

# ELECTROTECHNIQUE

Électromagnétisme

---

Michel PIOU

---

## Chapitre 5

### Bobines couplées magnétiquement

### Inductances mutuelles

Édition: 01/06/2010

Extrait de la ressource en ligne *MagnElecPro* sur le site Internet [iutenligne.net](http://iutenligne.net)

## Table des matières

1. POURQUOI ET COMMENT ?.....	1
2. BOBINES COUPLEES MAGNETIQUEMENT. INDUCTANCE MUTUELLE. ....	2
2.1 Exemple:.....	2
2.2 Conclusion:.....	4
2.3 Relation tension courant dans des bobines couplées.....	5
3. CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE.....	6
4. PROBLEMES ET EXERCICES.....	7
Chap 5. Exercice 1 : Circuit magnétique linéaire.....	7
Chap 5. Exercice 2 : Association de bobines.....	7
Chap 5. Exercice 3 : Circuit magnétique linéaire, inductance propre et inductance mutuelle.....	8
Chap 5. Exercice 4 : Mesure d'inductances.....	8
Chap 5. Exercice 5 : Inductances triphasées.....	9
5. REPOSES DU CHAPITRE INDUCTANCES MUTUELLES.....	10

### **Copyright : droits et obligations des utilisateurs**

Ce document est extrait de la ressource *MagnElecPro* qui est disponible en version numérique sur le site Internet *IUT en ligne*

Je ne renonce pas à ma qualité d'auteur et aux droits moraux qui s'y rapportent du fait de la publication de mon document.

Les utilisateurs sont autorisés à faire un usage non commercial, personnel ou collectif, de ce document et de la ressource *MagnElecPro*, notamment dans les activités d'enseignement, de formation ou de loisirs. Tout ou partie de cette ressource ne doit pas faire l'objet d'une vente - en tout état de cause, une copie ne peut pas être facturée à un montant supérieur à celui de son support.

Pour tout extrait de ce document, l'utilisateur doit maintenir de façon lisible le nom de l'auteur *Michel Piou*, la référence à *MagnElecPro* et au site Internet *IUT en ligne*.

Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes - FRANCE

## 1. POURQUOI ET COMMENT ?

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la façon de modéliser une bobine isolée dans l'espace, hors de toute influence magnétique extérieure.

Dans de nombreuses machines électrotechniques, les bobines ne sont pas isolées; elles s'influencent mutuellement par l'intermédiaire du champ d'induction magnétique que chacune d'elles crée dans son environnement

### **Prérequis :**

La maîtrise des chapitres 1, 2 et 4 est indispensable.

### **Objectifs :**

Afin de modéliser de façon simple ces influences réciproques, nous allons introduire la notion d'inductance mutuelle. Dans le chapitre suivant, ce nouveau concept sera exploité pour la modélisation des transformateurs. Par la suite, on le retrouvera dans la modélisation du comportement des moteurs électriques.

### **Méthode de travail :**

La notion de « modèle » sera encore au cœur de ce chapitre. La modélisation par « inductances mutuelles » n'utilise pas de concepts très nouveaux par rapport au chapitre précédent.

En fin de chapitre, le paragraphe intitulé “ ce que j'ai retenu de ce chapitre ” permettra de vérifier individuellement que les connaissances essentielles ont bien été acquises. Il ne faudra pas négliger ces quelques questions

### **Travail en autonomie :**

Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

## 2. BOBINES COUPLEES MAGNETIQUEMENT. INDUCTANCE MUTUELLE.

Considérons deux bobines placées à proximité l'une de l'autre.

Si on fait passer un courant dans la première, la seconde sera soumise à un champ d'induction magnétique, et donc traversée par un flux... et réciproquement.

Il y a donc influence « **mutuelle** » entre les deux bobines.

