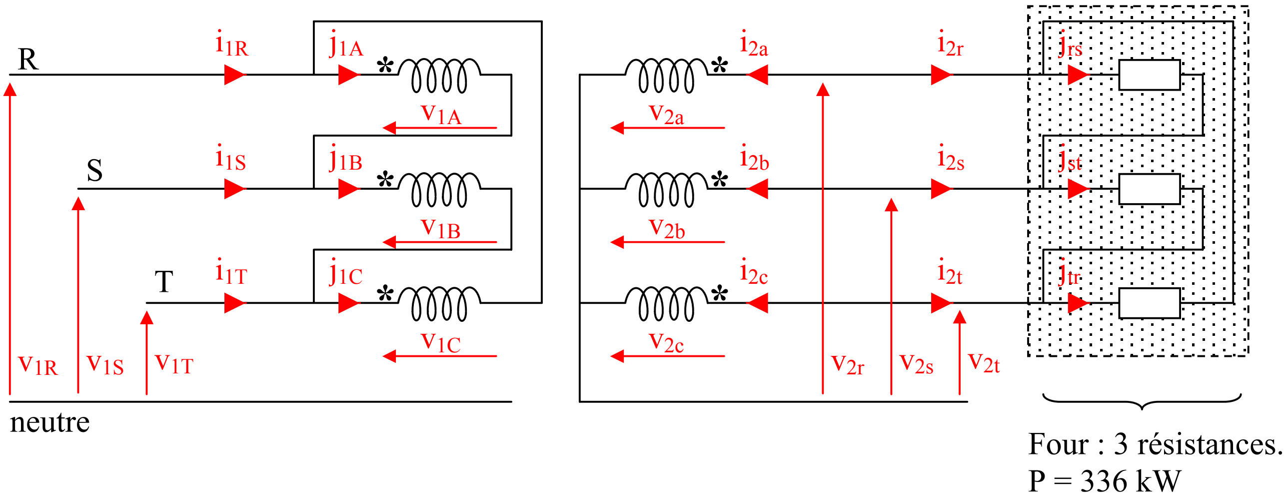
Corrigé de : Chapitre7. Exercice 1
« Montage triphasé avec trois transformateurs monophasés »

a)



Voir les diagrammes de Fresnel à la fin

Pour faire les calculs en complexe, nous choisissons de prendre $v_{1R}(t)$ comme origine des phases et de prendre la valeur efficace comme module des grandeurs complexes tensions et courants :

$$v_{1R}(t)=\frac{10000.\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\cos(\omega.t) \Rightarrow \underline{V_{1R}}=\frac{10000}{\sqrt{3}}.e^{j.0}=V_1$$

De façon à simplifier l'écriture des grandeurs triphasées, alternatives sinusoïdales équilibrées, nous noterons « a » le nombre complexe $a=1.e^{j\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit :

$$\begin{pmatrix}\underline{V_{1R}}\\ \underline{V_{1S}}\\ \underline{V_{1T}}\end{pmatrix}=V_1.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\underline{V_{1A}}\\ \underline{V_{1B}}\\ \underline{V_{1C}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{V_{1R}}-\underline{V_{1S}}\\ \underline{V_{1S}}-\underline{V_{1T}}\\ \underline{V_{1T}}-\underline{V_{1R}}\end{pmatrix}=V_1.\begin{pmatrix}1-a^2\\ a^2-a\\ a-1\end{pmatrix}=V_1.\left(1-a^2\right).\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix}=V_1.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}}.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix}$$

Les transformateurs étant considérés idéaux, leur rapport de transformation est donc $m=\frac{224}{10000}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\underline{V_{2a}}\\ \underline{V_{2b}}\\ \underline{V_{2c}}\end{pmatrix}=-m.\begin{pmatrix}\underline{V_{1A}}\\ \underline{V_{1B}}\\ \underline{V_{1C}}\end{pmatrix}\text{, et donc }\begin{pmatrix}\underline{V_{2r}}\\ \underline{V_{2s}}\\ \underline{V_{2t}}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\underline{V_{2a}}\\ \underline{V_{2b}}\\ \underline{V_{2c}}\end{pmatrix}=m.\begin{pmatrix}\underline{V_{1A}}\\ \underline{V_{1B}}\\ \underline{V_{1C}}\end{pmatrix}=m.V_1.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}}.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix}$$

Les trois transformateurs ci-dessus sont donc couplés en Dy11.

