

# ELECTROTECHNIQUE

Électromagnétisme

---

Michel PIOU

---

## Chapitre 4 Inductances et bobines

Édition 29/05/2010

Extrait de la ressource en ligne *MagnElecPro* sur le site Internet [iutenligne.net](http://iutenligne.net)

## Table des matières

1 POURQUOI ET COMMENT ? .....	1
2 INDUCTANCES ET BOBINES. ....	2
2.1 Inductance (ou auto-inductance ou self-inductance ou inductance propre). ....	2
2.2 Différents modèles pour une bobine à noyau ferromagnétique. ....	4
2.3 Bobine avec composante continue de la tension ou du courant. ....	11
3 CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE. ....	12
4 PROBLEMES ET EXERCICES. ....	13
Chap 4. Exercice 1 : Inductance propre. ....	13
Chap 4. Exercice 2 : Calcul d'une inductance de lissage. ....	14
Chap 4. Exercice 3 : Energie emmagasinée dans un circuit magnétique ....	15
Chap 4. Exercice 4 : Justification de la constitution d'une inductance de lissage ....	17
5 REPONSES DU CHAPITRE INDUCTANCES ET BOBINES. ....	20

### **Copyright : droits et obligations des utilisateurs**

Ce document est extrait de la ressource *MagnElecPro* qui est disponible en version numérique sur le site Internet *IUT en ligne*

Je ne renonce pas à ma qualité d'auteur et aux droits moraux qui s'y rapportent du fait de la publication de mon document.

Les utilisateurs sont autorisés à faire un usage non commercial, personnel ou collectif, de ce document et de la ressource *MagnElecPro*, notamment dans les activités d'enseignement, de formation ou de loisirs. Tout ou partie de cette ressource ne doit pas faire l'objet d'une vente - en tout état de cause, une copie ne peut pas être facturée à un montant supérieur à celui de son support.

Pour tout extrait de ce document, l'utilisateur doit maintenir de façon lisible le nom de l'auteur *Michel Piou*, la référence à *MagnElecPro* et au site Internet *IUT en ligne*.

Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes - FRANCE

## 1 POURQUOI ET COMMENT ?

Dans les deux premiers chapitres nous avons abordé les notions théoriques indispensables pour parvenir aux applications concrètes. Il s'agissait principalement de la conservation du flux du champ d'induction magnétique, de la loi de Faraday, du théorème d'Ampère et des règles d'orientation associées.

Nous allons maintenant étudier diverses façons de décrire le comportement d'un bobinage (1). On trouve des bobinages dans les inductances, les transformateurs ou les moteurs électriques.

### **Prérequis :**

La maîtrise des chapitres 1 et 2 est indispensable.

### **Objectifs :**

Les bobinages, associés ou non à des circuits magnétiques sont des objets dont le comportement peut être compliqué. Notre objectif va être d'associer à ces objets des **modèles** décrivant ce comportement.

Un modèle est une description plus ou moins simplifiée du comportement réel d'un objet.

Ce chapitre présente les modélisations les plus couramment associées aux bobinages.

Le terme “ **inductance** ” désigne le modèle le plus simple qu'on associe à une bobine.

### **Méthode de travail :**

La notion de « **modèle** » sera au cœur de ce chapitre. La modélisation par « inductance » qui sera suivie dans le chapitre suivant par la notion « d'inductances mutuelles » nous conduira ensuite à la modélisation des transformateurs et des moteurs électriques. Elle ne constitue donc pas un gadget qui ne servirait à rien, mais, bien au contraire, un élément essentiel de notre progression.

Il ne faudra donc pas se contenter « d'avoir entendu parler de ... ».

En fin de chapitre, le paragraphe intitulé “ ce que j'ai retenu de ce chapitre ” permettra de vérifier individuellement que les connaissances essentielles ont bien été acquises.

### **Travail en autonomie :**

Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

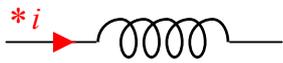
---

(1) Le terme “ bobine ” ou “ bobinage ” désigne l'objet technique (enroulement d'un fil conducteur qui constitue une ou plusieurs spires).

## 2 INDUCTANCES ET BOBINES.

### 2.1 Inductance (ou auto-inductance ou self-inductance ou inductance propre)

#### 2.1.1 Définition d'une inductance propre.



Soit une bobine de N spires parcourue par un courant  $i$ .

