



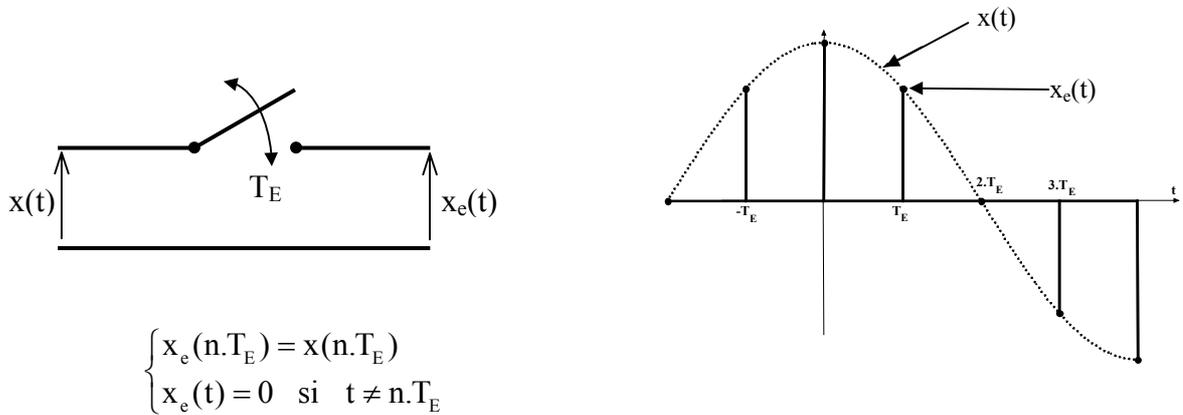
## ECHANTILLONNAGE

**Pierre Le Bars**  
(avec la collaboration de Francis Gary)  
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

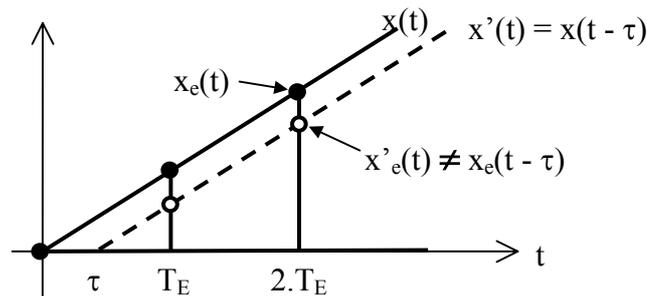
# ECHANTILLONNAGE

## I/ Introduction

Un échantillonneur idéal peut être représenté par un interrupteur se fermant, pour une durée infiniment courte, périodiquement avec une période  $T_E$  :



Pourquoi faire une étude spéciale pour ce système ? Un échantillonneur est un système linéaire, mais ce n'est pas un système invariant dans le temps :



Un échantillonneur n'est donc pas un filtre, et la notion de fonction de transfert n'a pas de sens dans ce cas.

## II/ Dualité temps - fréquence (rappels)

### -1- Signal périodique - Séries de Fourier

Un signal périodique  $x(t)$  de période  $T_0$  (fréquence  $f_0$ , pulsation  $\omega_0$ ) peut être décomposé en séries de Fourier, qui peuvent prendre 3 formes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) + B_n \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) \right] && \text{(forme n°1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \varphi_n) && \text{(forme n°2)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} && \text{(forme n°3)} \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  sont des quantités **réelles**, alors que les  $X_n$  peuvent être **complexes**.

En développant l'expression (2), on retrouve la forme (1) avec :

$$\left. \begin{array}{l} A_n = C_n \cdot \cos \varphi_n \\ B_n = -C_n \cdot \sin \varphi_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \cos \varphi_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \\ \sin \varphi_n = \frac{-B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \end{cases}$$

L'utilisation des formules d'Euler permet de passer de la forme (1) à la forme (3) :

$$\left. \begin{array}{l} X_n = \frac{1}{2} \cdot (A_n - j \cdot B_n) \\ X_{-n} = \frac{1}{2} \cdot (A_n + j \cdot B_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{X_{-n} = X_n^*} \quad \text{(relation 1)}$$

ou  $X_n^*$  désigne le complexe conjugué de  $X_n$ .

De même :

$$\left. \begin{array}{l} X_n = \frac{1}{2} \cdot C_n \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \\ X_{-n} = \frac{1}{2} \cdot C_n \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_n = 2 \cdot |X_n| \\ \varphi_n = \text{Arg}(X_n) \end{cases}$$

**Nous utiliserons dans la suite la forme n°3**, en introduisant des fréquences positives ( $f_0, 2 \cdot f_0, \dots$ ) et des fréquences négatives ( $-f_0, -2 \cdot f_0, \dots$ ).

Connaissant les  $X_n$  on en déduit  $x(t)$ . Inversement, à partir de  $x(t)$  on peut déterminer les  $X_n$  par :

$X_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$	<b>(relation 2)</b>
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t}$	<b>(relation 3)</b>

## **-2- Signal non périodique - Transformées de Fourier**

Modifions légèrement la relation 3, en posant  $X_n = X'_n \cdot f_0$  ; les relations 2 et 3 deviennent :

$$X'_n = \frac{X_n}{f_0} = \frac{1}{f_0 \cdot T_0} \cdot \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt = \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \quad \text{(relation 2 bis)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X'_n \cdot f_0 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} \quad \text{(relation 3 bis)}$$

Si on augmente progressivement la période  $T_0$  du signal, et à la limite si  $T_0 \rightarrow \infty$ , on passe d'un signal périodique à un signal non périodique. (Par exemple, un signal carré devient un échelon ; cette propriété est utilisée pour faire l'étude, à l'aide d'un oscilloscope, de la réponse indicielle d'un système).