Le four est constitué de trois résistances « R » traversées par des courants de valeur efficace

$$I_{2r_{eff}} = \frac{P}{3.V_{2r_{eff}}} = \frac{336.10^3}{3.224} = 500\ A.$$

Le four étant une charge résistive triphasée équilibrée soumise à des tensions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées. Les courants dans sa ligne sont en phase avec les tensions simples qui l'alimentent.

$$\begin{pmatrix} \underline{I_{2r}} \\ \underline{I_{2s}} \\ \underline{I_{2t}} \end{pmatrix} = 500.e^{j\frac{\pi}{6}}.\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \underline{I_{2a}} \\ \underline{I_{2b}} \\ \underline{I_{2c}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{J_{1A}} \\ \underline{J_{1B}} \\ \underline{J_{1C}} \end{pmatrix} = -m.\begin{pmatrix} \underline{I_{2a}} \\ \underline{I_{2b}} \\ \underline{I_{2c}} \end{pmatrix} = m.500.e^{j\frac{\pi}{6}}.\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I_{1R}} \\ \underline{I_{1S}} \\ \underline{I_{1T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J_{1A}} - \underline{J_{1C}} \\ \underline{J_{1B}} - \underline{J_{1A}} \\ \underline{J_{1C}} - \underline{J_{1B}} \end{pmatrix} = m.500.e^{j\frac{\pi}{6}}.\begin{pmatrix} 1-a \\ a^2-1 \\ a-a^2 \end{pmatrix} = m.500.e^{j\frac{\pi}{6}}.(1-a).\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

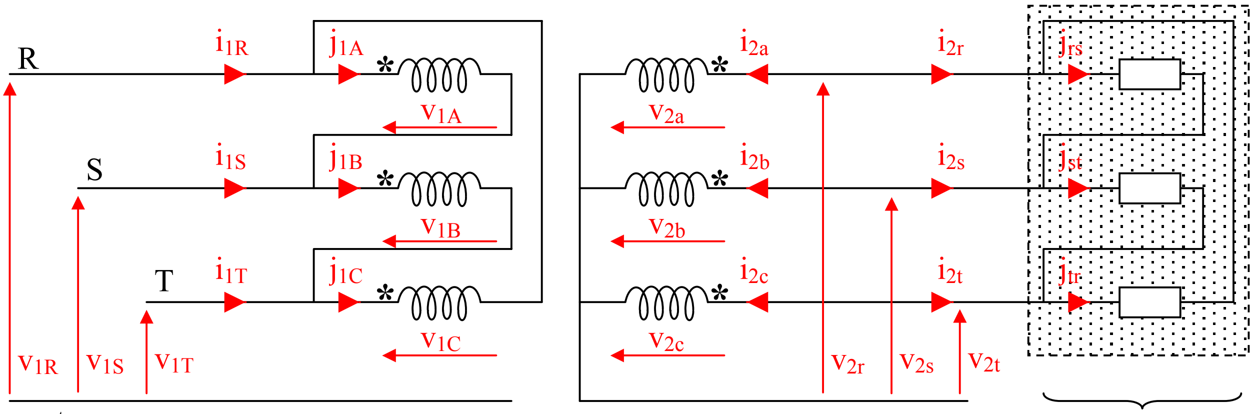
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I_{1R}} \\ \underline{I_{1S}} \\ \underline{I_{1T}} \end{pmatrix} = m.500.e^{j\frac{\pi}{6}}.\left(\sqrt{3}.e^{-j\frac{\pi}{6}}\right).\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = m.500.\sqrt{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = 19{,}4.\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow i_{1R}(t) = 19{,}4.\sqrt{2}.\cos(\omega.t)$$

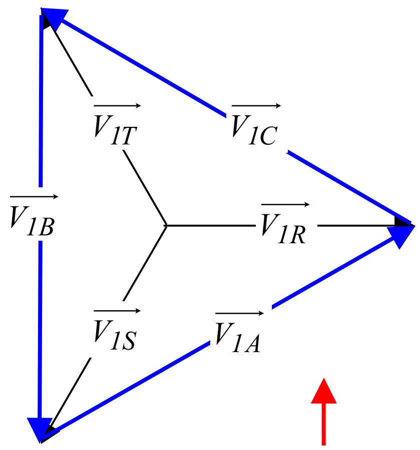
Remarque : On peut retrouver ces résultats en considérant la conservation de la puissance active et de la puissance réactive : Les trois transformateurs étant considérés idéaux, ils ne consomment aucune puissance active ou réactive. La puissance active (336 kW) et la puissance réactive (0 VAR) de la charge est donc égale à la puissance active et réactive fournies par la ligne triphasée.