Ce courant  $i$  engendre une induction, et donc un flux dans les spires de cette bobine.

Si on retient les hypothèses simplificatrices suivantes:

- Absence de tout champ d'induction magnétique d'origine extérieure à la bobine.
- Pas de phénomène de saturation magnétique. Le circuit magnétique éventuel est tel qu'on pourra lui appliquer l'hypothèse linéaire ( $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ).

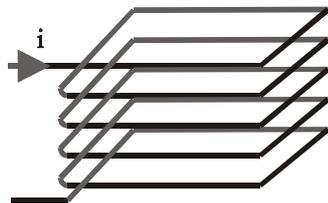
Dans ces conditions, l'induction magnétique en tout point de l'environnement de la bobine (et donc le flux dans celle-ci) est proportionnelle au courant  $i$  qui la traverse.

$$\Rightarrow \boxed{\phi = L \cdot i} = \text{flux total dans les N spires de la bobine (2).}$$

$L$  est un coefficient de proportionnalité entre le flux total  $\phi$  et le courant  $i$ .  
Il est appelé "**inductance propre**". (3)

L'unité d'inductance est le Henry (symbole H).

#### 2.1.2 1° Exemple de calcul d'une inductance propre:



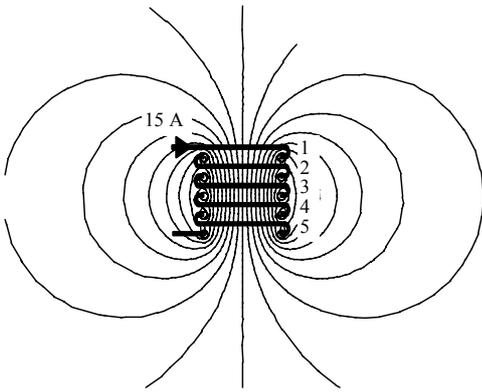
Soit un bobinage de 5 spires carrées de 4 cm de côté parcouru par un courant "  $i$  " de 15 A et placé dans l'air en dehors de toute influence magnétique extérieure.

Le comportement magnétique de celui-ci a été simulé afin de calculer le flux dans chacune de ses spires.

(Les spires étant proches les unes des autres, chacune d'elles constitue presque une boucle fermée. On peut donc calculer le flux qui la traverse).

(2) Dans ce cours:  $\varphi$  désignera toujours pour nous le flux dans 1 spire du bobinage (ou le flux dans une section du circuit magnétique) et  $\phi$  le flux total dans le bobinage.

(3) « propre » dans le sens de « par elle-même ». En anglais : « self »



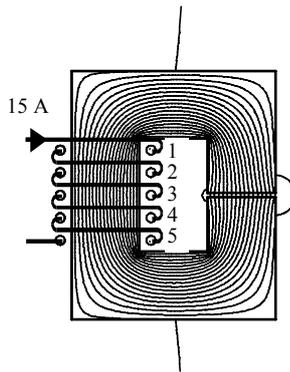
La simulation a permis d'obtenir la valeur du flux dans chacune des 5 spires (numérotées ci-contre de 1 à 5) pour un courant de 15 A dans celles-ci:

$$\varphi_1 = 1,56 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} , \varphi_2 = 1,80 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\varphi_3 = 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \dots$$

En raisonnant sur la symétrie du montage, déterminer  $\varphi_4$  et  $\varphi_5$ . En déduire le flux total dans le bobinage. Calculer l'inductance propre de ce bobinage. (Réponse 1:)

### 2.1.3 2em exemple de calcul d'une inductance propre:



Le bobinage précédent a été monté sur un circuit magnétique qui, malgré un petit entrefer, canalise assez bien les lignes de champ.

Comme précédemment, la simulation a permis d'obtenir la valeur du flux dans chacune des 5 spires pour un courant de 15 A:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 4,75 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

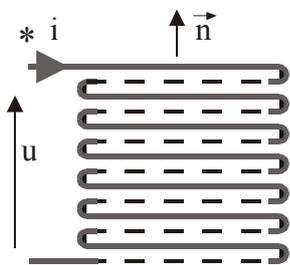
On constate que dans ce cas particulier, le flux total est égal au flux dans une spire multiplié par le nombre de spires.

