

- « flattop » (proche de la fenêtre rectangulaire, mais à bords arrondis)
- gaussienne ( $w(t)$  et  $W(f)$  sont des courbes de Gauss, sans lobes secondaires)
- Kaiser (faisant appel aux fonctions de Bessel)

etc...

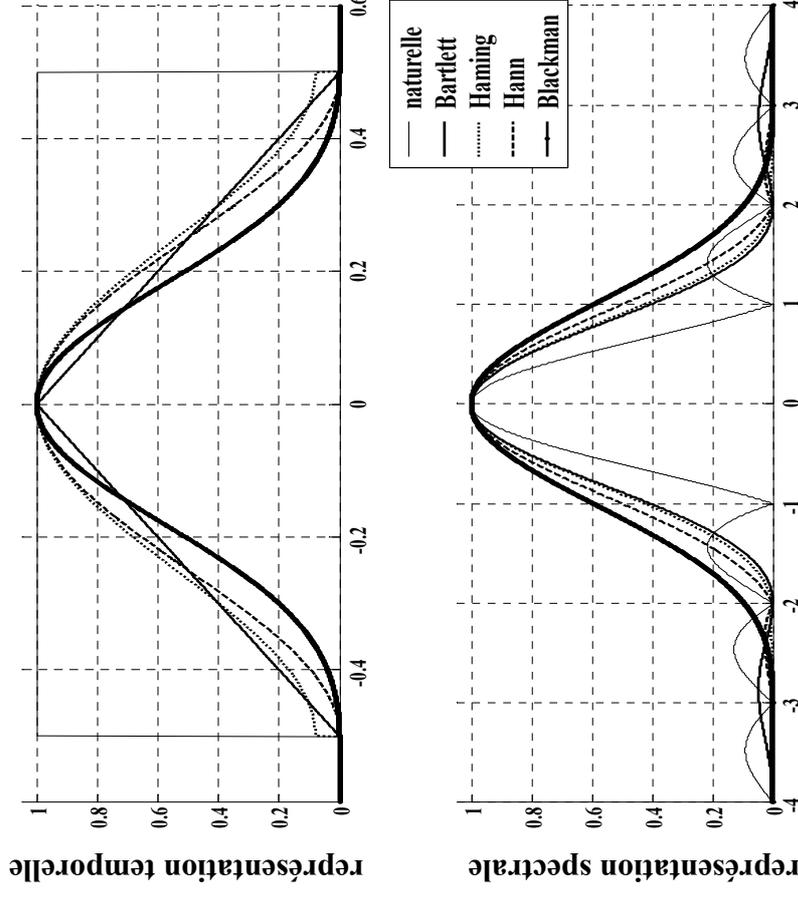
Le choix de la fenêtre, dépend du signal que l'on veut analyser et de la partie spectrale que l'on souhaite étudier (comme on choisit un filtre de type Butterworth, Chebychev ou Cauer).

## EXEMPLES DE FENETRES

**Remarque :** pour simplifier les expressions de  $w(t)$  et  $W(f)$ , les fenêtres sont centrées sur 0. Pour passer aux fenêtres définies sur  $[0, D]$ , il suffit de décaler de  $D/2$ , soit dans le domaine spectral de multiplier par  $e^{-j\pi f D}$ .

**Notation :**  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

Nom fenêtre	w(t)	W(f)
rectangulaire ou naturelle	1 pour $t \in [0; D]$ 0 pour $t \notin [0; D]$	$\text{sinc}(\pi D f)$
triangulaire (Bartlett)	$1 - \frac{2t}{D}$ pour $0 < t < \frac{D}{2}$ $1 + \frac{2t}{D}$ pour $-\frac{D}{2} < t < 0$	$\left[ \text{sinc}\left(\pi \frac{D}{2} f\right) \right]^2$
Hann	$\left[ \cos\left(\pi \frac{t}{D}\right) \right]^2$ $= \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{D}\right) \right]$	$\text{sinc}(\pi D f) + \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}(\pi - \pi D f)$ $+ \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}(\pi + \pi D f)$
Hamming	$0,54 + 0,46 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{D}\right)$	$0,54 \cdot \text{sinc}(\pi D f)$ $+ 0,23 \cdot \text{sinc}(\pi - \pi D f)$ $+ 0,23 \cdot \text{sinc}(\pi + \pi D f)$
Blackman	$0,42 + 0,5 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{D}\right)$ $+ 0,08 \cdot \cos\left(4\pi \frac{t}{D}\right)$	$0,42 \cdot \text{sinc}(\pi D f) +$ $0,25 \cdot \text{sinc}(\pi - \pi D f) + 0,25 \cdot \text{sinc}(\pi + \pi D f) +$ $0,04 \cdot \text{sinc}(2\pi - \pi D f) + 0,04 \cdot \text{sinc}(2\pi + \pi D f)$



Noms	Largeur lobe central	lobe secondaire		$\frac{ W(f_E / 2N) }{ W(0) }$ (dB)
		lobe central (dB)	lobe central (dB)	
rectangulaire	$2 \cdot f_E / N$	-13,3	-3,9	
Bartlett	$4 \cdot f_E / N$	-26	-1,4	
Hann	$4 \cdot f_E / N$	-32	-1,4	
Hamming	$4 \cdot f_E / N$	-54	-1,75	
Blackman	$6 \cdot f_E / N$	-66	-0,9	