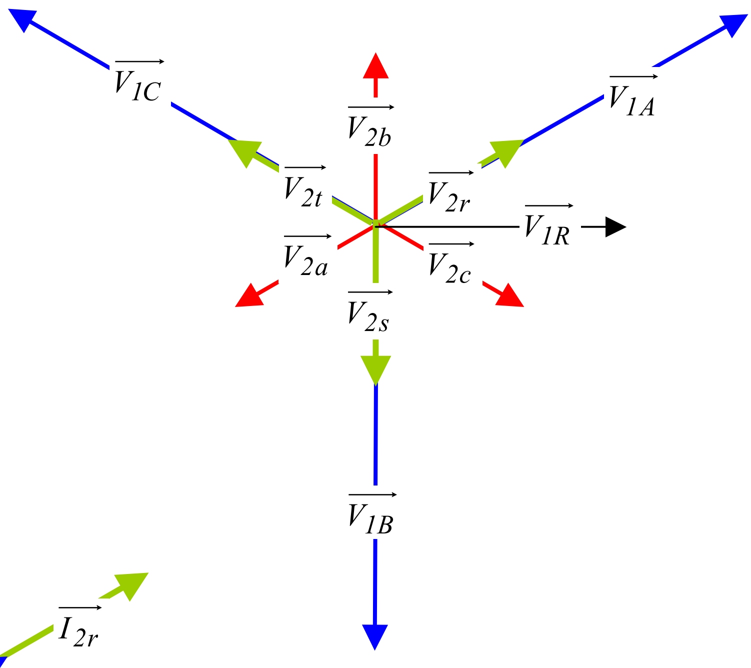
La puissance réactive étant nulle, les courants de ligne sont en phase avec les tensions simples.

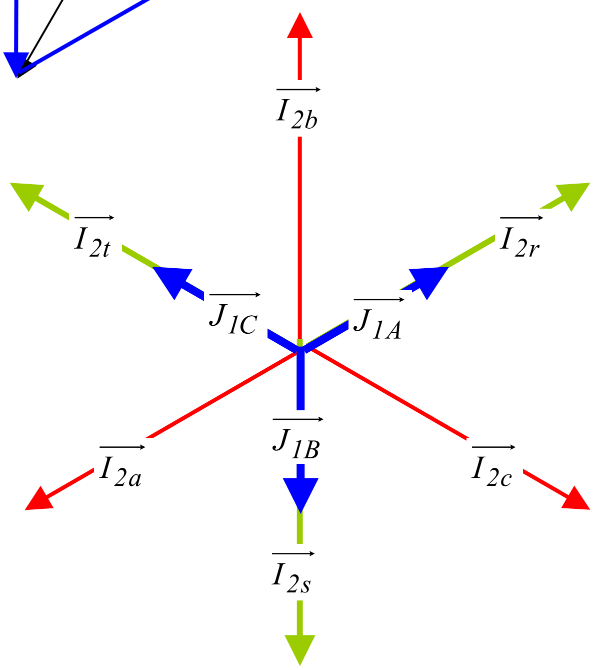
Et la valeur efficace des courants de ligne est de $\frac{336.10^3}{10000.\sqrt{3}} = 19{,}4\ A$