Calculer la nouvelle inductance propre du bobinage. (Réponse 2:)

### 2.1.4 Relation tension courant dans une inductance.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- **Absence** de tout champ d'induction magnétique d'origine extérieure à la bobine.
- Le circuit magnétique éventuel est tel qu'on pourra lui appliquer l'hypothèse **linéaire** ( $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ).
- Circuit magnétique **indéformable** ( $\Rightarrow$  l'inductance du bobinage est constante).



Pour une bobine de résistance interne  $r$ , orientée en **convention récepteur**. La loi de Faraday permet d'écrire:

$$u(t) = r \cdot i(t) - e(t) = r \cdot i(t) + \frac{d\phi(t)}{dt} = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

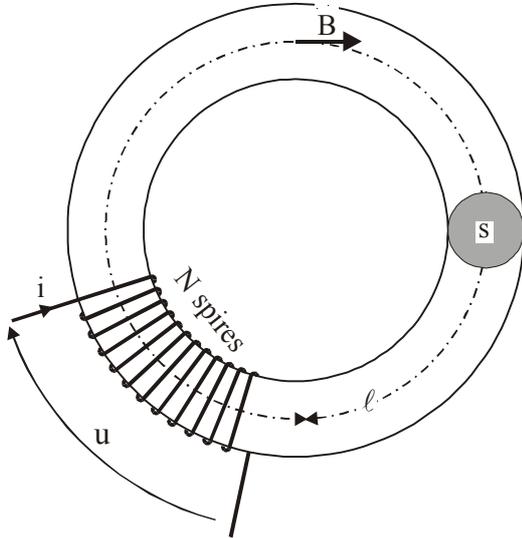
$$\text{Si on néglige la résistance} \Rightarrow u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

**Attention :**

**Cette dernière relation n'est vraie que si toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées !**

Une bobine indéformable isolée de toute influence magnétique extérieure, présentant une résistance interne négligeable et telle qu'on puisse appliquer à son circuit magnétique l'hypothèse linéaire peut donc être modélisée par une inductance “  $L$  ”.

### 2.1.5 Exemple de calcul “ à la main ”



Le circuit magnétique ci-contre est constitué d'un tore de matériau ferromagnétique isotrope non saturé de perméabilité magnétique absolue  $\mu$  supposée constante.

Il présente une section droite  $S$ , traversée par un flux  $\varphi$ .

La longueur de sa fibre moyenne est :  $\ell$ .

Il est équipé d'un bobinage de  $N$  spires parcourues par un courant  $i$ . Ce bobinage est supposé "sans fuites", c'est à dire que tout le flux créé par celui-ci passe dans le tore.

L'ensemble est indéformable.

La résistance du fil est négligée.

Avec les hypothèses simplificatrices usuelles:

Exprimer le flux  $\varphi(t)$  dans une section  $S$  en fonction de  $i(t)$  et des paramètres du montage.

En déduire l'inductance  $L$  de ce bobinage.

(Réponse 3:)

## 2.2 Différents modèles pour une bobine à noyau ferromagnétique.

*Dans les chapitres précédents, nous avons toujours considéré les bobines sans tenir compte de leurs imperfections (résistance des conducteurs, fuite d'induction dans le circuit magnétique, non-linéarités dues à la saturation ou influence des pertes fer).*

*L'objectif de ce paragraphe est donc d'étudier les bobinages en prenant en compte tout cela.*

*On introduira différents modèles plus ou moins précis, car plus ou moins proches de la réalité, mais aussi plus ou moins difficiles à élaborer et à manipuler.*