**Si on retient les hypothèses simplificatrices suivantes:**

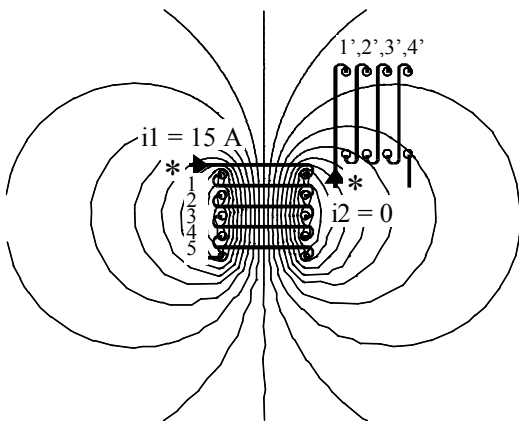
- Absence de tout champ d'induction magnétique d'origine extérieure aux deux bobines.
- Pas de phénomène de saturation magnétique. Les circuits magnétiques éventuels sont tels qu'on peut leur appliquer l'hypothèse linéaire ( $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ).

On peut alors exprimer cette influence avec la notion d'**inductance mutuelle**:

(voir *Magnelecpro chapitre 5 vidéo 7*)

### 2.1 Exemple:

#### Première expérience.



Dans l'exemple ci-contre, la bobine N°1 est constituée de 5 spires numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 en série. Elles sont traversées par un courant  $i_1$  positif de valeur 15 A.

La bobine N°2 est constituée de 4 spires numérotées 1', 2', 3' et 4'. Elles ne sont traversées par aucun courant.

Le champ d'induction ne dépend donc que du courant dans la bobine N°1.

Par simulation, on a calculé la **valeur absolue** du flux dans chaque spire:

$$\varphi_1 = \varphi_5 = 1,56 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} , \varphi_2 = \varphi_4 = 1,80 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} , \varphi_3 = 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \text{ et}$$

$$\varphi'_1 = 2,43 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} , \varphi'_2 = 1,91 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} , \varphi'_3 = 1,48 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \text{ et } \varphi'_4 = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

Calculer dans ces conditions, le flux total  $\phi_1$  dans la bobine N°1 et le flux total  $\phi_2$  dans la bobine N°2.

**Attention:** Il faut repérer le sens des normales aux spires pour déterminer le signe des flux. On remarquera qu'ici le flux dans les spires du bobinage N°1 est positif (car le champ d'induction est de même sens que la normale cohérente avec la borne « \* » choisie pour le bobinage N°1). alors que le flux dans le bobinage N°2 est négatif (car le champ d'induction est de sens contraire à la normale cohérente avec la borne « \* » choisie pour le bobinage N°2).

La valeur de l'induction en chaque point de l'environnement des bobines est proportionnelle au courant dans la bobine N°1. Et donc  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont proportionnels au courant dans la bobine N°1.

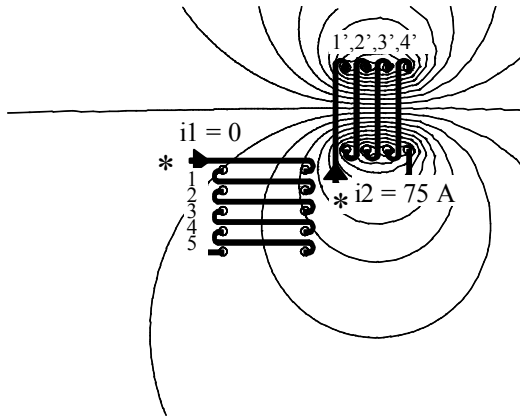
Par définition, l'inductance propre du bobinage N°1 est  $L_1 = \frac{\phi_1}{i_1}$ .

Par définition, l'inductance mutuelle du bobinage N°2 par rapport au bobinage N°1 est  $M_{12} = \frac{\phi_2}{i_1}$ .

Calculer  $L_1$  et  $M_{12}$ . (L'inductance mutuelle peut être positive ou négative. On remarquera qu'ici  $M_{12} < 0$ ).

