



## **FILTRAGE NUMERIQUE**

**deuxième partie : synthèse des filtres numériques**

**Pierre Le Bars**  
(avec la collaboration de Francis Gary)  
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

# FILTRAGE NUMERIQUE

## Deuxième partie : synthèse des filtres numériques

### I/ Méthodes générales de synthèse des filtres numériques

Mis à part quelques cas simples (par exemple filtre à « moyenne glissante » défini par la récurrence  $y(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$ ), la synthèse directe des filtres numériques n'est pas aisée. Les méthodes de synthèse les plus utilisées s'appuient sur les propriétés (bien connues !...) des filtres analogiques.

On part d'un filtre analogique « prototype » de fonction de transfert  $G_{anal}(p)$  ayant les propriétés souhaitées, puis on cherche le filtre numérique de fonction de transfert  $H_{Num}(z)$  ayant sensiblement les mêmes propriétés :

- même réponse impulsionnelle
- même réponse indicielle
- même réponse harmonique sur l'intervalle  $\left[-\frac{f_E}{2}; \frac{f_E}{2}\right]$  (Shannon !)
- ...

### II/ Synthèse de filtres R.I.F.

#### -1- Intérêt des filtres RIF

Un filtre RIF est définie par une fonction de transfert :

$$H(z) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot z^{-k}$$

soit en régime harmonique :

$$H(j,\omega) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot (e^{j,\omega \cdot T_E})^{-k} = \sum_{k=0}^P a_k \cdot e^{-k \cdot j,\omega \cdot T_E}$$

Il arrive souvent que ces coefficients aient des propriétés de symétrie :

$$a_k = a_{P-k} \quad \text{ou} \quad a_k = -a_{P-k}$$

Si on regroupe deux à deux les termes :

$$\begin{aligned} a_k \cdot e^{-k \cdot j,\omega \cdot T_E} + a_{P-k} \cdot e^{-(P-k) \cdot j,\omega \cdot T_E} &= a_k \cdot \left[ e^{-k \cdot j,\omega \cdot T_E} + e^{-(P-k) \cdot j,\omega \cdot T_E} \right] \\ &= a_k \cdot e^{-j \cdot \frac{P}{2} \cdot \omega \cdot T_E} \cdot \left[ e^{\left(\frac{P-k}{2}\right) \cdot j,\omega \cdot T_E} + e^{-\left(\frac{P-k}{2}\right) \cdot j,\omega \cdot T_E} \right] \\ &= 2 \cdot a_k \cdot \underbrace{\cos \left[ \left(\frac{P-k}{2}\right) \cdot \omega \cdot T_E \right]}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^{-j \cdot \frac{P}{2} \cdot \omega \cdot T_E} \end{aligned}$$

(si  $a_k = -a_{P-k}$ , on obtient  $2 \cdot j \cdot a_k \cdot \sin \left[ \left(\frac{P-k}{2}\right) \cdot \omega \cdot T_E \right] \cdot e^{-j \cdot \frac{P}{2} \cdot \omega \cdot T_E}$ )

On aura alors :

$$H(j,\omega) = e^{-j\frac{P}{2}\omega.T_E} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^P 2.a_k \cdot \cos\left[\left(\frac{P}{2} - k\right).\omega.T_E\right]}_S$$

D'où :

$$\text{Arg}[H(j,\omega)] = -\frac{P}{2}.T_E.\omega \quad (+ \pi) \quad (\text{le terme } + \pi \text{ intervient si } S < 0)$$

On obtient un filtre **dont la phase varie linéairement en fonction de  $\omega$** . Un tel déphasage est **équivalent à un retard**  $\tau = \frac{P}{2}.T_E$ .

(si  $a_k = -a_{P-k}$  :  $\text{Arg}[H(j,\omega)] = \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2}.T_E.\omega \quad (+ \pi)$  . La conclusion est la même).

## -2- Énoncé du problème de synthèse

On cherche à réaliser un filtre de fonction de transfert :

$$H_{\text{Num}}(z) = \sum_{k=0}^P a_k . z^{-k}$$

ou, ce qui est équivalent, défini par la récurrence :

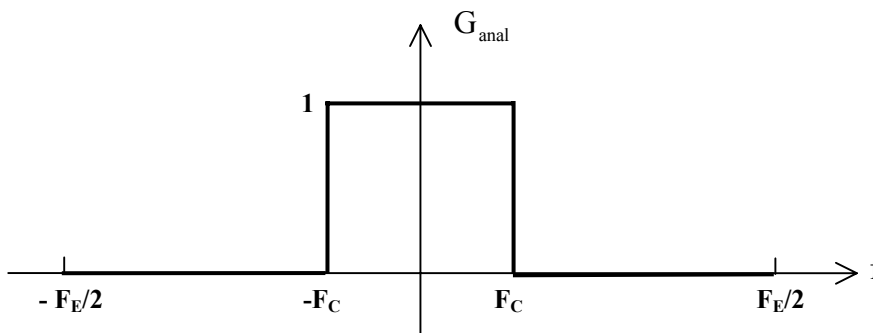
$$y(n) = \sum_{k=0}^P a_k . x(n - k)$$

Or, on a vu que pour un filtre RIF :  $a_k = h(k)$  , où  $h(n)$  est la réponse impulsionnelle du filtre. Le problème se ramène donc à la détermination de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre numérique.

Deux cas peuvent se présenter :

- on sait calculer la réponse impulsionnelle  $g(t)$  du filtre analogique prototype (technique de l'échantillonnage temporel)
- on ne sait pas calculer  $g(t)$ , mais on connaît l'allure de la réponse en fréquence du filtre analogique prototype.  $G_{\text{anal}}(j,\omega)$  est connu, ou au moins un gabarit (technique de l'échantillonnage en fréquence).

On travaillera sur un exemple pour mettre en œuvre ces deux techniques : on cherche à réaliser sous forme numérique un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_C = \frac{F_E}{10}$  (voir TP).