Si  $T_0 \rightarrow \infty$  :

- $f_0$  devient infiniment petit, et on le note  $df$
- la variable discrète  $n.f_0$  devient une variable continue  $f$
- le signe  $\sum_{-\infty}^{+\infty}$  devient  $\int_{-\infty}^{+\infty}$

On définit donc la transformée de Fourier  $X(f)$  de  $x(t)$  par :

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j.2.\pi.f.t} .df$	<b>(relation 4)</b>
$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j.2.\pi.f.t} .dt$	<b>(relation 5)</b>

La propriété n°1 devient pour un signal non périodique :

$X(-f) = X(f)^*$	<b>(relation 1 bis)</b>
------------------	-------------------------

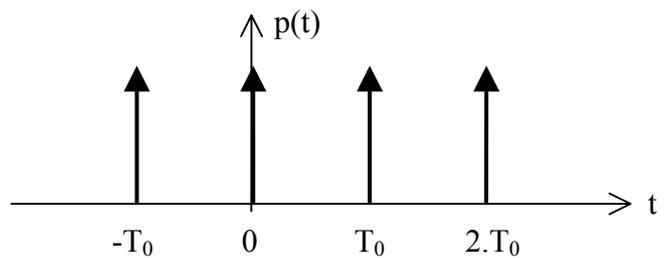
### -3- Exemples

Des exemples de séries et transformées de Fourier sont données en annexes.

#### 3.1. Exemple de signal périodique : « peigne de Dirac »

$$p(t) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0)$$

(suite périodique d'impulsions de Dirac)



$$P_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} T_0 \cdot \delta(t) .dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \delta(t) .dt = 1$$

On peut donc écrire que :

$p(t) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \cdot e^{j.2.\pi.n.f_0.t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j.2.\pi.n.f_0.t}$	<b>(relation 6)</b>
---	---------------------

### 3.2. Exemple de signal non périodique : l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j.2.\pi.f.t} .dt = \left[ e^{-j.2.\pi.f.t} \right]_{t=0} = 1$$

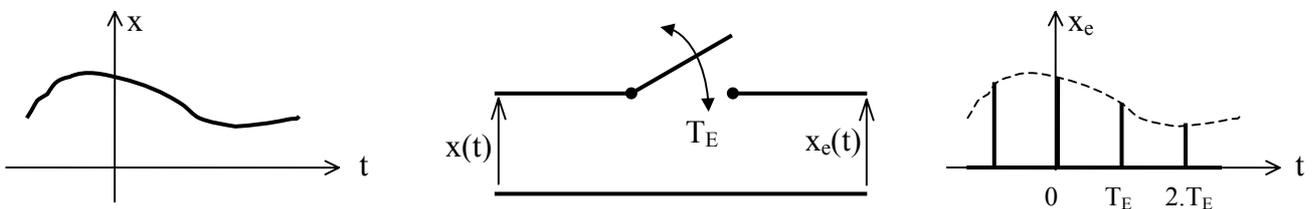
remarque : le spectre d'un peigne de Dirac est un spectre de raies d'amplitude 1, alors que le spectre de l'impulsion unique est un spectre continu d'amplitude 1 (voir le passage d'un signal périodique à un signal non périodique en faisant  $T_0 \rightarrow \infty$ ).

#### -4- Propriétés

- Un signal est **complètement** défini par :
  - sa représentation temporelle  $x(t)$ , visible par exemple à l'oscilloscope
  - sa représentation spectrale (ou « fréquentielle ») visible sur un analyseur de spectre. Il faut connaître  $|X_n|$  et  $\text{Arg}(X_n) \forall n$  ou  $|X(\omega)|$  et  $\text{Arg}[X(\omega)] \forall \omega$
- Pour un signal périodique on a un spectre de raies, et pour un signal non périodique le spectre est continu.
- Un signal à variations rapides (signal carré par exemple) possède un spectre étendu
- Un signal limité dans le temps possède un spectre large (voir la sinusoïde de durée finie D)
- Dualité : si une action dans le domaine spectral a une conséquence dans le domaine temporel, la même action dans le domaine temporel produira le même conséquence dans le domaine spectral.

### III/ Echantillonnage

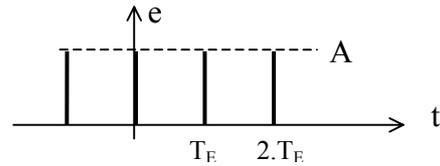
#### -1- Expression mathématique du signal échantillonné



$x_e(t)$  se présente sous la forme d'une suite périodique d'impulsions de hauteur :

$$x_n = x(n.T_E) = x_e(n.T_E)$$

On peut dire que  $x_e(t)$  est le produit :  $x_e(t) = x(t).e(t)$ , du signal  $x(t)$  par le signal d'échantillonnage  $e(t)$  représenté ci-contre



Le problème consiste donc à exprimer  $e(t)$ , suite périodique d'impulsions d'amplitude

$$A : \quad e(t) = A. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_E).$$

Dernier point : quelle amplitude  $A$  choisir ? Un raisonnement sur les dimensions permet de répondre à cette question : si  $x(t)$  et  $x_e(t)$  sont 2 tensions électriques,  $e(t)$  doit être sans dimensions. Or :  $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ , où  $u(t)$  est la fonction échelon unité (sans dimension) ;

$\delta(t)$  s'exprime donc en  $s^{-1}$  (ou Hz). L'homogénéité des relations impose que  $A$  soit homogène à un temps. Nous choisirons  $A = T_E$ .