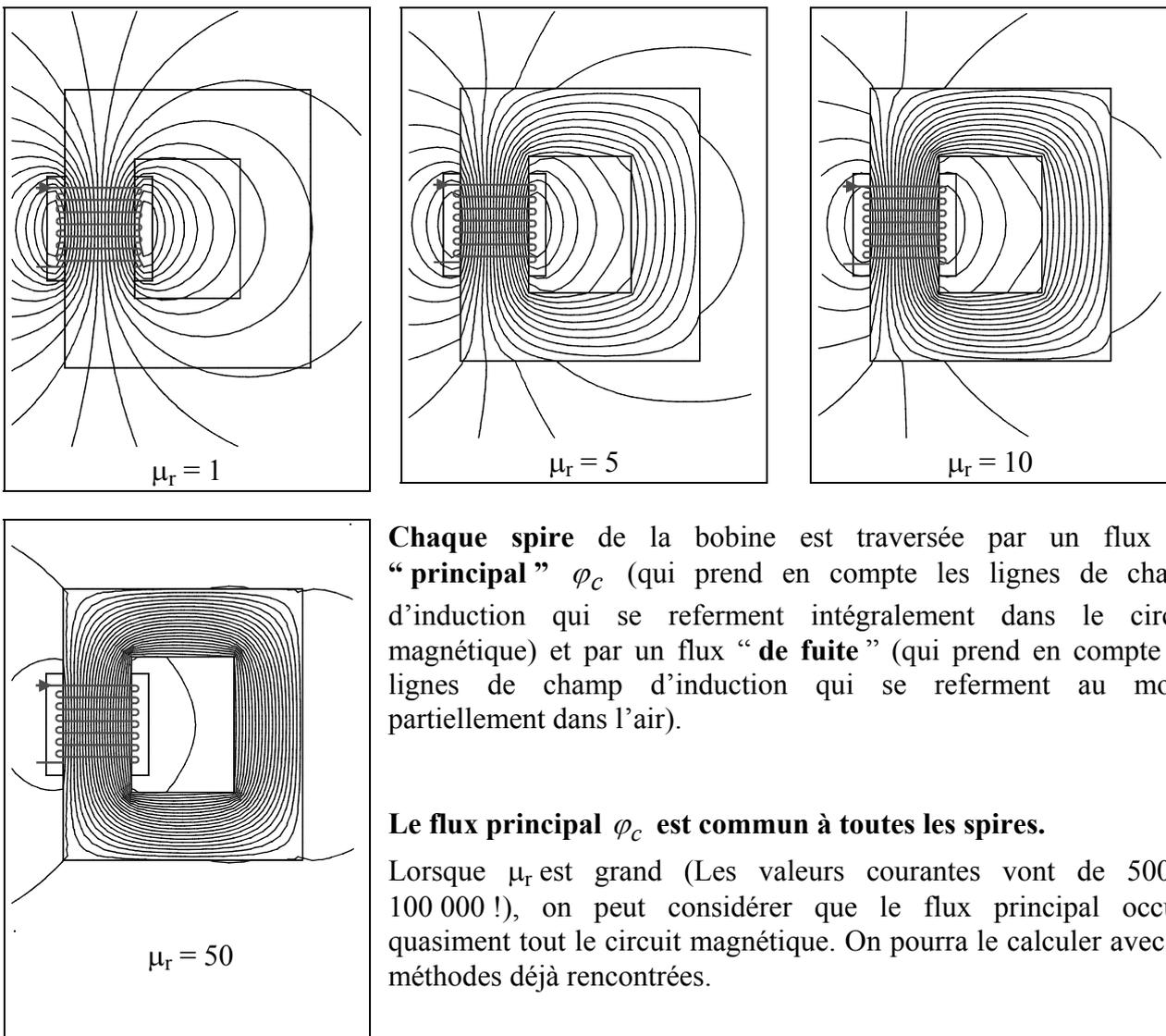
### 2.2.1 Flux de fuite, inductance de fuite.

Considérons une simple bobine montée sur un circuit magnétique.

Avec un logiciel de simulation, nous avons établi une carte des lignes de champ dans ce circuit pour différentes valeurs de la perméabilité magnétique de celui-ci.

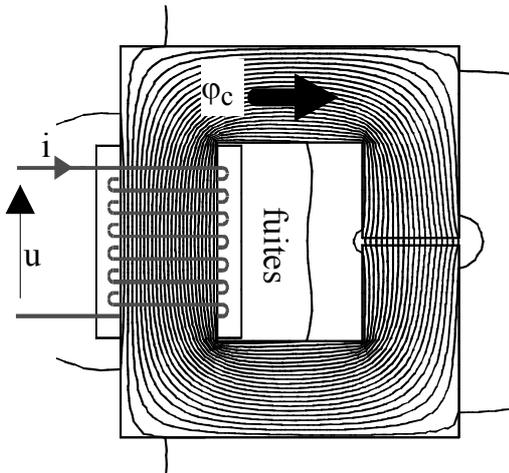
Pour  $\mu_r = 1$ , le circuit magnétique se comporte comme de l'air. Les lignes de champ ne sont pas canalisées.