### -3- Echantillonnage temporel (invariance impulsionnelle)

Soit  $g(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt = 1 \\ &\xrightarrow{\text{Filtrage}} G(f) = G_{\text{anal}}(f) \cdot \Delta(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -F_c < f < F_c \\ 0 & \text{si } f \notin [-F_c ; F_c] \end{cases} \\ &\xrightarrow{\text{Fourier Inverse}} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \\ &= \int_{-F_c}^{+F_c} e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \\ &= \frac{e^{j \cdot 2\pi \cdot F_c \cdot t} - e^{-j \cdot 2\pi \cdot F_c \cdot t}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \\ &= 2 \cdot F_c \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot F_c \cdot t)}{2\pi \cdot F_c \cdot t} \end{aligned}$$

Cette réponse impulsionnelle est échantillonnée pour fournir la réponse impulsionnelle du filtre numérique :

$$h(n) = T_E \cdot g(n \cdot T_E) = 2 \cdot F_c \cdot T_E \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot F_c \cdot n \cdot T_E)}{2 \cdot \pi \cdot F_c \cdot n \cdot T_E}$$

Pour  $F_c = \frac{F_E}{10}$ , on obtient numériquement :

$$h(n) = 0,2 \cdot \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{5}\right)}{n \cdot \frac{\pi}{5}}$$

Deux problèmes surgissent :

1. la réponse impulsionnelle est infinie. Pour la rendre finie, on tronque cette réponse (fenêtre rectangulaire) ; voir TP : on ne prend que 17 échantillons, de  $n = -8$  à  $n = +8$ .
2. le filtre n'est pas causal : il répond **avant** l'impulsion. Il n'est donc pas réalisable physiquement. Pour le rendre causal (et donc réalisable), on translate cette réponse de 8 échantillons :  $h(-8)$  devient  $h(0)$ ,  $h(-7)$  devient  $h(1)$  ...  $h(8)$  devient  $h(16)$ .

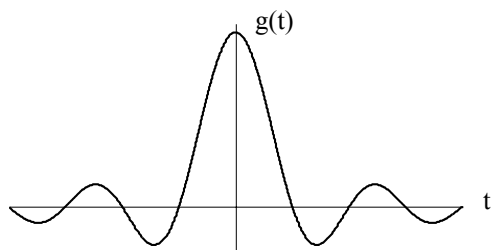
L'ensemble des opérations de synthèse est résumé page suivante.

Valeurs des coefficients :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a <sub>k</sub>	-0.037841	-0.043247	-0.031183	0	0.046774	0.10091	0.15137	0.1871	0.2
k	9	10	11	12	13	14	15	16	
a <sub>k</sub>	0.1871	0.15137	0.10091	0.046774	0	-0.031183	-0.043247	-0.037841	

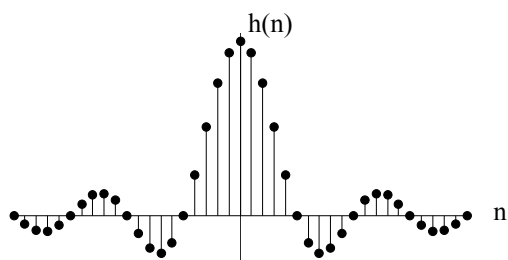
Remarque : on retrouve la propriété  $h(k) = h(16 - k)$  ; l'argument variera de façon linéaire, traduisant un retard de  $8 \cdot T_E$  (volontairement introduit pour rendre le filtre réalisable)

**Synthèse d'un filtre passe-bas « idéal » ( $F_C = F_E/10$ ) : échantillonnage temporel**



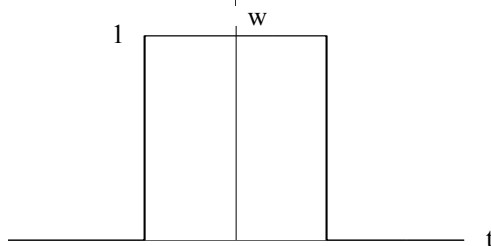
Filtre analogique :  
réponse impulsionnelle  $g(t)$

$$g(t) = 2.F_C \cdot \frac{\sin(2\pi.F_C.t)}{2\pi.F_C.t}$$

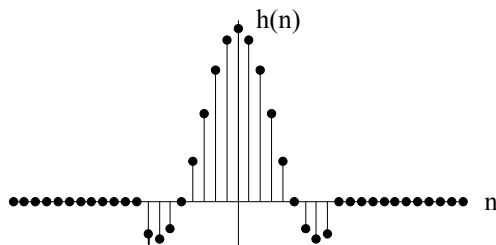


Echantillonnage de la réponse  
impulsionnelle :

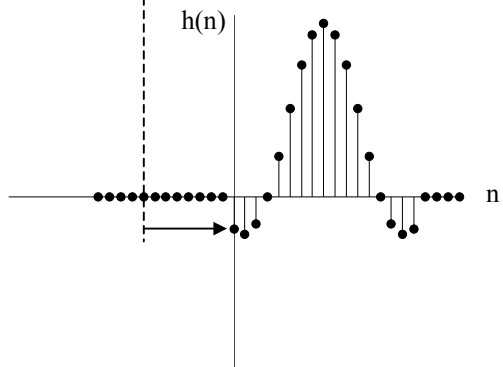
$$h(n) = T_E \cdot g(n.T_E)$$



Fenêtre  $w(t)$  ou  $w(n)$ .  
(limitation du nombre d'échantillons)



Réponse impulsionnelle limitée à un  
nombre fini d'échantillons :  
 $h(n) \cdot w(n)$



Décalage  
(filtre causal, c'est à dire réalisable  
physiquement)

#### -4- Echantillonnage en fréquence

On décide d'échantillonner en fréquence  $G_{\text{anal}}(j.\omega)$ . On définit donc la suite :

$$H(k) = G_{\text{anal}}\left(j.k.\frac{\omega_E}{N}\right)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons. En reprenant le même exemple que précédemment  $N = 17$ ,  $H(0) = H(-1) = H(1) = 1$  et  $H(2) = H(-2) = \dots = H(8) = H(-8) = 0$

On peut en déduire, par transformation de Fourier discrète (TFD), les valeurs de la réponse impulsionnelle :