D'où l'expression mathématique du signal échantillonné :

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t).T_E. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_E) \\ &= T_E. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t - n.T_E) \\ &= T_E. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n.T_E).\delta(t - n.T_E) \\ &= T_E. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n.\delta(t - n.T_E) \end{aligned}$$

Remarques :

1. Si  $T_E \rightarrow 0$ , il est évident que  $x_e(t) \rightarrow x(t)$ . On pourra noter  $T_E$  sous la forme  $d\theta$ , la variable discrète  $n.T_E$  devient une variable continue  $\theta$ , et le signe  $\sum$  devient  $\int$ . On retrouve que :  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).\delta(t - \theta).d\theta$  (voir l'introduction à l'étude des systèmes électroniques analogiques).
2. Dans certains ouvrages, on omet le facteur  $T_E$ . Cela signifie que  $T_E$  est pris comme unité de temps.

## **-2- Spectre d'un signal échantillonné**

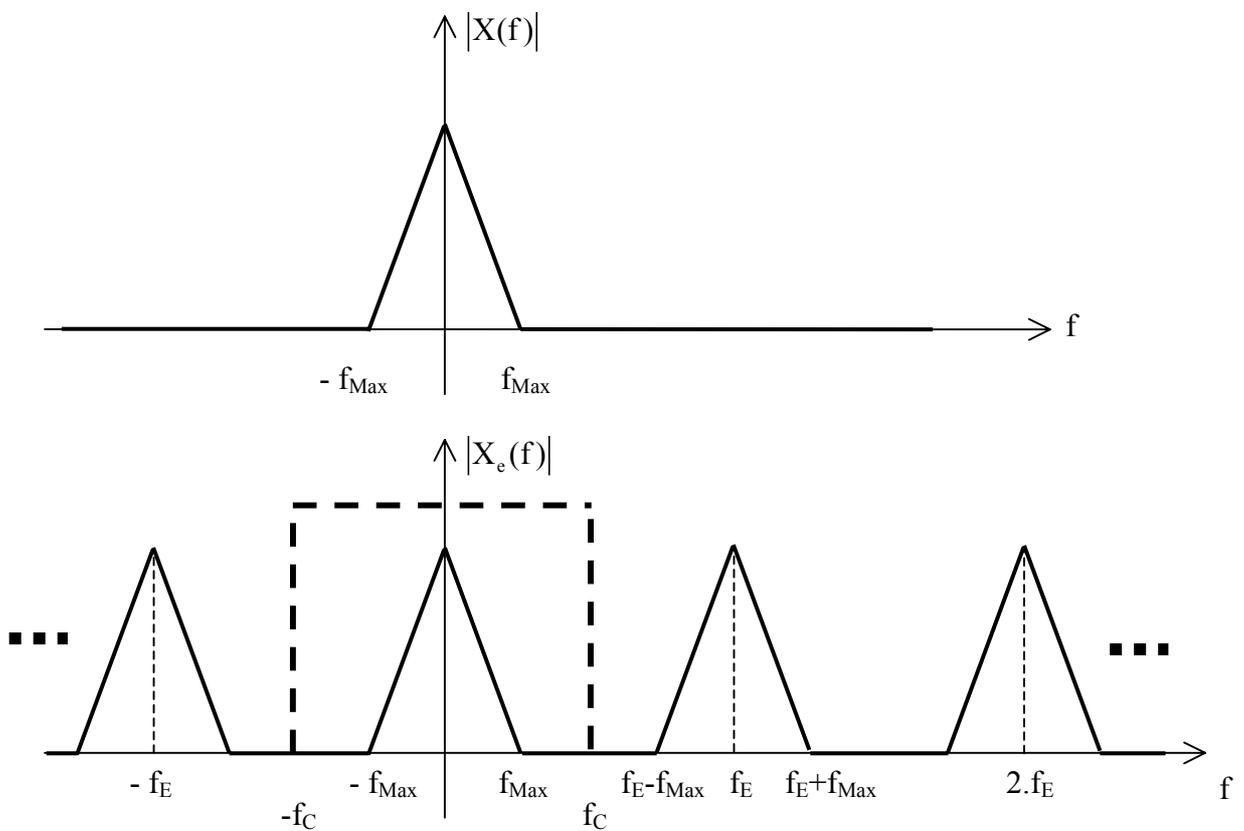
On a vu (relation 6) que :

$$T_E. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_E) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j.2.\pi.n.f_E.t}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 x_e(t) &= x(t) \cdot T_E \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_E) \\
 &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_E t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi n f_E t}
 \end{aligned}$$

Or  $y(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi n f_E t}$  correspond à l'expression d'un signal modulé en amplitude « sans porteuse » (DSBSC), dont le spectre est connu :  $Y(f) = X(f - n \cdot f_E)$ <sup>1</sup>. : le spectre de  $y(t)$  est le spectre de  $x(t)$  translaté de  $n \cdot f_E$ . Nous avons à faire en plus la somme de tous ces signaux pour toutes les fréquences de porteuse  $n \cdot f_E$ .



### L'ECHANTILLONNAGE TEMPOREL INTRODUIT UNE PERIODICITE DU SPECTRE

#### -3- Reconstitution du signal - Théorème de Shannon

Problème : comment reconstituer le signal initial  $x(t)$  à partir du signal échantillonné  $x_e(t)$  ? Il suffit d'utiliser un filtre passe-bas (dont la réponse est indiquée en tirets ci-dessus) de