(Réponse 1:)

**Deuxième expérience.**



Dans l'exemple ci-contre, la bobine N°1 n'est traversée par aucun courant.

La bobine N°2 est traversée par un courant  $i_2$  positif, de valeur 75 A.

Le champ d'induction ne dépend donc que du courant dans la bobine N°2.

Par simulation, on a calculé la valeur absolue du flux dans chaque spire:

$$\phi'_1 = \phi'_4 = 7,18 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \quad , \quad \phi'_2 = \phi'_3 = 8,32 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \quad \text{et} \quad \phi_1 = 9,18 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$\phi_2 = 8,37 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \quad , \quad \phi_3 = 7,03 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \quad , \quad \phi_4 = 5,72 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \quad \text{et} \quad \phi_5 = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

Calculer dans ces conditions, le flux total  $\phi_1$  dans la bobine N°1 et le flux total  $\phi_2$  dans la bobine N°2.

La valeur de l'induction en chaque point et donc  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont proportionnels au courant dans la bobine N°2.

Par définition, l'inductance propre du bobinage N°2 est  $L_2 = \frac{\phi_2}{i_2}$ .

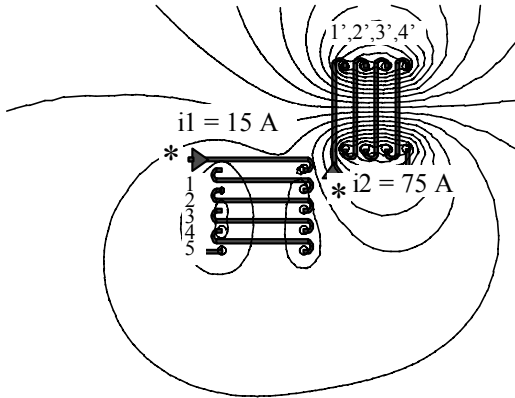
Par définition, l'inductance mutuelle du bobinage N°1 par rapport au bobinage N°2 est  $M_{21} = \frac{\phi_1}{i_2}$ .

Calculer  $L_2$  et  $M_{21}$ .

(Réponse 2:)

**Remarque:** On vérifie que  $M_{12} = M_{21}$  ce qui est un résultat général.

**Quand deux circuits sont couplés magnétiquement, l'inductance mutuelle de l'un par rapport à l'autre est égale à l'inductance mutuelle de l'autre par rapport à l'un. Le signe de l'inductance mutuelle dépend des orientations des deux bobinages.**

**Troisième expérience.**

Dans l'exemple ci-contre, la bobine N°1 est traversée par un courant  $i_1 = + 15 \text{ A}$ .

La bobine N°2 est traversée par un courant  $i_2 = + 75 \text{ A}$ .

Le champ d'induction dépend donc du courant dans les deux bobines.

Par simulation, on a calculé le flux dans chaque spire (Dans cet exemple, ils sont tous positifs):

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= 6,94.10^{-6} \text{ Wb} , \quad \varphi'_2 = 8,13.10^{-6} \text{ Wb} , \quad \varphi'_3 = 8,17.10^{-6} \text{ Wb} , \quad \varphi'_4 = 7,06.10^{-6} \text{ Wb} \text{ et} \\ \varphi_1 &= 6,48.10^{-7} \text{ Wb} , \quad \varphi_2 = 9,73.10^{-7} \text{ Wb} , \quad \varphi_3 = 11,7.10^{-7} \text{ Wb} , \quad \varphi_4 = 12,3.10^{-7} \text{ Wb} , \\ \varphi_5 &= 10,9.10^{-7} \text{ Wb} \end{aligned}$$

Calculer dans ces conditions, le flux total  $\phi_1$  dans la bobine N°1 et le flux total  $\phi_2$  dans la bobine N°2.

La valeur de l'induction en chaque point est la somme des vecteurs induction magnétique de la première expérience et de la deuxième expérience. (Dans l'air ou dans un circuit magnétique linéaire, il y a « superposition » des champs d'induction magnétiques dus à chacun des bobinages.) Vérifier qu'en conséquence,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les sommes des résultats obtenus dans les deux expériences précédentes.