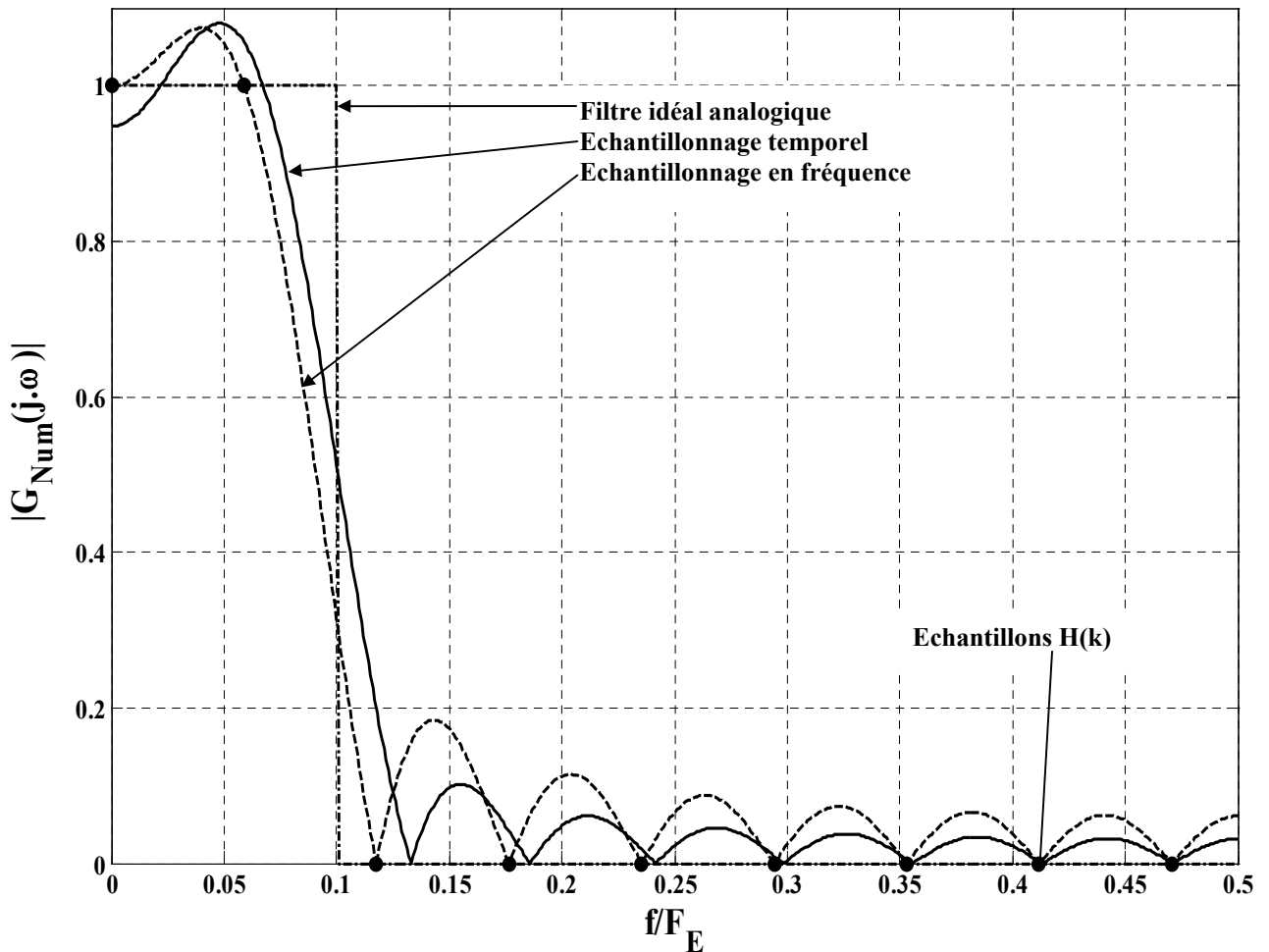
$$h(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-N/2}^{N/2} H(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

Dans notre cas :

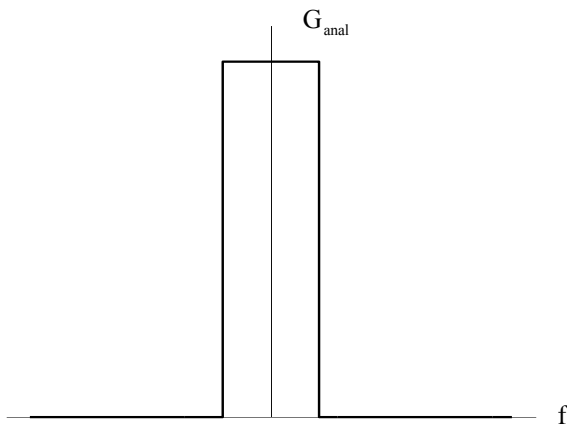
$$h(n) = \frac{1}{17} \cdot \left( 1 + e^{-j\frac{2\pi}{17} \cdot n} + e^{j\frac{2\pi}{17} \cdot n} \right) = \frac{1}{17} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{17} \cdot n\right) \right] \quad \text{avec } -8 \leq n \leq 8$$

Enfin, pour rendre ce filtre réalisable physiquement, on translate cette réponse impulsionnelle de 8 échantillons. L'ensemble de ces opérations est résumé page suivante.

La figure ci-dessous indique la réponse en fréquence de chaque filtre.

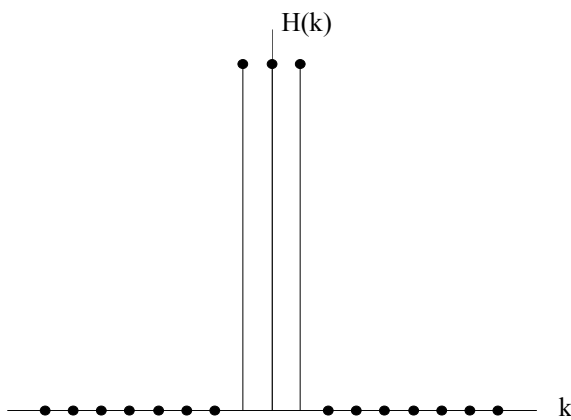


**Synthèse d'un filtre passe-bas « idéal » ( $F_C = F_E/10$ ) : échantillonnage en fréquence**



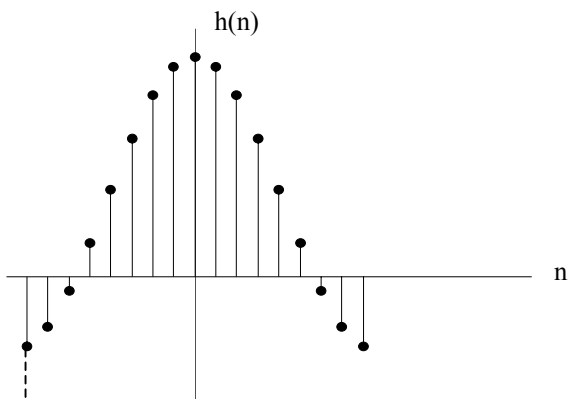
Réponse en fréquence du filtre analogique prototype

$$G_{\text{anal}}(j.\omega)$$



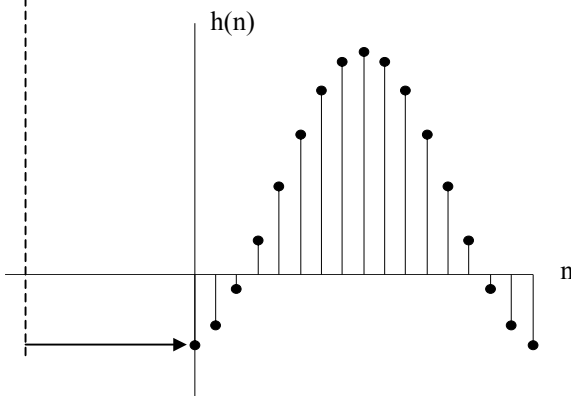
Echantillonnage en fréquence :

$$H(k) = G_{\text{anal}} \left( j.k.\frac{\omega_E}{N} \right)$$



Transformée de Fourier Discrète :

$$h(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-N/2}^{N/2} H(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$



Décalage  
(filtre réalisable physiquement)

## -5- Amélioration : notion de fenêtre

Si on reprend l'exemple de l'échantillonnage temporel, la réponse harmonique présente des ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée. La réponse impulsionnelle a été tronquée brutalement ; son spectre est donc étendu et ne respecte pas le théorème de Shannon. Nous retombons dans les problèmes de repliement de spectre. Afin de limiter ces effets, on réalise une troncature « en douceur » en affectant les coefficients  $a_k = h(k)$  d'un facteur de pondération (voir le chapitre sur la FFT).