---

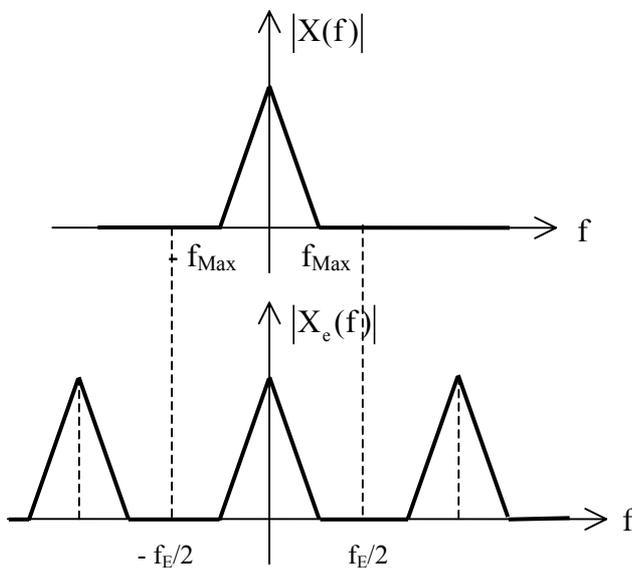
<sup>1</sup>  $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi n f_E t} \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi (f - n \cdot f_E) t} \cdot dt = X(f - n \cdot f_E)$  CQFD

fréquence de coupure  $f_C$  telle que :  $f_{Max} < f_C < f_E - f_{Max}$ . Cette relation suppose que l'échantillonnage a été fait correctement, c'est à dire que :

$$f_{Max} < f_E - f_{Max} \Rightarrow \boxed{2 \cdot f_{Max} < f_E}$$

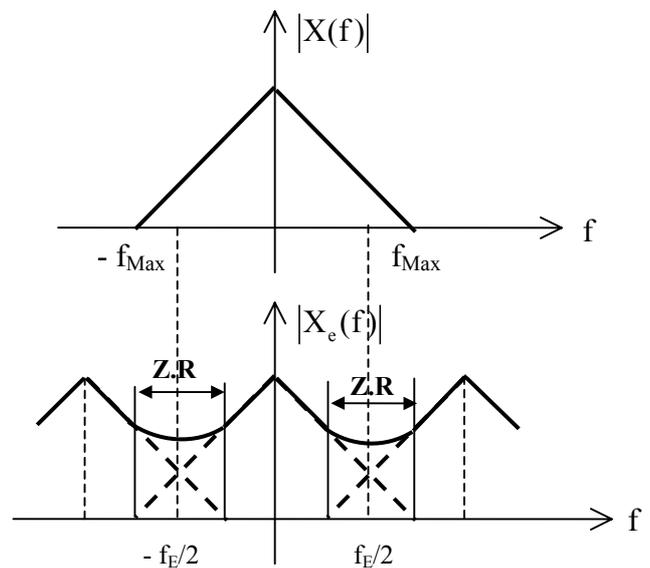
Cette relation est connue sous le nom de théorème de Shannon.

**Théorème de Shannon**<sup>2</sup>: l'échantillonnage est correct, c'est à dire sans perte d'information, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure au double de la fréquence maximale du spectre du signal.



Echantillonnage correct :  
(sans perte d'information)

$$\frac{f_E}{2} > f_{Max}$$



Echantillonnage non correct :  
perte de l'information dans les  
zones de recouvrement (Z.R.)

$$\frac{f_E}{2} < f_{Max}$$

#### -4- Repliement de spectre

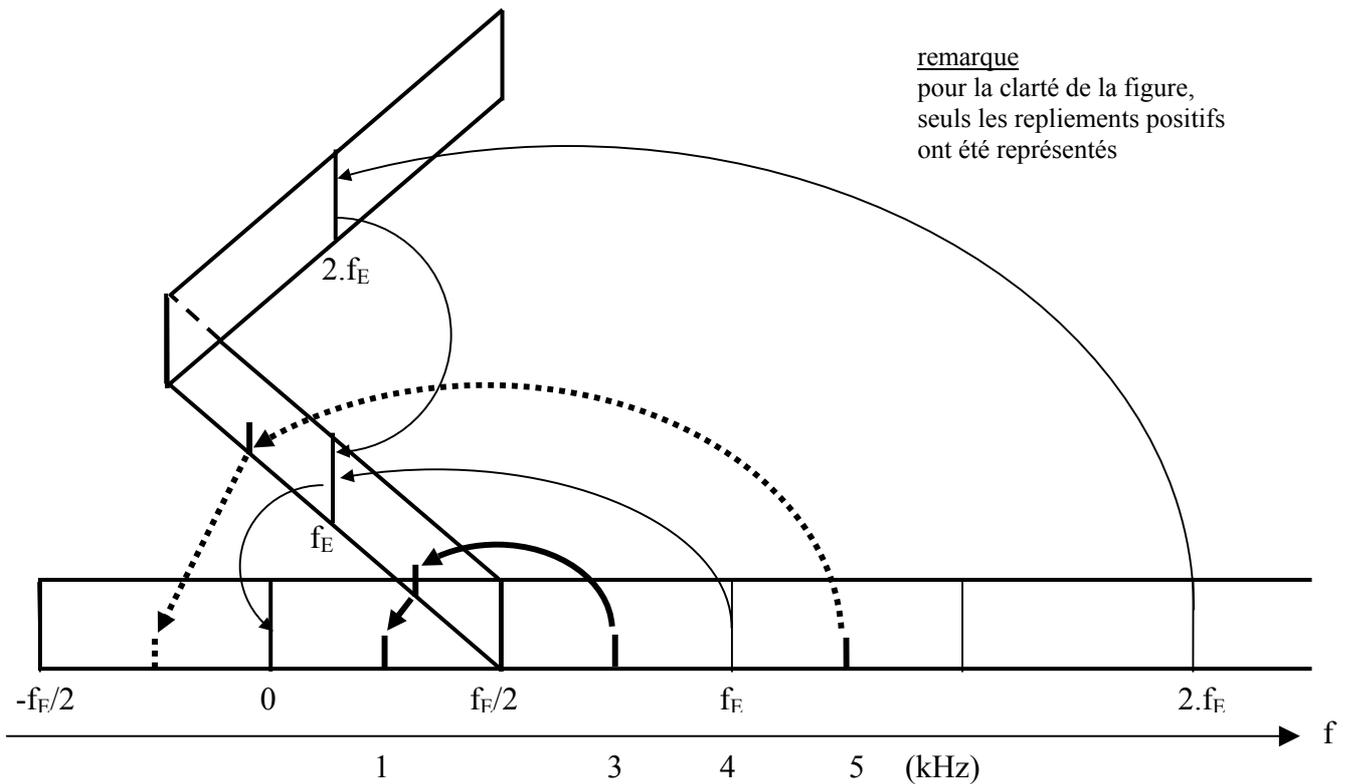
On parle souvent de repliement de spectre (« aliasing » en anglais).