(Réponse 3:)

**2.2 Conclusion:**

$$\text{Si } i_2 = 0 \Rightarrow L_1 = \frac{\phi_1}{i_1} \text{ et } M = \frac{\phi_2}{i_1} \quad \text{Si } i_1 = 0 \Rightarrow L_2 = \frac{\phi_2}{i_2} \text{ et } M = \frac{\phi_1}{i_2}$$

Si  $i_1 \neq 0$  et  $i_2 \neq 0$ , les deux situations précédentes se superposent, et donc:

$\begin{cases} \phi_1 = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2 \\ \phi_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot i_1 \end{cases}$	Avec:	$L_1$ : inductance propre de la bobine 1. $L_2$ : inductance propre de la bobine 2. $M$ : inductance mutuelle des deux circuits, ( $M$ est positive ou négative).
--	-------	--

*Cette relation est à connaître par coeur!*

*On peut généraliser cette démarche à un nombre quelconque de bobines qui s'influencent mutuellement:*

Par exemple pour trois bobines:

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1.i_1 + M_{12}.i_2 + M_{13}.i_3 \\ \phi_2 = L_2.i_2 + M_{21}.i_1 + M_{23}.i_3 \\ \phi_3 = L_3.i_3 + M_{31}.i_1 + M_{32}.i_2 \end{cases} \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} M_{12} = M_{21} \\ M_{13} = M_{31} \\ M_{23} = M_{32} \end{cases}$$

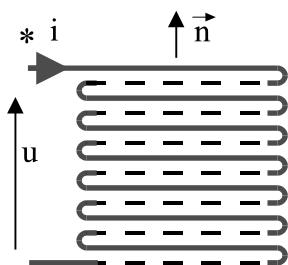
On en déduit : L'inductance propre  $L_1$  se définit par:  $L_1 = \left. \frac{\phi_1}{i_1} \right|_{\text{lorsque } i_2 = i_3 = 0}$  ;  $L_2 = \dots$  ;  $L_3 = \dots$

L'inductance mutuelle  $M_{12}$  se définit par:  $M_{12} = \left. \frac{\phi_2}{i_1} \right|_{\text{lorsque } i_2 = i_3 = 0} = \left. \frac{\phi_1}{i_2} \right|_{\text{lorsque } i_1 = i_3 = 0}$  ; etc.

### 2.3 Relation tension courant dans des bobines couplées.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- Absence de tout champ d'induction magnétique d'origine extérieure aux bobines considérées.
- Le circuit magnétique éventuel est tel qu'on pourra lui appliquer l'hypothèse linéaire ( $\vec{B} = \mu.\vec{H}$ ).



Pour chaque bobine de résistance interne  $r$ , (orientée en convention récepteur, le courant entrant par la borne « \* »), la loi de Faraday permet d'écrire:

$$u(t) = r.i(t) - e(t) = r.i(t) + \frac{d\phi(t)}{dt}$$

**De façon à éviter les erreurs de signe, on prendra autant que possible les orientations proposées sur la figure ci-dessus.**

Par exemple pour deux bobines couplées:

$$u_1(t) = r_1.i_1(t) + \frac{d\phi_1(t)}{dt} ; u_2(t) = r_2.i_2(t) + \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi_1 = L_1.i_1 + M.i_2 \\ \phi_2 = L_2.i_2 + M.i_1 \end{cases}$$

- Si on suppose les bobines et circuit magnétique indéformables  $\Rightarrow$  les inductances propres et mutuelles sont constantes.