Méthode résumée :

$$g(t) \rightarrow h(n) = T_E \cdot g(n \cdot T_E)$$

$$\rightarrow h'(n) = h(n) \cdot w(n) \quad (w(n) : \text{facteurs de pondération})$$

$\rightarrow$  décalage pour que le filtre soit réalisable

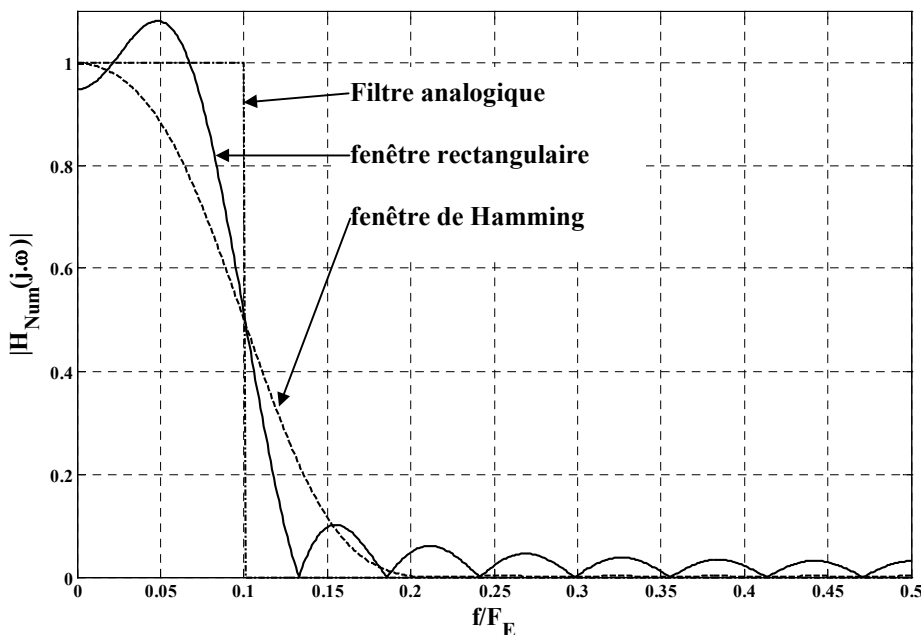
$$\rightarrow H_{\text{Num}}(z) = \sum_{k=0}^N h'(k) \cdot z^{-k}$$

Exemple : fenêtre de Hamming :

$$\left. \begin{aligned} w(n) &= 0,54 + 0,46 \cdot \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \\ h(n) &= 0,2 \cdot \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{5}\right)}{n \cdot \frac{\pi}{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h'(n) = 0,2 \cdot \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{5}\right)}{n \cdot \frac{\pi}{5}} \cdot \left[ 0,54 + 0,46 \cdot \cos\left(2\pi \frac{n}{17}\right) \right]$$

Après décalage de 8 échantillons, on obtient le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h(k)	-0.0378	-0.0432	-0.0312	0	0.0468	0.1009	0.1514	0.1871	0.2000
h'(k)	<b>-0.0033</b>	<b>-0.0064</b>	<b>-0.0082</b>	<b>0</b>	<b>0.0272</b>	<b>0.0752</b>	<b>0.1332</b>	<b>0.1813</b>	<b>0.2000</b>
k	9	10	11	12	13	14	15	16	
h(k)	0.1871	0.1514	0.1009	0.0468	0	-0.0312	-0.0432	-0.0378	
h'(k)	<b>0.1813</b>	<b>0.1332</b>	<b>0.0752</b>	<b>0.0272</b>	<b>0</b>	<b>-0.0082</b>	<b>-0.0064</b>	<b>-0.0033</b>	



La figure ci-contre permet de comparer les deux résultats : fenêtre rectangulaire et fenêtre de Hamming



## **-6- Intérêts et limites des filtres RIF**

Intérêts : 1) les filtres RIF sont **toujours stables**  
2) on peut facilement réaliser des filtres RIF à **phase linéaire**

Inconvénients : on arrive rapidement à des filtres d'ordre élevé (voir les exemples ci-dessus :  $N = 17$ ). Les calculs sont donc longs. Ces filtres sont rapidement **limités en fréquence ( $F_E$  limitée)**

## **III/ Synthèse des filtres R.I.I.**

### **-1- Les différentes méthodes**

Il existe de nombreuses méthodes de synthèse des filtres RII, suivant le critère qu'on s'impose :

- réponse temporelle imposée.
  - \* réponse impulsionnelle → méthode d'invariance impulsionnelle
  - \* réponse indicielle → méthode d'invariance indicielle (cette méthode a été utilisée pour réaliser en TP AU le PID numérique, la consigne étant souvent un échelon)
- simulation numérique d'une équation différentielle
  - \* méthode d'Euler
  - \* méthode des trapèzes
- réponse en fréquence imposée : transformation bilinéaire

Pour illustrer ces méthodes, on cherchera à réaliser un filtre numérique à partir d'un filtre analogique prototype de fonction de transfert  $G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p}$ , avec  $\tau = T_E$  (système déjà pris comme exemple dans la première partie)

### **-2- Invariance impulsionnelle**

Cette méthode est résumée ci-dessous :

$$\begin{aligned} G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} &\xrightarrow[\text{inverse}]{\text{Transformée de Laplace}} g(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \gamma(t) \\ &\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} h(n) = T_E \cdot g(n.T_E) = \frac{T_E}{\tau} \cdot \left( e^{-\frac{T_E}{\tau}} \right)^n \cdot u(n) \\ &\xrightarrow{\text{Transformée en Z}} H(z) = \frac{T_E}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}} \end{aligned}$$

Remarque :  $G_{\text{anal}}(p)$  possède un pôle (valeur de  $p$  rendant  $G_{\text{anal}}(p)$  infini) :  $p = -\frac{1}{\tau}$

$H(z)$  possède un pôle :  $z = e^{-\frac{T_E}{\tau}} = e^{T_E \cdot p}$ , où  $p$  est le pôle de  $G_{\text{anal}}(p)$ .