Plaçons nous du côté « récepteur » : on reçoit un signal échantillonné (par exemple on écoute un CD). On suppose à priori que l'échantillonnage a été fait correctement en respectant le théorème de Shannon. Pour obtenir le signal initial (l'information)  $x(t)$ , on utilise un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_C = \frac{f_E}{2}$ .

<sup>2</sup> Quelques dates :      FOURIER : né en 1768 et mort en 1830  
                                 SHANNON : né en 1916 et mort en 2001 !

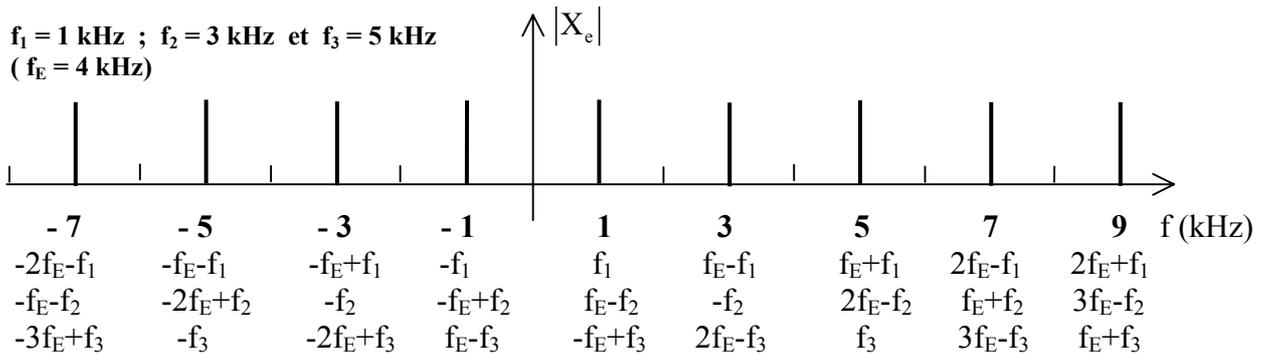


Toutes les raies du spectre de  $x(t)$  sont ramenées dans l'intervalle  $\left[-\frac{f_E}{2}; \frac{f_E}{2}\right]$ , comme on plie une bande de papier.



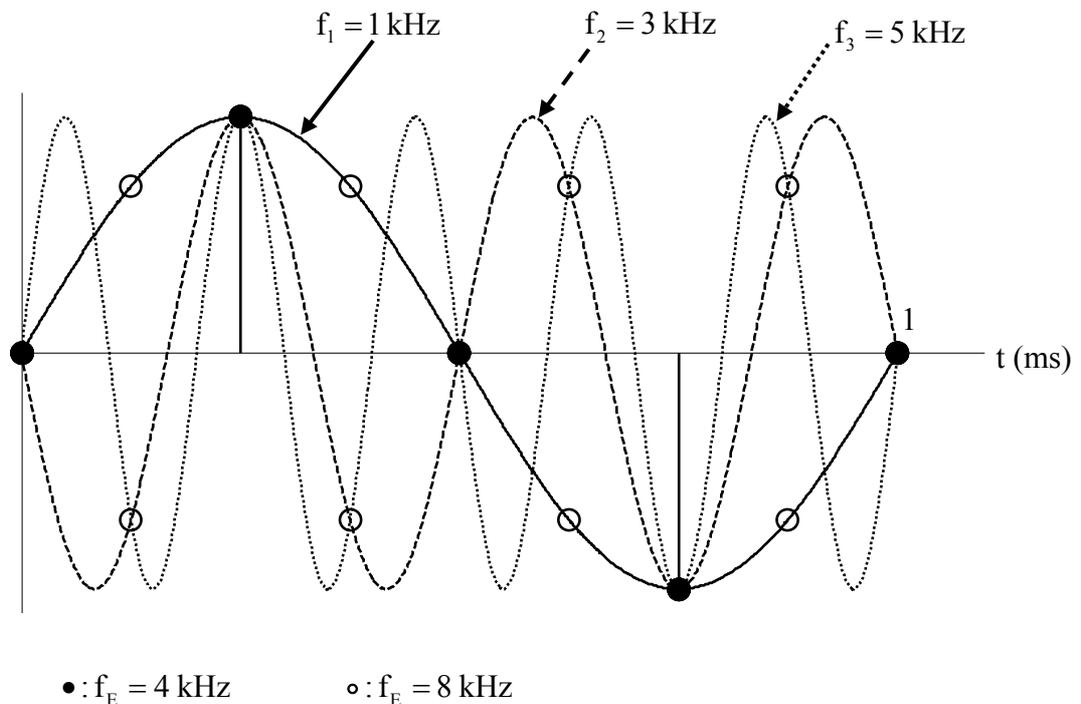
### -6- Interprétation physique

La figure ci-dessus montre que des signaux sinusoïdaux de fréquence 1 kHz, 3 kHz ou 5 kHz, échantillonnés à 4 kHz, redonneront par repliement de spectre le même signal : la figure ci-dessous donne la décomposition spectrale de chaque signal échantillonné.