En déduire  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  en fonction des inductances et des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

(Réponse 4:)

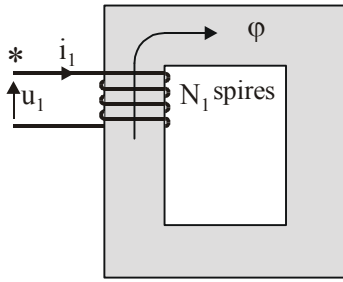
### 3. CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE

- Dans l'hypothèse d'un circuit magnétique linéaire, qu'est-ce qu'une inductance mutuelle ?
- Que peut-on dire de l'inductance mutuelle d'une bobine par rapport à l'autre et de l'inductance mutuelle de l'autre par rapport à la première ?
- Dans l'hypothèse d'un circuit magnétique linéaire, comment s'exprime le flux total dans l'une des bobines lorsqu'il y a trois bobines parcourues par des courants qui s'influencent mutuellement ?
- Soient trois bobines numérotées 1, 2 et 3 indéformables, orientées en convention récepteur. On suppose le circuit magnétique linéaire.  
Comment s'exprime la tension aux bornes de la bobine N°1 en fonction des trois courants  $i_1, i_2$  et  $i_3$  et des diverses inductances ?



4. PROBLEMES ET EXERCICES.

**Chap 5. Exercice 1 : Circuit magnétique linéaire.**

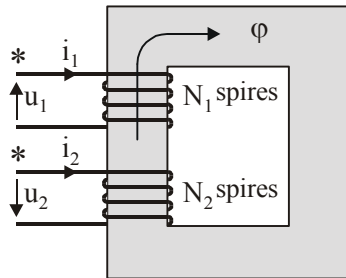


Le bobinage et le circuit magnétique ci-contre possèdent les caractéristiques suivantes:

Le bobinage est constitué de «  $N_1$  » spires. Il possède une résistance totale «  $r_1$  ».

Le circuit magnétique est réalisé dans un matériau ferromagnétique de perméabilité magnétique absolue constante  $\mu$ . La longueur de sa fibre moyenne est «  $\ell$  » et sa section droite est «  $s$  ». Les fuites magnétiques seront négligées.

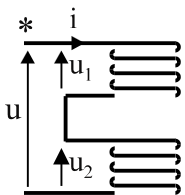
- a) Préciser ce que signifient « fibre moyenne » et « section droite ».
- b) Exprimer l'inductance propre «  $L_1$  » de la bobine en fonction de  $N_1$  et des paramètres du circuit magnétique.
- c) Exprimer  $u_1(t)$  en fonction de  $r_1$  et  $N_1 \cdot \phi(t)$ ; puis en fonction de  $r_1$ ,  $L_1$  et  $i_1(t)$ .



d) On ajoute à l'ensemble précédent un second bobinage de «  $N_2$  » spires.

Exprimer l'inductance mutuelle entre les deux bobinages en fonction des paramètres du nouvel ensemble.

**Chap 5. Exercice 2 : Association de bobines.**

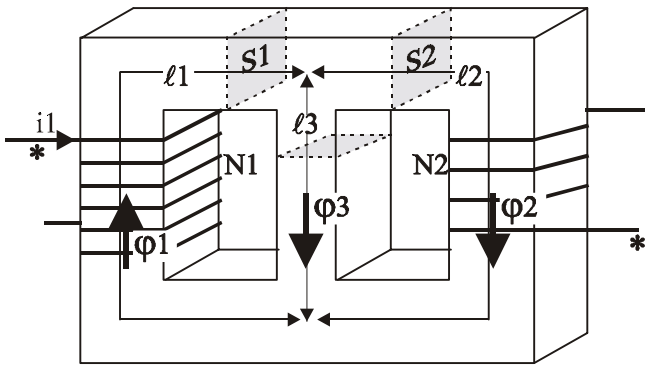


Un bobinage de résistance «  $r_1$  » et d'inductance propre «  $L_1$  » ainsi qu'un bobinage de résistance «  $r_2$  » et d'inductance propre «  $L_2$  » sont associés sur un même circuit magnétique de sorte que leur inductance mutuelle est «  $M$  ». Les résistances et les inductances sont supposées constantes.

Comme le montre la figure ci-contre, ces deux bobinages sont reliés en série.