### **-3- Invariance indicielle**

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = G_{\text{anal}}(p) \cdot \Gamma(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau.p}$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \gamma(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} y(n) = \left(1 - e^{-\frac{n.T_E}{\tau}}\right) \cdot u(n)$$

$$\xrightarrow{\text{Transformée en Z}} Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}} = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

On obtient donc l'expression de H(z) :

$$\underline{H(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot Y(z) = 1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}}\right) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}}$$

### **-4- Méthode d'Euler : approximation de la dérivée**

Un filtre analogique est défini par sa fonction de transfert  $G_{\text{anal}}(p)$  :

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{a_0 + a_1.p + \dots + a_m.p^m}{1 + b_1.p + \dots + b_n.p^n}$$

ou, ce qui est équivalent, par l'équation différentielle :

$$y + b_1 \cdot \frac{dy}{dt} + \dots + b_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = a_0 \cdot x + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + \dots + a_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m}$$

Le problème consiste à simuler sous forme numérique cette équation différentielle.

Considérons donc un dérivateur :

$$y = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Si  $T_E$  est « petit », on pourra assimiler  $\Delta t$  à  $T_E$  ; on aura donc :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_E)}{T_E}$$

En écrivant cette relation à l'instant  $t = n \cdot T_E$ , on obtient :

$$y(n.T_E) = y(n) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=n.T_E} \approx \frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$$

et en prenant la transformée en Z de chaque membre :

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_E} \cdot X(z)$$

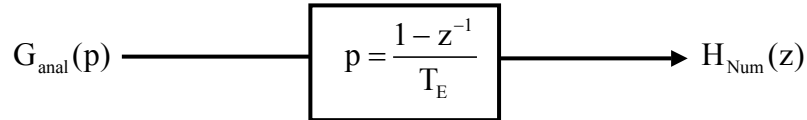
En résumé :

Equation temporelle :  $y = \frac{dx}{dt}$

Récurrance :  $y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$

Transformée de Laplace :  $Y(p) = p.X(p)$

Transformée en z :  $Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_E}.X(z)$



On passe de  $G_{anal}(p)$  à  $H_{Num}(z)$  en remplaçant p par  $\frac{1 - z^{-1}}{T_E}$ .

Exemple :

$$G_{anal}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} \xrightarrow{p = \frac{1 - z^{-1}}{T_E}} H_{Num}(z) = \frac{1}{1 + \tau \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T_E}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_E}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau}{T_E} \cdot z^{-1}}$$

Remarques

1. On a fait le parallèle transformée de Laplace - transformée en Z en utilisant l'identité :  $z = e^{T_E \cdot p}$ .

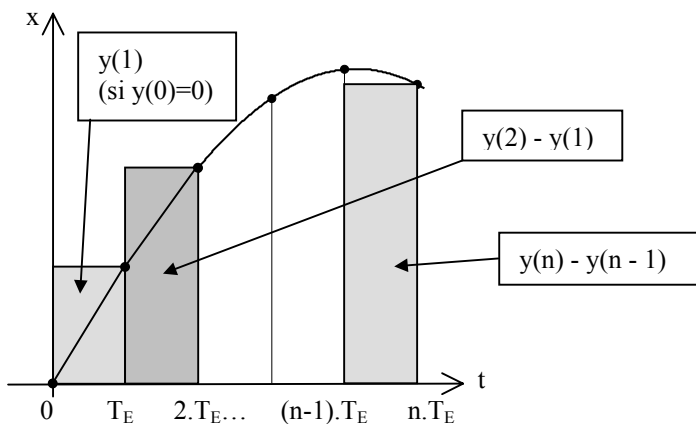
Si  $T_E \cdot p \ll 1 : 1 - z^{-1} = 1 - e^{-T_E \cdot p} \approx 1 - (1 - T_E \cdot p) = T_E \cdot p$  soit  $p = \frac{1 - z^{-1}}{T_E}$ . La

méthode d'Euler est une approximation au premier ordre de l'identité  $z = e^{T_E \cdot p}$ . On conçoit facilement que cette approximation est grossière pour les dérivées seconde, troisième ... Il faut que x(t) varie « peu » sur une période d'échantillonnage.

2. Considérons un intégrateur analogique :  $G_{anal}(p) = \frac{1}{p}$ . Son équivalent

numérique par la méthode d'Euler est :  $H_{Num}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{T_E}{1 - z^{-1}}$ . En

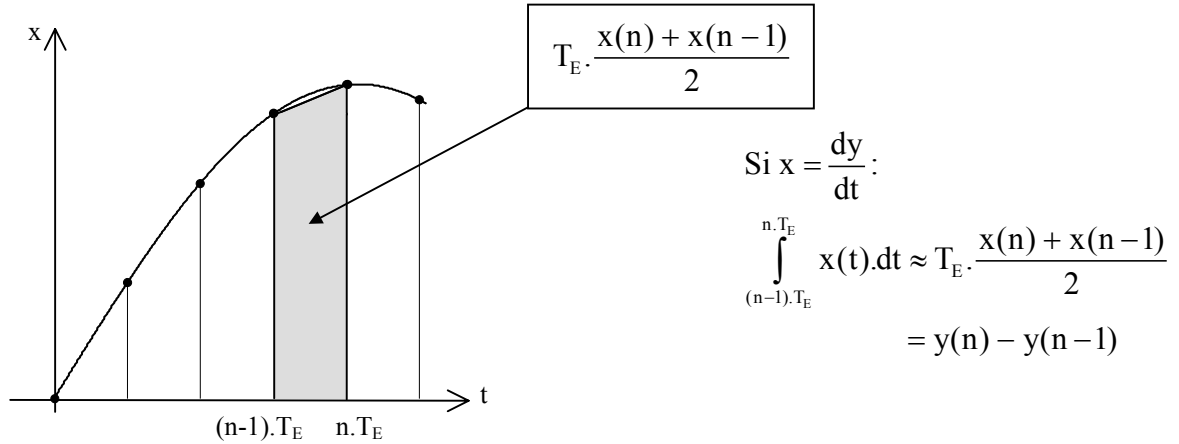
revenant à la récurrance :  $y(n) - y(n-1) = T_E \cdot x(n)$ .