Les décompositions spectrales sont les mêmes (donc les signaux sont les mêmes), seul l'ordre dans lequel on retrouve les raies est modifié. On ne respecte le théorème de Shannon que pour la fréquence  $f_1$  : on trouve les raies dans un ordre « normal ».

La figure ci-dessous donne une interprétation du théorème de Shannon dans le domaine temporel.

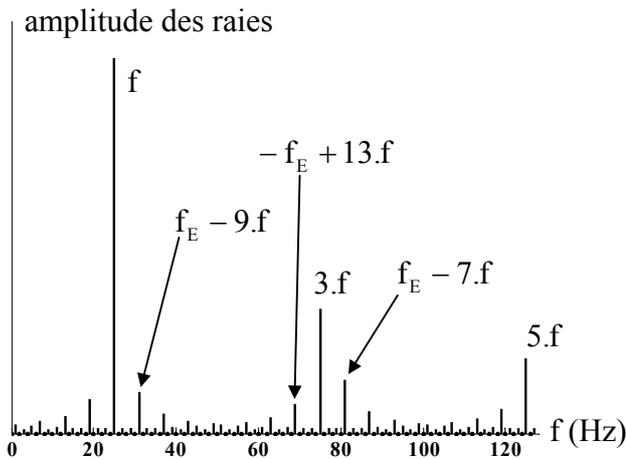


On constate que les échantillons (points noirs) sont les mêmes : il est donc impossible de savoir à priori si le signal correspond à une sinusoïde de 1 kHz, ou 3 kHz ou 5 kHz échantillonnée à 4 kHz.

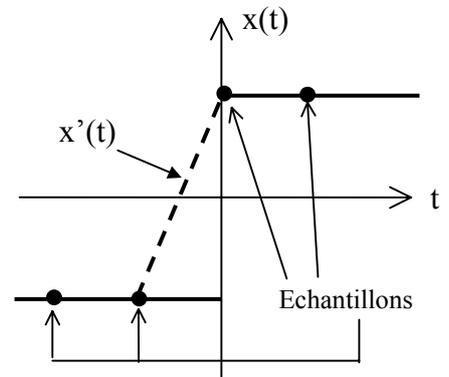
Pour distinguer les sinusoïdes à 1 et 3 kHz, il faudrait deux fois plus d'échantillons (cercles blancs supplémentaires), c'est à dire choisir  $f_E = 8 \text{ kHz}$  ( $f_2 = 3 \text{ kHz} < f_E / 2$ ). Mais il est toujours impossible de distinguer 3 et 5 kHz ( $f_3 = 5 \text{ kHz}$  toujours  $> f_E / 2 = 4 \text{ kHz}$ )

Deuxième exemple : prenons un signal à variations rapides (donc à spectre très étalé :  $f_{\text{Max}} \rightarrow \infty$ , pour lequel il est impossible de respecter en toute rigueur le théorème de Shannon), un signal carré par exemple. La figure ci-dessous représente le spectre d'un signal carré de fréquence 25 Hz échantillonné à 256 Hz.  
Interprétation temporelle : a-t-on échantillonné le signal  $x(t)$  ou le signal  $x'(t)$  ?

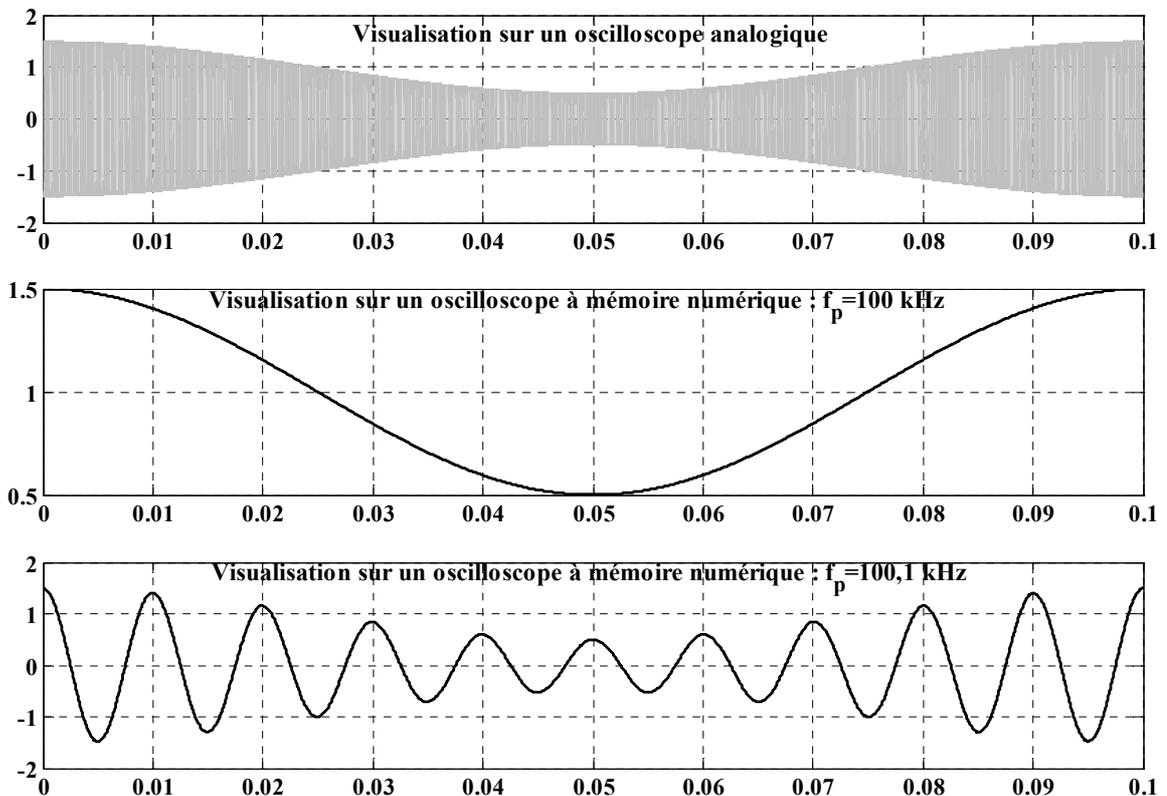
**Spectre d'un signal carré  
( $f = 25$  Hz) échantillonné à 256 Hz**