Exprimer  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $u(t)$  en fonction de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  et  $i(t)$ .

**Chap 5. Exercice 3 : Circuit magnétique linéaire, inductance propre et inductance mutuelle.**

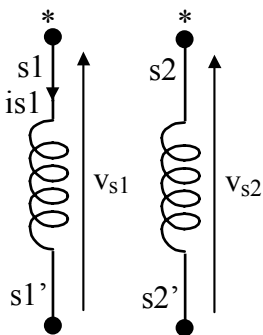


**Hypothèses:**

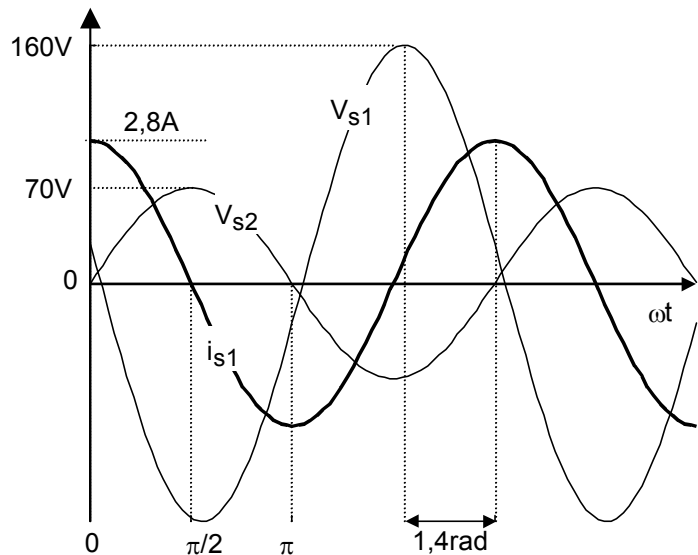
- $\mu_r = 1600$
- $S1 = S2 = 3 \text{ cm}^2$ ;  $S3 = 2 \text{ cm}^2$
- $l1 = l2 = 30 \text{ cm}$ ;  $l3 = 10 \text{ cm}$
- Bobine N°1:  $N1 = 240$  spires
- Bobine N°2:  $N2 = 50$  spires
- Toutes les lignes d'induction se referment uniquement dans le circuit magnétique (Les fuites sont négligées).
- Pas de courant dans le bobinage N°2.

- 1 Représenter le schéma électrique équivalent avec les flux, les f.m.m. et les réluctances.
- 2 Calculer  $i1$  dans les  $N1$  spires pour avoir  $B3 = 0,8 \text{ T}$  dans la colonne centrale, lorsque  $i2 = 0$ .
- 3 Déterminer l'inductance propre de la bobine de  $N1$  spires. <sup>(1)</sup>
- 4 Déterminer l'inductance mutuelle entre les bobines N°1 et N°2. <sup>(2)</sup>

**Chap 5. Exercice 4 : Mesure d'inductances**



Après avoir alimenté le bobinage «s1» sous une tension alternative sinusoïdale 50 Hz, on a relevé les oscillogrammes suivants. (Le courant dans le second bobinage est nul).

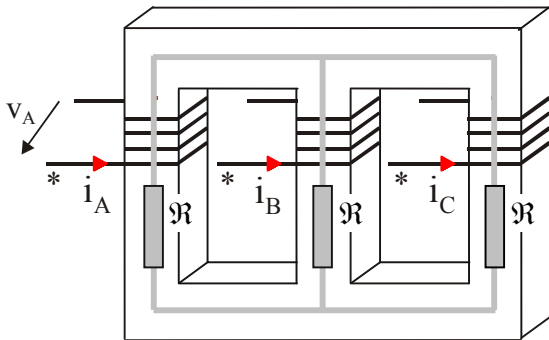


En déduire la résistance interne  $r_{s1}$  et l'inductance propre  $L_{s1}$  du bobinage «s1-s1'» ainsi que l'inductance mutuelle  $M_{s1s2}$  entre les deux bobinages.