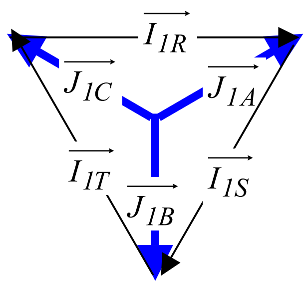


Four : 3 résistances.
P = 336 kW

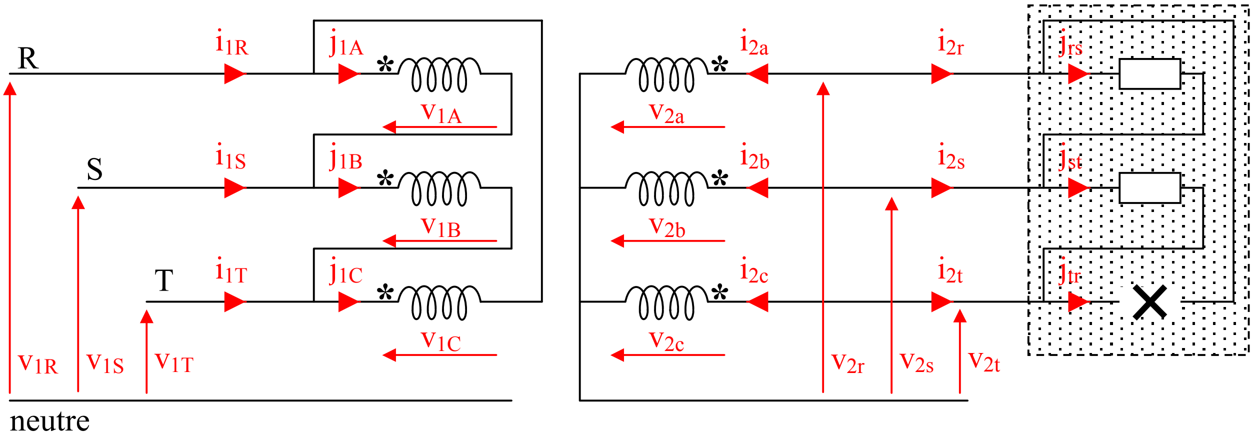








b)



Les tensions sont inchangées :

$$\begin{pmatrix}\underline{V_{1R}}\\ \underline{V_{1S}}\\ \underline{V_{1T}}\end{pmatrix} = V_1 \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}\underline{V_{1A}}\\ \underline{V_{1B}}\\ \underline{V_{1C}}\end{pmatrix} = V_1 \,.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}\underline{V_{2r}}\\ \underline{V_{2s}}\\ \underline{V_{2t}}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\underline{V_{2a}}\\ \underline{V_{2b}}\\ \underline{V_{2c}}\end{pmatrix} = m.V_1 \,.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ a\end{pmatrix}$$

Les tensions aux bornes du four étant inchangées, les courants dans les deux résistances « R » encore en service sont inchangés :

$$\begin{pmatrix}\underline{J_{rs}}\\ \underline{J_{st}}\\ \underline{J_{tr}}\end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix}\underline{V_{2r}} - \underline{V_{2s}}\\ \underline{V_{2s}} - \underline{V_{2t}}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{m.V_1 \,.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}}}{R} \,.\begin{pmatrix}1-a^2\\ a^2 - a\\ 0\end{pmatrix} = \frac{m.V_1 \,.\sqrt{3}.e^{j\frac{\pi}{6}}.\left(1-a^2\right)}{R} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ 0\end{pmatrix} = \frac{3.m.V_1 \,.e^{j\frac{\pi}{3}}}{R} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ 0\end{pmatrix}$$

La valeur efficace des courants dans les résistances non supprimées est inchangée par rapport au cas précédent. Cette valeur est de $\frac{500}{\sqrt{3}}\,A$

Donc $\begin{pmatrix}\underline{J_{rs}}\\ \underline{J_{st}}\\ \underline{J_{tr}}\end{pmatrix} = \frac{500 \,.e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}\underline{I_{2r}}\\ \underline{I_{2s}}\\ \underline{I_{2t}}\end{pmatrix} = \frac{500}{\sqrt{3}}.e^{j\frac{\pi}{3}} \,.\begin{pmatrix}1-0\\ a^2 - 1\\ 0 - a^2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\underline{I_{2a}}\\ \underline{I_{2b}}\\ \underline{I_{2c}}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\underline{J_{1A}}\\ \underline{J_{1B}}\\ \underline{J_{1C}}\end{pmatrix} = -\,m.\begin{pmatrix}\underline{I_{2a}}\\ \underline{I_{2b}}\\ \underline{I_{2c}}\end{pmatrix} = m.\frac{500 \,.e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2 - 1\\ -a^2\end{pmatrix} = 6{,}466.e^{j\frac{\pi}{3}} \,.\begin{pmatrix}1\\ a^2 - 1\\ -a^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I_{1R}} \\ \underline{I_{1S}} \\ \underline{I_{1T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J_{1A}} - \underline{J_{1C}} \\ \underline{J_{1B}} - \underline{J_{1A}} \\ \underline{J_{1C}} - \underline{J_{1B}} \end{pmatrix} = 6{,}466.e^{j\frac{\pi}{3}} . \begin{pmatrix} 1 + a^2 \\ a^2 - 2 \\ -2.a^2 + 1 \end{pmatrix} = 6{,}466.e^{j\frac{\pi}{3}} . \begin{pmatrix} 1.e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ 1.e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 2 \\ -2.e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I_{1R}} \\ \underline{I_{1S}} \\ \underline{I_{1T}} \end{pmatrix} = 6{,}466.e^{j\frac{\pi}{3}} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \\ 1 + j.\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}466 \\ 17{,}1.e^{-j\,1{,}76} \\ 17{,}1.e^{+j\,1{,}76} \end{pmatrix}$$

