Corrigé de : Chapitre4. Exercice 3 « Energie emmagasinée dans un circuit magnétique »

1-a) La résistance interne du bobinage étant négligée, les pertes joule ne sont pas prises en compte.

Les pertes fer s'expriment par la relation :
P_{fer} = V.A.f = (**V**olume du circuit magnétique:**V**).(**A**ire du cycle:**A**).(**f**réquence:**f**).

Avec la modélisation du cycle d'hystérésis adoptée, l'aire du cycle est nulle, donc les pertes fer ne sont pas prises en compte.

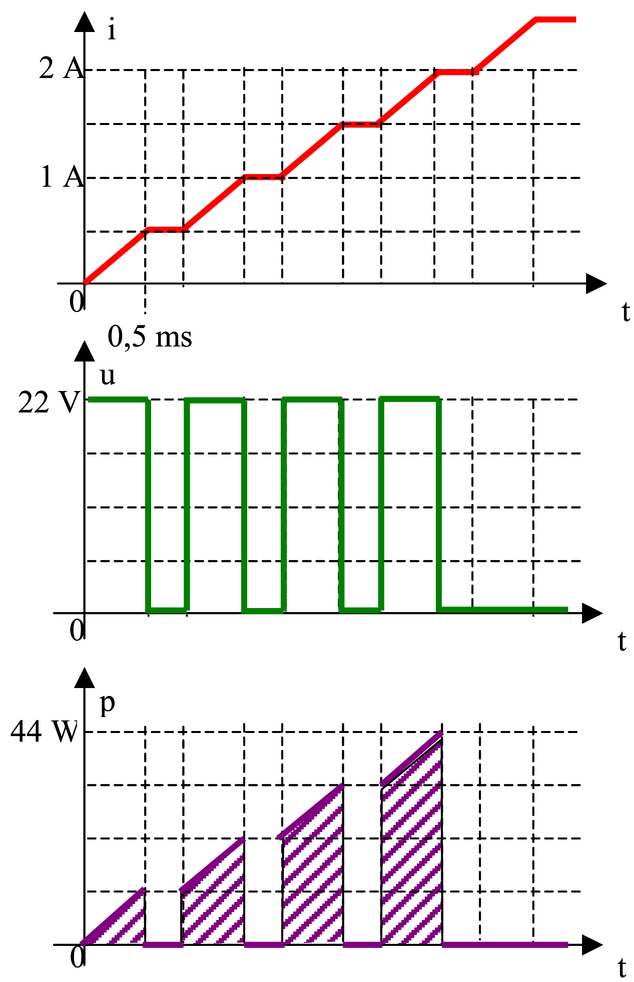
Le dispositif (bobine + circuit magnétique) est donc supposé sans pertes.

1-b) D'après le théorème d'Ampère : $N.I_{sat} = H_{sat}.\ell \;\Leftrightarrow\; I_{sat} = \dfrac{H_{sat}.\ell}{N} = \dfrac{800\,.\,0{,}25}{100} = 2\ A$

1-c) Compte tenu des orientations : $u(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt} = \dfrac{d(N.\varphi(t))}{dt} = \dfrac{d(N.S.B(t))}{dt} = \dfrac{d(N.S.B(t))}{dt} = \dfrac{d(N.S.\mu.H(t))}{dt}$

avec $\mu = \dfrac{B}{H} = \dfrac{1{,}1}{800} = 1{,}375.10^{-3}\ SI$

$$u(t) = \frac{d\left(N.S.\mu.\dfrac{N.i(t)}{\ell}\right)}{dt} = N^2.\frac{S.\mu}{\ell}.\frac{d(i(t))}{dt} = 100^2.\frac{4.10^{-4}\ .\ 1{,}375.10^{-3}}{0{,}25}.\frac{d(i(t))}{dt} = 0{,}022\ .\ \frac{d(i(t))}{dt}$$



Lorsque $\dfrac{d(i(t))}{dt} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5.10^{-3}} = 1000\ A/s$:

$u(t) = 0{,}022\ .\ 1000 = 22\ V$.

Lorsque $\dfrac{d(i(t))}{dt} = 0$: $u(t) = 0$.

Lorsque $i(t)$ dépasse I_{sat}, le flux dans le circuit magnétique est constant (le circuit magnétique est saturé) et la tension est nulle.

1-d) La puissance instantanée est $p(t) = u(t).i(t)$

Sur un intervalle $[to,t1]$ l'énergie électrique s'exprime par $W_{[to,t1]} = \int_{to}^{t1} p(t).dt$. C'est également l'aire sous la courbe $p(t)$ sur l'intervalle $[to,t1]$.

Dans le cas considéré, l'aire sous la courbe est celle d'un triangle de base $0{,}5\ .\ 4 = 2\ ms$ et de hauteur $44\ W$.

Donc l'énergie maximum est $\dfrac{44\ .\ 2.10^{-3}}{2} = 44\ mJ$.

On pouvait également raisonner à partir de la notion d'inductance : $u(t) = L \,.\, \dfrac{d\big(i(t)\big)}{dt}$ avec

$$L = \frac{N^2}{\Re} = \frac{N^2}{\dfrac{\ell}{\mu.S}} = \frac{100^2}{\dfrac{0{,}25}{1{,}375.10^{-3}.4.10^{-4}}} = 0{,}022\ H$$

et $W_{max} = \dfrac{1}{2}\,.\,L\,.I_{max}{}^2 = \dfrac{1}{2}\,.\,0{,}022\,.2^2 = 0{,}044\ J$.