Méthode d'Euler  
= approximation d'une intégrale par une somme de Darboux

## -5- Méthode des trapèzes

On peut améliorer le calcul d'une intégrale en utilisant la méthode des trapèzes :



La méthode est résumée ci-dessous :

Equation temporelle :  $\frac{dy}{dt} = x$

→ Laplace →

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{p}$$

$$p = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Récurrance :  $y(n) - y(n-1) = T_E \cdot \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$  → Transformée en Z →  $H_{\text{Num}}(z) = \frac{T_E}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

On passe de  $G_{\text{anal}}(p)$  à  $H_{\text{Num}}(z)$  par la transformation  $p = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

Exemple :

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} \Rightarrow H_{\text{Num}}(z) = G_{\text{anal}}\left(p = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1 + \tau \cdot \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{\tau}{T_E} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{2 \cdot \frac{\tau}{T_E} - 1}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{\tau}{T_E} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{2 \cdot \frac{\tau}{T_E} - 1}{2 \cdot \frac{\tau}{T_E} + 1} \cdot z^{-1}}}$$

## Remarques

$$1. \quad p = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{T_E \cdot p}{2}}{1 - \frac{T_E \cdot p}{2}} \approx 1 + T_E \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (T_E \cdot p)^2 + \frac{1}{4} \cdot (T_E \cdot p)^3.$$

L'identité  $z = e^{T_E \cdot p}$  donne :  $z \approx 1 + T_E \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (T_E \cdot p)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (T_E \cdot p)^3$ . La

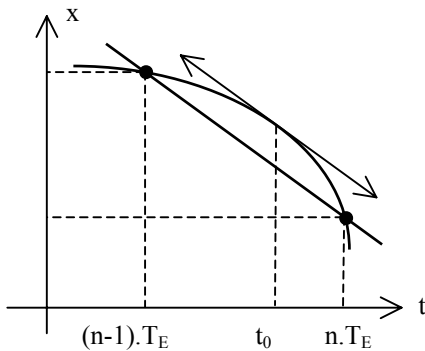
méthode des trapèzes est une approximation au deuxième ordre de la relation  $z = e^{T_E \cdot p}$ , alors que la méthode d'Euler n'est valable qu'au premier ordre.

2. Considérons un dérivateur analogique ;

$$y = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{Laplace}} G_{\text{anal}}(p) = p$$

$\Rightarrow$

$$H_{\text{Num}}(z) = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \xrightarrow[\text{inverse}]{\text{Transformée en Z}} \frac{y(n) + y(n-1)}{2} = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$$



Le théorème des accroissements finis dit que :

$$\exists t_0 \in ](n-1)T_E ; nT_E[$$

$$\text{tel que : } y(t_0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$$

L'approximation consiste à dire que :

$$y(t_0) \approx \frac{y(n) + y(n-1)}{2}$$

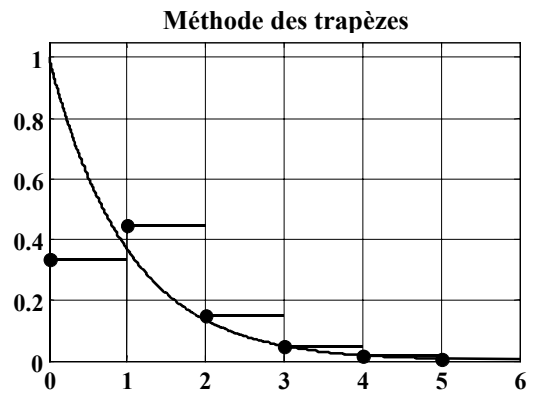
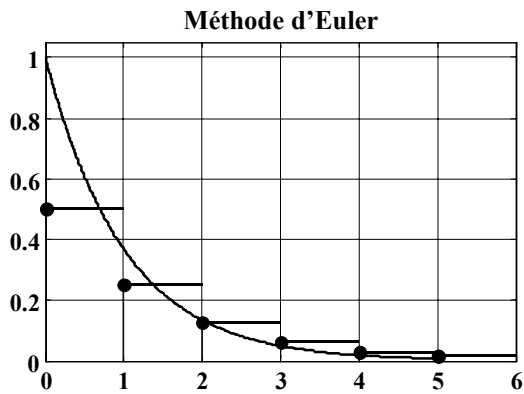
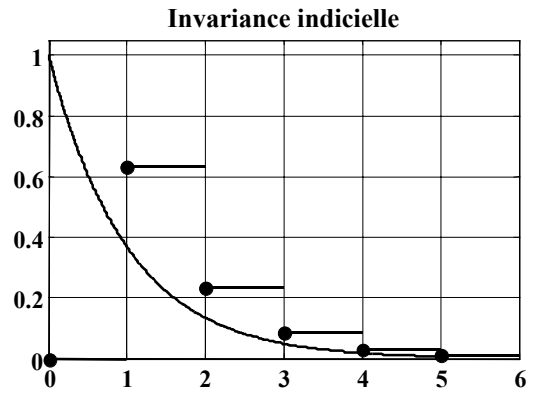
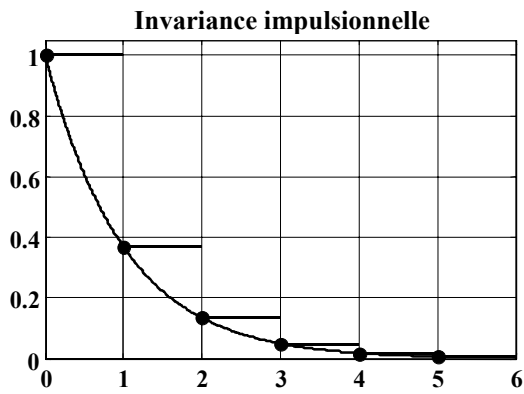
( $x(t)$  assimilé à un arc de parabole)

## -6- Comparaison des différentes méthodes de synthèse

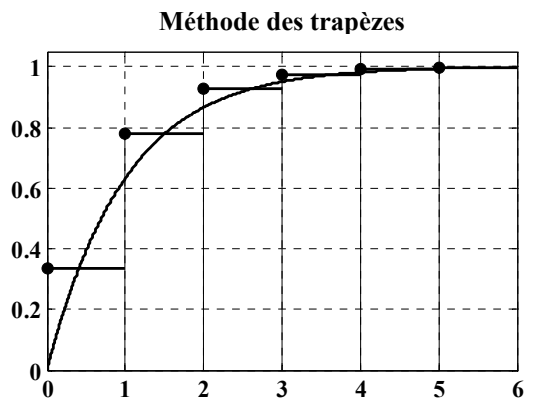
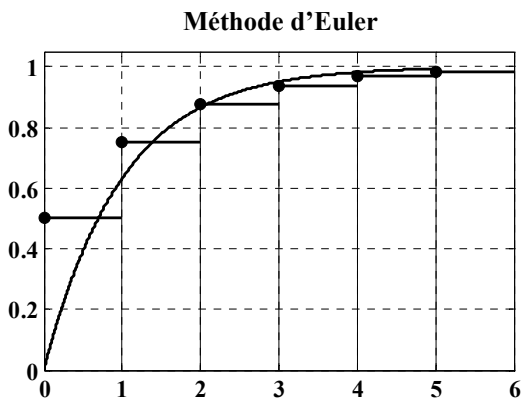
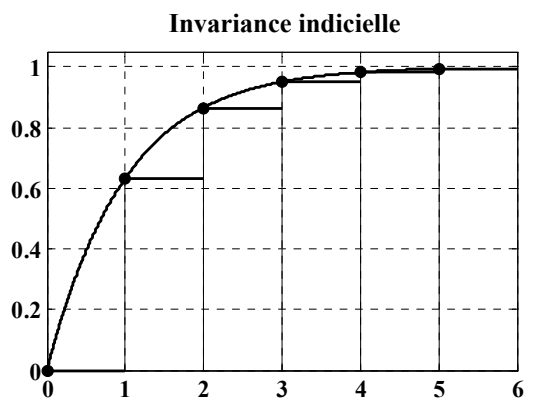
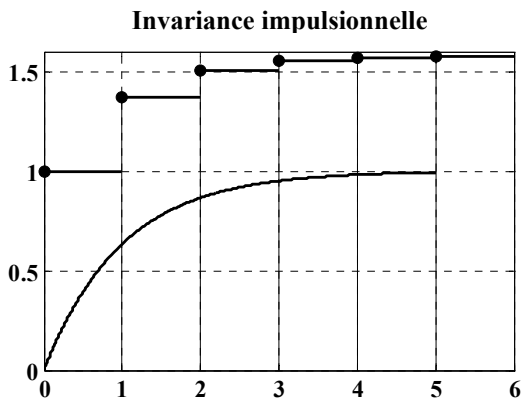
Les figures des pages suivantes permettent de comparer les réponses impulsionnelles, indicielles et harmoniques des 4 filtres numériques. Pour  $\tau = T_E$  :