Remarque : On vérifie bien que $\underline{I_{1R}} + \underline{I_{1S}} + \underline{I_{1T}} = 0$ (loi des nœuds).

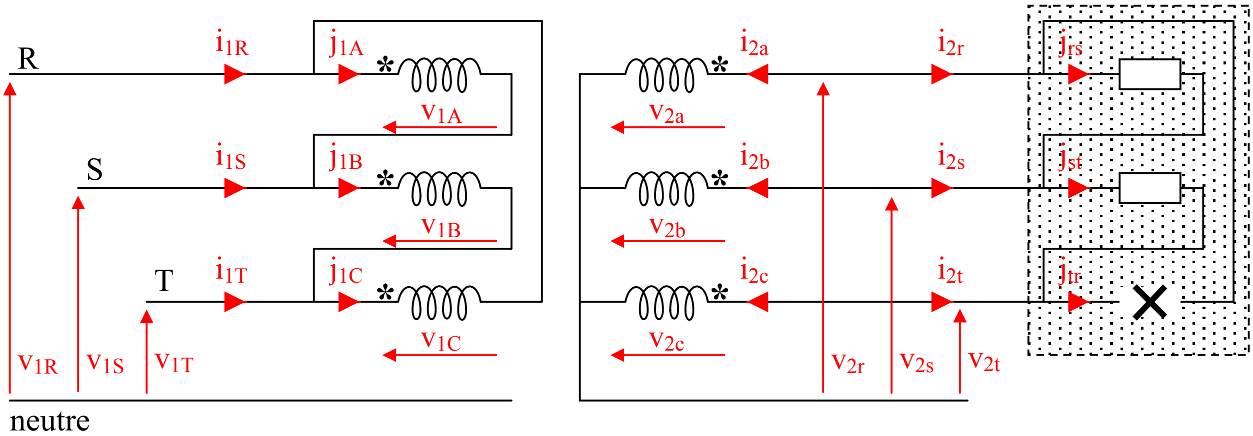
On vérifie également que la puissance active dans la charge ($\frac{2}{3}.336 = 224\ kW$) est bien égale à la puissance active fournie par la source triphasée : $P = \Re\left(\underline{V_{1R}}.\underline{I_{1R}}^* + \underline{V_{1S}}.\underline{I_{1S}}^* + \underline{V_{1T}}.\underline{I_{1T}}^*\right)$:

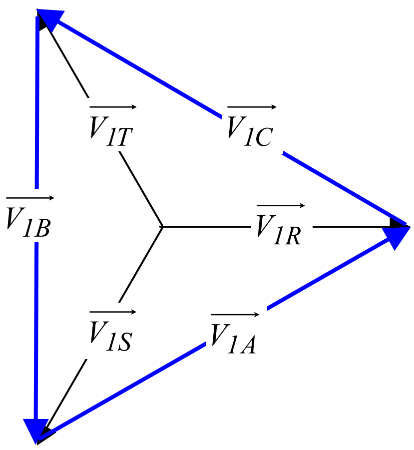
$$P = \Re\left(\frac{10000}{\sqrt{3}} . 6{,}466 + \frac{10000}{\sqrt{3}}.e^{-j\frac{2\pi}{3}} . 17{,}1.e^{j\,1{,}76} + \frac{10000}{\sqrt{3}}.e^{j\frac{2\pi}{3}} . 17{,}1.e^{-j\,1{,}76} \right) = 224kW$$