<sup>(1)</sup> L'inductance propre  $L_I$  se définit par:  $L_I = \frac{\phi_1}{i_1} \Big|_{\text{lorsque } i_2 = 0}$

<sup>(2)</sup> L'inductance mutuelle  $M$  se définit par:  $M = \frac{\phi_2}{i_1} \Big|_{\text{lorsque } i_2 = 0} = \frac{\phi_1}{i_2} \Big|_{\text{lorsque } i_1 = 0}$

### Chap 5. Exercice 5 : Inductances triphasées



Soit le circuit magnétique ci-contre supposé non-saturé (comportement linéaire). Les trois colonnes de celui-ci ont, par hypothèse, une même réluctance  $\mathfrak{R}$ . Elles sont équipées de bobinages identiques de  $N$  spires repérés par les lettres A, B et C. (On néglige les réluctances du circuit magnétique entre les colonnes).

Chaque bobinage est muni d'une orientation figurée par une borne entrante « \* ». Les orientations des flux dans les bobinages seront prises de manière cohérente avec ces bornes « \* ».

On négligera les fuites, on supposera donc les lignes de champ d'induction parfaitement canalisées dans le circuit magnétique.

a) Exprimer l'inductance propre  $L_A$  du bobinage A, ainsi que les inductances mutuelles  $M_{AB}$  et  $M_{AC}$  en fonction des caractéristiques des bobinages et du circuit magnétique.

b) Les trois bobinages sont alimentés, de sorte qu'en permanence  $i_A + i_B + i_C = 0$ .

Exprimer le flux total  $\phi_A$  en fonction de  $i_A$  et des caractéristiques des bobinages et du circuit magnétique.

c) Soit  $i_A = \hat{I} \cdot \cos(100\pi t)$ ,  $i_B = \hat{I} \cdot \cos(100\pi t - \frac{2\pi}{3})$ ,  $i_C = \hat{I} \cdot \cos(100\pi t - \frac{4\pi}{3})$ .

Le bobinage A présente une résistance interne  $r$ .

Exprimer  $v_A(t)$  en utilisant l'inductance « cyclique »  $L_{cA} = L_A - M_{AB}$ .

## 5. REPONSES DU CHAPITRE INDUCTANCES MUTUELLES.

### Réponse 1:

$$L_1 = \frac{\phi_1}{i_1} = \frac{8,59 \cdot 10^{-6}}{15} = 573 \cdot 10^{-9} \text{ H}.$$

$$M_{12} = \frac{\phi_2}{i_1} = \frac{-6,98 \cdot 10^{-7}}{15} = -46,5 \cdot 10^{-9} \text{ H}.$$

[Retour](#)

### Réponse 2:

$$L_2 = \frac{\phi_2}{i_2} = \frac{31 \cdot 10^{-6}}{75} = 413 \cdot 10^{-9} \text{ H}.$$

$$M_{21} = \frac{\phi_1}{i_2} = \frac{-34,9 \cdot 10^{-7}}{75} = -46,5 \cdot 10^{-9} \text{ H}. \text{ On remarque que } M_{12} = M_{21}.$$

[Retour](#)

### Réponse 3:

$$\phi_1 = 51,1 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} = (8,59 \cdot 10^{-6} - 34,9 \cdot 10^{-7}) \text{ Wb}$$

$$\phi_2 = 30,3 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} = (-6,98 \cdot 10^{-7} + 31,1 \cdot 10^{-6}) \text{ Wb}$$

Les flux sont les sommes des deux cas précédents.

[Retour](#)

### Réponse 4:

Si les bobines et le circuit magnétique sont indéformables

$$u_1(t) = r_1 \cdot i_1(t) + \frac{d\phi_1(t)}{dt} = r_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt};$$

$$u_2(t) = r_2 \cdot i_2(t) + \frac{d\phi_2(t)}{dt} = r_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}.$$

[Retour](#)