- Invariance impulsionnelle :  $H(z) = \frac{1}{1 - 0,36788 \cdot z^{-1}}$
- Invariance indicielle :  $H(z) = \frac{0,63212 \cdot z^{-1}}{1 - 0,36788 \cdot z^{-1}}$
- Méthode d'Euler :  $H(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}$
- Méthode des trapèzes :  $H(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} \cdot z^{-1}}$

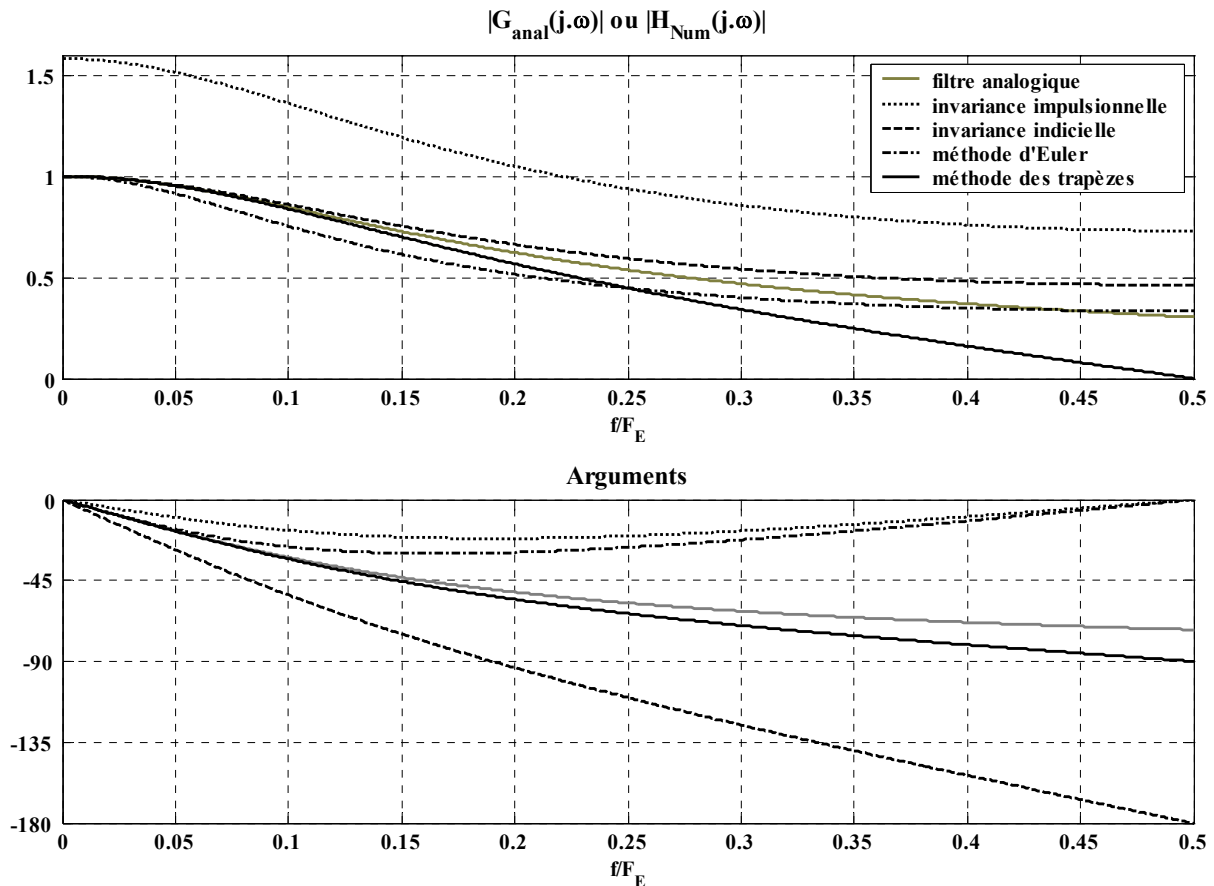
## REPONSES IMPULSIONNELLES



## REPONSES INDICIELLES



## REPONSES HARMONIQUES



Si on s'intéresse au régime harmonique, en basse fréquence ( $f \leq 0,15.F_E$ ), la méthode des trapèzes ou l'invariance indicielle donnent, pour le gain, des réponses comparables au premier ordre analogique ; mais seule la méthode des trapèzes donne des résultats comparables au premier ordre analogique **pour le gain et l'argument**.

### -7- Transformation bilinéaire

Il s'agit d'une amélioration de la méthode des trapèzes.

#### 7.1. « Distorsion » de l'axe des fréquences

On se pose le problème suivant : connaissant la réponse en fréquence du filtre analogique prototype (courbes  $|G_{anal}(j.\omega_A)| = f(\omega_A)$  et  $\text{Arg}[G_{anal}(j.\omega_A)] = g(\omega_A)$ , où  $\omega_A$  désigne la pulsation du signal à l'entrée du filtre analogique), peut-on obtenir rapidement les courbes  $|H_{Num}(j.\omega_N)| = f'(\omega_N)$  et  $\text{Arg}[H_{Num}(j.\omega_N)] = g'(\omega_N)$  où  $H_{Num}$  est la fonction de transfert du filtre numérique obtenu la méthode des trapèzes et  $\omega_N$  la pulsation du signal à l'entrée du filtre numérique ?

$$p = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow j.\omega_A = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - e^{-j.\omega_N.T_E}}{1 + e^{-j.\omega_N.T_E}}$$

Avant tout calcul, on peut remarquer que :

$$\omega_A \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-j\omega_N T_E} \rightarrow 1 \Rightarrow \omega_N \rightarrow 0$$

$$\omega_A \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-j\omega_N T_E} \rightarrow -1 \Rightarrow \omega_N T_E \rightarrow \pi \Rightarrow \omega_N \rightarrow \frac{\omega_E}{2}$$

Autrement dit, toute la gamme des fréquences analogiques ( de 0 à l'∞ ) est ramenée sur la gamme des fréquences numériques (de 0 à  $\frac{\omega_E}{2}$ ) : on évite ainsi les problèmes de repliement de spectre.