**Interprétation  
temporelle**



Dernier exemple : oscilloscope à mémoire numérique. On cherche à visualiser sur cet oscilloscope un signal modulé en amplitude  $e(t) = [1 + 0,5 \cdot \cos(\omega_i \cdot t)] \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$  où  $f_i = 10$  Hz et  $f_p \approx 100$  kHz (voir TP) ; on synchronise l'oscilloscope sur l'information de basse fréquence et on choisit une base de temps de 10 ms/div. Le réglage de la base de temps se fait en modifiant la fréquence d'échantillonnage : pour l'oscilloscope Tektronix, la mémoire stocke 2 000 points :  $T_E = \frac{10 \text{ (ms/div)} \times 10 \text{ (div)}}{2000} = 50 \mu\text{s}$  (soit  $f_E = 20$  kHz). On observe les oscillogrammes suivants :



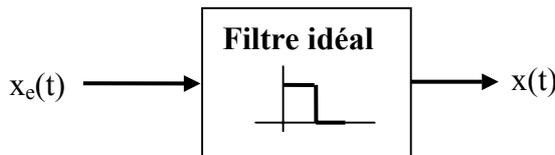
Par exemple pour le deuxième cas, les raies à 100 kHz, 99,99 kHz et 100,01 kHz, se retrouvent, après repliement, aux fréquences  $100-5 \times 20 = 0$  kHz,  $99,99-5 \times 20 = -0,01$  kHz et  $100,01-5 \times 20 = 0,01$  kHz. On visualise une sinusoïde de fréquence 0,01 kHz = 10 Hz et une composante continue (sans s'apercevoir qu'il s'agit de modulation d'amplitude !).

**-7- Exemples de valeurs numériques**

- Pour le cinéma :  $f_E = 24$  Hz (24 images par seconde). Si la roue du chariot dans un western tourne à une vitesse de 24 tr/s ( $f = 24$  Hz), on la voit immobile à la projection. C'est également ce qui est utilisé pour mesurer la vitesse de rotation d'un moteur pare stroboscopie.
- Pour les CD, il faut une qualité HiFi. Les signaux ont un spectre compris entre 20 Hz et 20 kHz. On a choisi  $f_E = 44,1$  kHz ( $> 2 \times 20$  kHz)

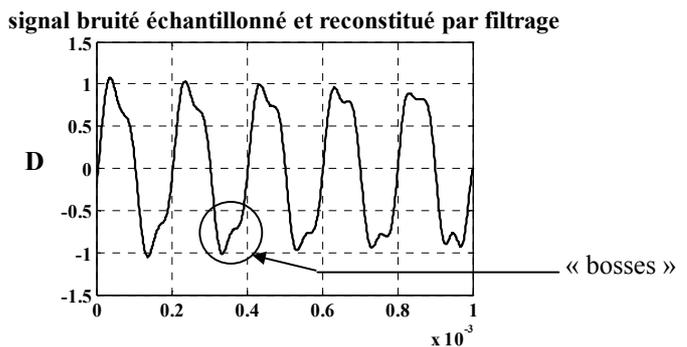
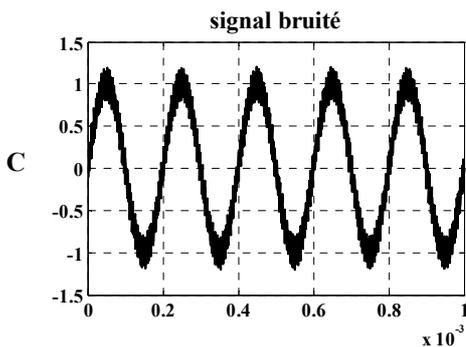
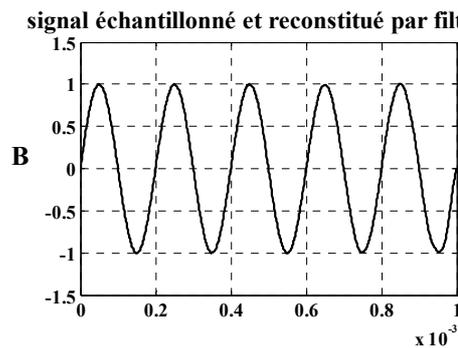
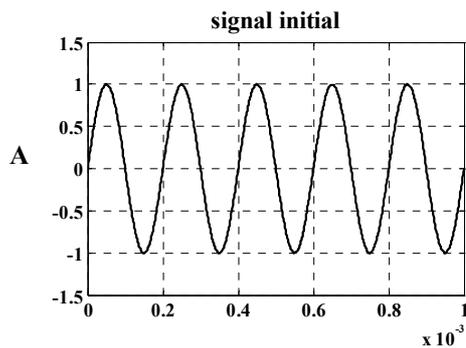
**IV/ FILTRE D'ANTIREPLIEMENT (« Anti aliasing filter »)**

Afin de comprendre l'utilité de ce filtre, supposons qu'on enregistre un CD ( $f_E = 44,1$  kHz) et que le signal enregistré ait une fréquence de 5 kHz. Une fois le CD enregistré, à la lecture un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure  $f_E/2$  permet de reconstituer le signal initial :



Le résultat est donné ci-dessous (figures A et B).