Pour  $\mu_r = 50$ , l'essentiel des lignes de champ se referme dans le circuit magnétique.



Le **flux de fuite** constitue le **petit reste**; il est difficile à calculer à la main. Il n'est pas nécessairement le même dans toutes les spires de la bobine.

Parce que le flux de fuite de chaque spire prend en compte des lignes de champ qui se referment partiellement dans l'air, on peut considérer qu'il est proportionnel au courant dans la bobine quel que soit l'état de saturation du circuit magnétique.



- Soit par exemple le circuit magnétique ci-contre.

La bobine est constituée de  $N$  spires, sa résistance est  $r$ .

Le flux principal commun à toutes les spires est noté  $\varphi_c$  (flux commun).

Le flux dans une spire de la bobine est donc  $\varphi_c$  + un flux de fuite.

La somme des flux de fuite de toutes les spires de la bobine est notée  $\phi_f$ .

Soit  $\phi$  le flux total dans la bobine (c'est-à-dire la somme des flux dans chaque spire de la bobine).

On a donc  $\phi = N \cdot \varphi_c + \phi_f$

en général  $N \cdot \varphi_c \gg \phi_f$ .

Si comme c'est le cas ci-dessus, le circuit magnétique présente un petit entrefer, on considère que celui-ci est traversé par le flux  $\varphi_c$  et que l'entrefer fait partie du circuit magnétique.

*De ce paragraphe, on retiendra que le flux qu'on prend en compte dans un calcul "à la main" d'un circuit magnétique (avec le théorème d'Ampère et la loi de conservation du flux) néglige un "petit reste" appelé "flux de fuite". (Ce dernier prendra toute son importance dans l'étude du transformateur).*

Dès maintenant on doit se familiariser avec ce vocabulaire de façon à comprendre ce que signifie l'hypothèse simplificatrice "circuit magnétique sans fuites" qui sera adoptée dans les exercices de ce chapitre.

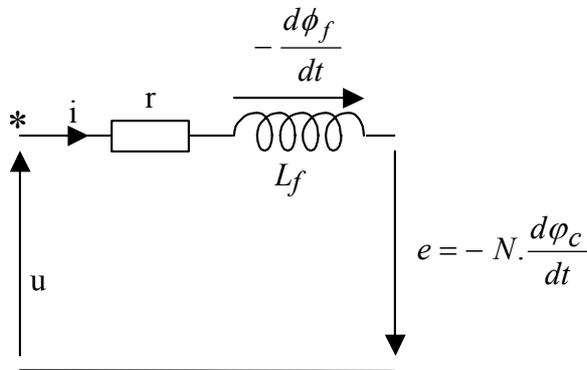
### 2.2.2 Modélisation d'une bobine.

Le flux total  $\phi_f$  est proportionnel à la force magnétomotrice  $Ni$  qui le produit (pas de saturation en l'aire)  $\Rightarrow \phi_f$  est proportionnel à  $i$ .  $\Rightarrow \phi_f = L_f \cdot i$ .

Le coefficient de proportionnalité  $L_f$  est appelé "**inductance de fuite**".

$$\Rightarrow u(t) = r \cdot i(t) + \frac{d\phi}{dt} = r \cdot i(t) + \frac{d(\phi_f + N \cdot \phi_c)}{dt} = r \cdot i(t) + \underbrace{\frac{d\phi_f}{dt}}_{L_f \cdot \frac{di(t)}{dt}} + \underbrace{N \cdot \frac{d\phi_c}{dt}}_{-e}$$

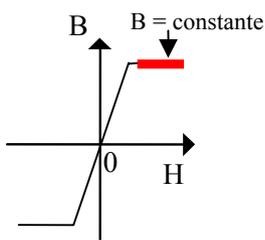
Il est donc maintenant possible d'établir un premier schéma équivalent d'une bobine:



*La relation entre  $e$  et  $i$  peut être complexe. Nous ne l'envisagerons que dans trois cas particuliers d'où découleront trois modèles associés à ceux-ci:*

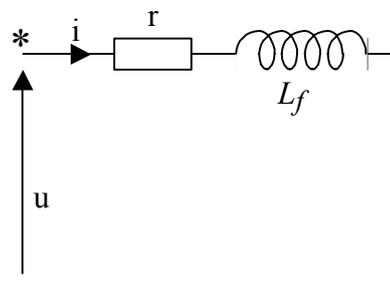
- Circuit magnétique complètement saturé.
- Circuit magnétique linéaire.
- Circuit magnétique saturable en régime permanent alternatif sinusoïdal.