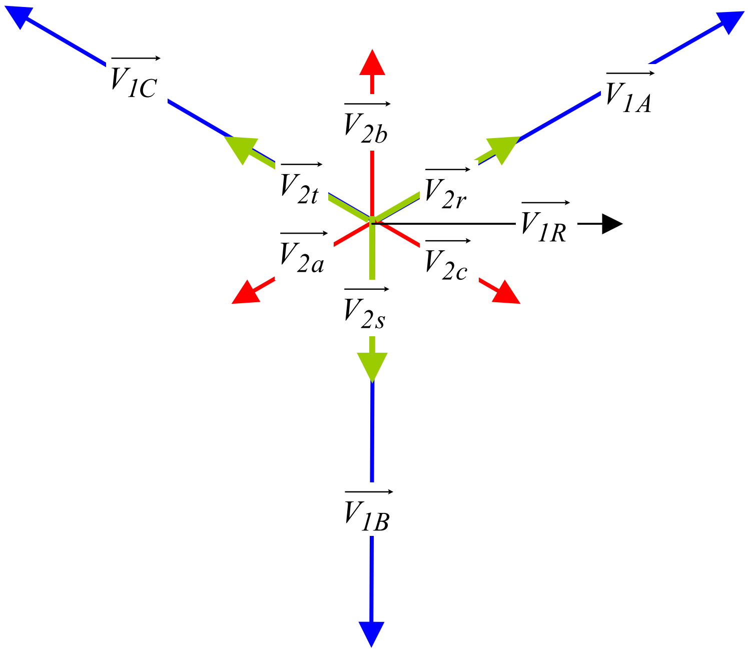
On vérifie également que la puissance réactive dans la charge ($0VAR$) est bien égale à la puissance réactive fournie par la source triphasée : $Q = \Im m\left(\underline{V_{1R}}.\underline{I_{1R}}^* + \underline{V_{1S}}.\underline{I_{1S}}^* + \underline{V_{1T}}.\underline{I_{1T}}^*\right)$:

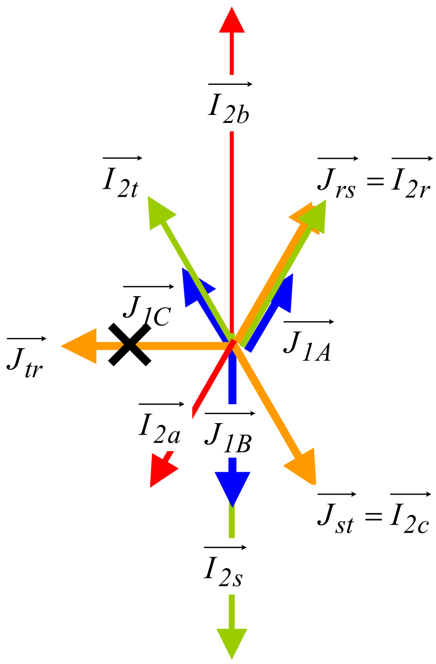
$$Q = \Im m\left(\frac{10000}{\sqrt{3}} . 6{,}466 + \frac{10000}{\sqrt{3}}.e^{-j\frac{2\pi}{3}} . 17{,}1.e^{j\,1{,}76} + \frac{10000}{\sqrt{3}}.e^{j\frac{2\pi}{3}} . 17{,}1.e^{-j\,1{,}76} \right) = 0\ VAR$$

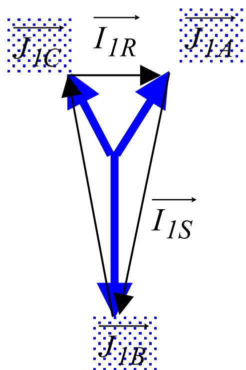
On peut également résoudre ce genre de problème en utilisant les vecteurs de Fresnel. *(voir ci-après)*


R
S
T
neutre
i1R
i1S
i1T
j1A
j1B
j1C
v1A
v1B
v1C
v1R
v1S
v1T
i2a
i2b
i2c
v2a
v2b
v2c
i2r
i2s
i2t
v2r
v2s
v2t
jrs
jst
jtr


V1T
V1C
V1B
V1R
V1S
V1A


V1C
V2b
V1A
V2t
V2r
V1R
V2a
V2c
V2s
V1B


I2b
I2t
Jrs = I2r
J1C
Jtr
J1A
I2a
J1B
Jst = I2c
I2s


J1C
I1R
J1A
I1S
J1B