Correspondance :

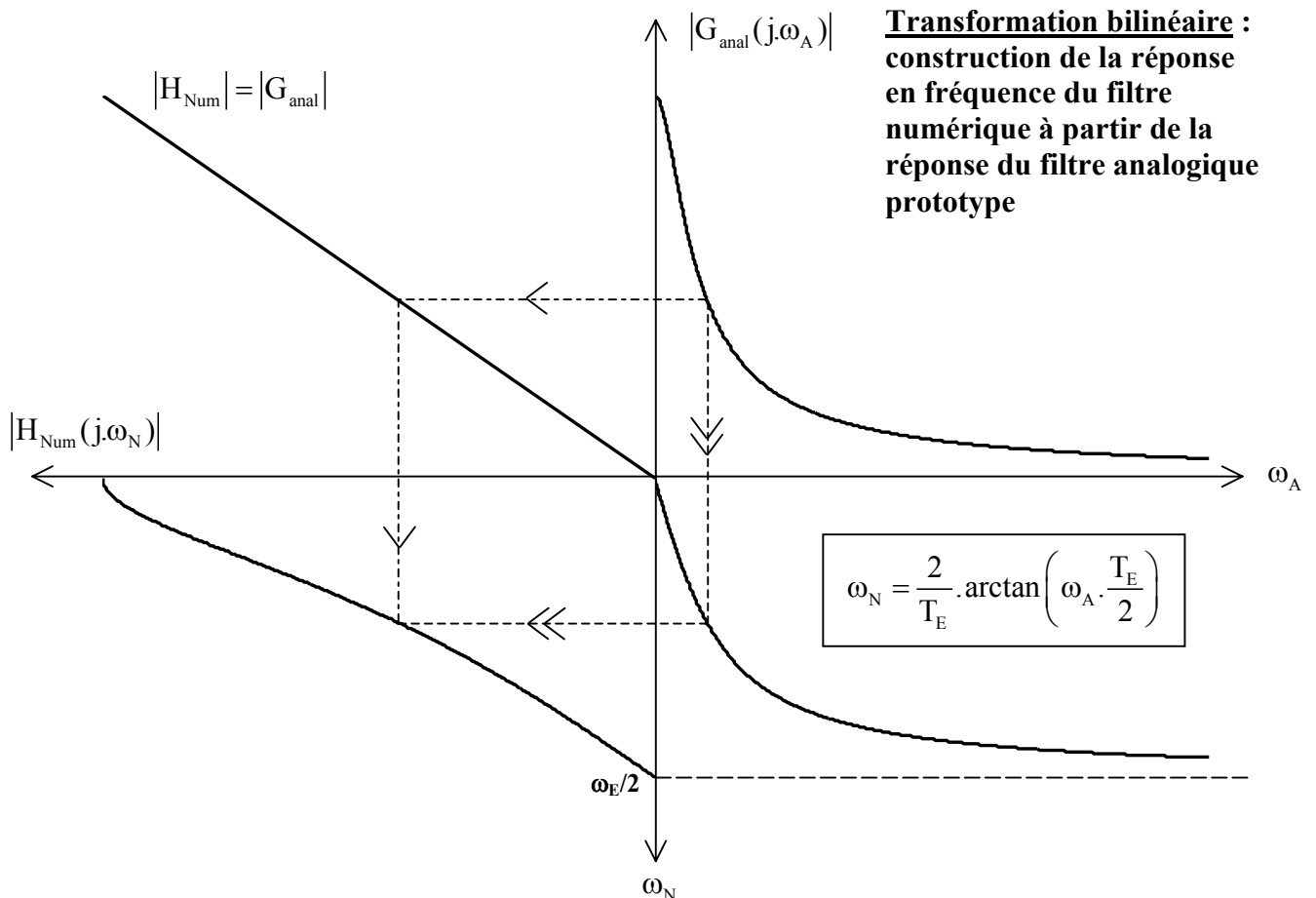
$$j\omega_A = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega_N T_E}}{1 + e^{-j\omega_N T_E}} = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{e^{-j\omega_N \frac{T_E}{2}} \cdot \left( e^{j\omega_N \frac{T_E}{2}} - e^{-j\omega_N \frac{T_E}{2}} \right)}{e^{-j\omega_N \frac{T_E}{2}} \cdot \left( e^{j\omega_N \frac{T_E}{2}} + e^{-j\omega_N \frac{T_E}{2}} \right)} = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{2j \cdot \sin\left(\omega_N \cdot \frac{T_E}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\omega_N \cdot \frac{T_E}{2}\right)}$$

⇒

$$\omega_A \cdot \frac{T_E}{2} = \tan\left(\omega_N \cdot \frac{T_E}{2}\right) \Leftrightarrow \omega_N \cdot \frac{T_E}{2} = \arctan\left(\omega_A \cdot \frac{T_E}{2}\right)$$

(l'utilisation de la fonction arctan ne pose ici aucun problème, car  $\omega_N \cdot \frac{T_E}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ )

La figure ci-dessous indique la construction permettant de passer de la réponse en fréquence du filtre analogique à la réponse en fréquence du filtre numérique.





### 7.2. Exemple

On veut réaliser un filtre numérique de pulsation de coupure :

$$\omega_{CN} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_E}$$

Comment choisir le filtre prototype de fonction de transfert  $G_{anal}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{CA}}}$  ?

Autrement dit, comment choisir  $\omega_{CA}$  ?

Pour tenir compte de la « distorsion » de l'axe des fréquences, on choisira :

$$\omega_{CA} = \frac{2}{T_E} \cdot \tan\left(\frac{\omega_{CN} \cdot T_E}{2}\right) = \frac{2}{T_E} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\right)$$

puis on applique la transformation bilinéaire :

$$G_{anal}(p) = \frac{1}{1 + p \cdot \frac{T_E}{2} \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\right)}} \Rightarrow H_{Num}(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{T_E} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdot \frac{T_E}{2} \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow H_{Num}(z) = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{1 - \tan\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot z^{-1}}$$

La réponse en fréquence est représentée ci-dessous