1-e) $\dfrac{d\big(W(t)\big)}{dt} = u(t)\,.\,i(t)$

$$u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\big(N.\varphi(t)\big)}{dt} = \frac{d\big(N.S.B(t)\big)}{dt} = N.S.\frac{d\big(B(t)\big)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{H(t)\,.\,\ell}{N} = \frac{B(t)\,.\,\ell}{\mu\,.\,N}$$

$$\Rightarrow \frac{d\big(W(t)\big)}{dt} = N.S.\frac{d\big(B(t)\big)}{dt}\,.\,\frac{B(t)\,.\,\ell}{\mu\,.\,N} = \frac{S.\,\ell}{\mu}\,.\;B(t)\,.\,\frac{d\big(B(t)\big)}{dt} = \frac{S.\,\ell}{\mu}\,.\;\frac{1}{2}\,.\frac{d\big(B(t)^2\big)}{dt} = \frac{V}{2.\mu}\,.\frac{d\big(B(t)^2\big)}{dt}$$

Si les dérivées sont égales, les primitives sont égales à une constante près :

$$\Rightarrow W(t) = \frac{V}{2.\mu}.B(t)^2 + constante$$

Sachant que $W = 0$ lorsque $B = 0$, on en déduit qu'à chaque instant : $\boxed{W = \dfrac{V.B^2}{2.\mu}}$

Donc $W_{max} = \dfrac{V.B_{max}{}^2}{2.\mu} = \dfrac{0{,}25\ .\ 4.10^{-4}\ .\ 1{,}1^2}{2\ .\ 1{,}375.10^{-3}} = 0{,}044\ J$.

On retrouve bien le résultat précédent et on a montré que la relation $W = \dfrac{V.B^2}{2.\mu}$ est indépendante de la forme de $u(t)$ ou $i(t)$.

Relation à retenir *: En régime linéaire, l'énergie magnétique stockée dans un volume « V » est* $W = \dfrac{V.B^2}{2.\mu}$

2-a) Soit $\ell_{fer} = \ell - e$

$$\frac{d\big(W(t)\big)}{dt} = u(t)\,.\,i(t)$$

$$u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\big(N.\varphi(t)\big)}{dt} = \frac{d\big(N.S.B(t)\big)}{dt} = N.S.\frac{d\big(B(t)\big)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{H_{fer}(t)\,.\,\ell_{fer} + H_{entrefer}(t)\,.\,e}{N} = \frac{\dfrac{B(t)}{\mu}\,.\,\ell_{fer} + \dfrac{B(t)}{\mu o}(t)\,.\,e}{N} = B(t)\,.\,\frac{\dfrac{\ell_{fer}}{\mu} + \dfrac{e}{\mu o}}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{d\big(W(t)\big)}{dt} = N.S.\frac{d\big(B(t)\big)}{dt}\,.\,B(t)\,.\,\frac{\dfrac{\ell_{fer}}{\mu} + \dfrac{e}{\mu o}}{N} = \frac{S.\ell_{fer}}{\mu} + \frac{S.e}{\mu o}\,.\;B(t)\,.\,\frac{d\big(B(t)\big)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d(W(t))}{dt} = \left(\frac{V_{fer}}{\mu} + \frac{V_{entrefer}}{\mu o}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(B(t)^2\right)}{dt}$$

Si les dérivées sont égales, les primitives sont égales à une constante près :

$$\Rightarrow W(t) = \frac{V_{fer}}{2.\mu} .B(t)^2 + \frac{V_{entrefer}}{2.\mu o} .B(t)^2 + constante$$

Sachant que $W = 0$ lorsque $B = 0$, on en déduit qu'à chaque instant : $W = \frac{V_{fer}.B^2}{2.\mu} + \frac{V_{entrefer}.B^2}{2.\mu o}$

Avec $\frac{V_{fer}.B^2}{2.\mu}$: énergie magnétique stockée dans le matériau ferromagnétique

et $\frac{V_{entrefer}.B^2}{2.\mu o}$: énergie magnétique stockée dans l'entrefer

Donc $W_{max} = \frac{V_{fer}.B_{max}{}^2}{2.\mu} + \frac{V_{entrefer}.B_{max}{}^2}{2.\mu o}$.

D'après le théorème d'Ampère : $N.i = H_{fer}.\ell_{fer} + H_{entrefer}.e = \frac{B}{\mu}.\ell_{fer} + \frac{B}{\mu o}.e = B.\left(\frac{\ell_{fer}}{\mu} + \frac{e}{\mu o}\right)$

$$N.I_{sat} = B_{sat}.\left(\frac{\ell_{fer}}{\mu} + \frac{e}{\mu o}\right) \Leftrightarrow I_{sat} = \frac{B_{sat}}{N}.\left(\frac{\ell_{fer}}{\mu} + \frac{e}{\mu o}\right)$$

1-b) $W_{max} = \frac{V_{fer}.B_{max}{}^2}{2.\mu} + \frac{V_{entrefer}.B_{max}{}^2}{2.\mu o} = \frac{(0,25 - e).4.10^{-4}.1,1^2}{2.1,375.10^{-3}} + \frac{4.10^{-4}.e.1,1^2}{2.4.\pi.10^{-7}} = 0,044 + 192.e$

$$I_{sat} = \frac{B_{sat}}{N}.\left(\frac{\ell_{fer}}{\mu} + \frac{e}{\mu o}\right) = \frac{1,1}{100}.\left(\frac{0,25 - e}{1,375.10^{-3}} + \frac{e}{4.\pi.10^{-7}}\right) = 2 + 8745.e$$

$$L = \frac{N^2}{\Re_{eq}} = \frac{N^2}{\frac{\ell_{fer}}{\mu.S} + \frac{e}{\mu o.S}} = \frac{100^2}{\frac{0,25 - e}{1,375.10^{-3}.4.10^{-4}} + \frac{e}{4.\pi.10^{-7}.4.10^{-4}}} = \frac{1}{45,4 + 2.10^5.e}$$