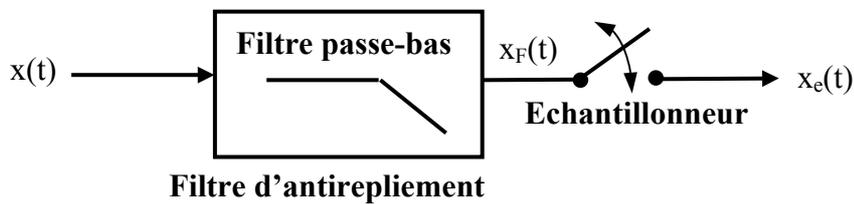
Malheureusement, au moment de l'enregistrement, un bruit à 1,25 MHz est venu se superposer au signal enregistré. On peut se dire que cela ne présente aucun inconvénient car un bruit à 1,25 MHz est inaudible. Les figures C et D montrent le signal bruité et le signal reconstitué.



On voit que le signal reconstitué présente de fortes distorsions : le bruit à 1,25 MHz, après échantillonnage et par repliement de spectre se retrouve dans la bande de fréquences audibles :  $f_{\text{Bruit}} - 28.f_E = 15,2 \text{ kHz} \approx 3.f$  (d'où les « bosses »). Le 28<sup>ème</sup> repliement est aussi important que le premier (ou que le 94<sup>ème</sup> !).

Il faut donc éviter ce genre de situation, et il faut **absolument respecter le théorème de Shannon** en filtrant le signal à échantillonner.

**Avant d'échantillonner, on filtre le signal analogique par un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_C = f_E/2$ , appelé filtre d'antirepliement.**



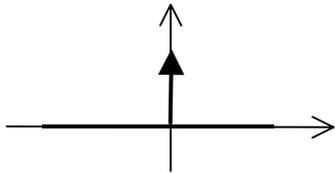
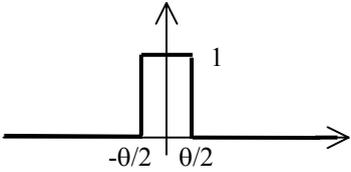
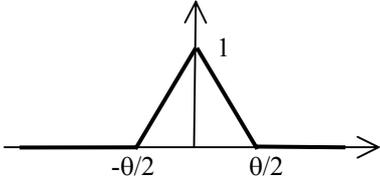
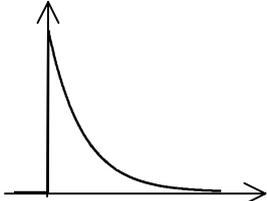
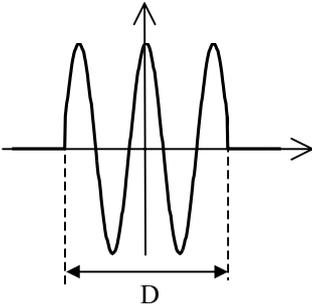
...Annexes...

**ANNEXES**

**-1- Signaux périodiques : séries de Fourier**

$x(t)$		$X_n$
$e^{j.2.\pi.f_0.t}$		$X_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n \neq 1 \end{cases}$
$\cos(2.\pi.f_0.t)$		$X_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } n = \pm 1 \\ 0 & \text{pour } n \neq \pm 1 \end{cases}$
$\sin(2.\pi.f_0.t)$		$X_n = \begin{cases} \frac{1}{2.j} & \text{pour } n = 1 \\ \frac{-1}{2.j} & \text{pour } n = -1 \\ 0 & \text{pour } n \neq \pm 1 \end{cases}$
Triangle		$X_{2.k} = 0$ $X_{2.k+1} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2.k+1)^2}$
Carré		$X_{2.k} = 0$ $X_{2.k+1} = -j \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2.k+1}$
Suite périodique d'impulsions de largeur $\theta$		$X_n = \frac{\theta}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(n.\pi \cdot \frac{\theta}{T_0}\right)}{n.\pi \cdot \frac{\theta}{T_0}}$
peigne de Dirac $p(t) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - k.T_0)$		$X_n = 1 \quad \forall n$

**-2- Signaux non périodiques : Transformées de Fourier**

$x(t)$		$X(f)$
Signal constant $x(t) = 1 \quad \forall t$		$X(f) = \delta(f)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$		$\Delta(f) = 1 \quad \forall f$
Fonction porte $\Pi_\theta(t)$ (impulsion de largeur $\theta$ )		$X(f) = \theta \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \theta)}{\pi \cdot f \cdot \theta}$
Fonction triangle $\Lambda_\theta(t)$		$X(f) = \frac{\theta}{2} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot f \cdot \frac{\theta}{2}\right)}{\pi \cdot f \cdot \frac{\theta}{2}} \right]^2$
Exponentielle (« causale ») $x(t) = e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$ ( $u(t)$ = échelon unité)		$X(f) = \frac{1}{a + 2 \cdot \pi \cdot j \cdot f}$
Sinusoïde limitée dans le temps $x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \Pi_D(t)$		$X(f) = \frac{D}{2} \cdot \left\{ \frac{\sin\left[2 \cdot \pi \cdot (f_0 - f) \cdot \frac{D}{2}\right]}{2 \cdot \pi \cdot (f_0 - f) \cdot \frac{D}{2}} + \frac{\sin\left[2 \cdot \pi \cdot (f_0 + f) \cdot \frac{D}{2}\right]}{2 \cdot \pi \cdot (f_0 + f) \cdot \frac{D}{2}} \right\}$