#### 2.2.2.1 Modèle si le circuit magnétique est complètement saturé:



$B$  dans le circuit magnétique = constante  $\forall H \Rightarrow \phi_c = \text{constante} \forall i \Rightarrow e(t) = 0$

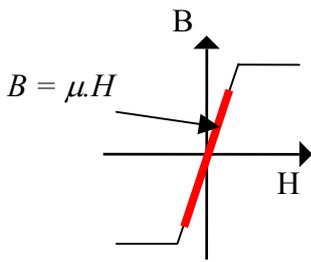
Le schéma équivalent de la bobine est alors:



Si le circuit magnétique est très saturé, le dipôle « bobine » se comporte comme sa résistance interne en série avec une petite inductance (de fuite)

Lorsque le circuit magnétique est saturé, si la résistance interne et l'inductance de fuite sont faibles, la bobine se comporte presque comme un court-circuit !

### 2.2.2.2 Modèle si le circuit magnétique est non saturé avec l'approximation linéaire.



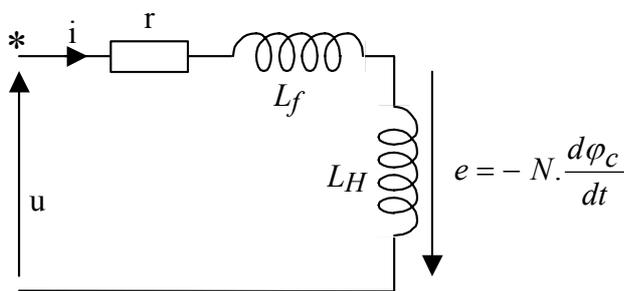
Si le cycle d'hystérésis du matériau peut être réduit à une droite ( $B = \mu.H$ ) avec  $\mu = \text{constante}$  <sup>(4)</sup>

Dans ce cas le flux  $\varphi(t)$  est proportionnel au courant  $i(t)$

$\Rightarrow N.\varphi_c = L_H.i(t)$ . Le coefficient de proportionnalité  $L_H$  est appelé "**inductance principale**" (ou "inductance de magnétisation").

$$\Rightarrow e(t) = -N.\frac{d\varphi_c}{dt} = -L_H.\frac{di(t)}{dt}$$

Le schéma équivalent de la bobine est alors:



$L_f$  est appelée "**inductance de fuite**."

On reconnaît dans  $L_f + L_H$  l'**inductance propre** "L" du paragraphe précédent :  
 $(L = L_f + L_H)$ .

Ce modèle néglige les pertes fer dans le circuit magnétique car l'aire du cycle d'hystérésis du matériau ferromagnétique est considérée nulle.

### 2.2.2.3 Modèle si le circuit magnétique est saturable et le régime permanent alternatif sinusoïdal.

Si la bobine est indéformable et soumise à une tension  $u(t)$  alternative sinusoïdale. Si sa résistance "r" est faible, et si le flux principal commun  $N.\varphi_c$  est très supérieur au flux de fuite  $\phi_f$ , il est possible d'affiner le modèle:

(En général, r est faible de façon à minimiser les pertes Joule dans le bobinage. Dans un circuit magnétique sans entrefer ou avec un faible entrefer,  $\phi_f$  est généralement très faible devant le flux principal  $N.\varphi_c$ )

$$\Rightarrow e(t) = -N.\frac{d\varphi_c(t)}{dt} \gg \frac{d\phi_f(t)}{dt} = L_f \frac{di(t)}{dt}$$

En conséquence  $u(t) = r.i(t) + L_f.\frac{di(t)}{dt} + \underbrace{N.\frac{d\varphi_c}{dt}}_{-e} \approx -e(t)$  Donc  $-e(t)$  est "voisin" de  $u(t)$ .

**Si  $u(t)$  est alternatif sinusoïdal  $\Rightarrow e(t)$  est sensiblement alternatif sinusoïdal.**

<sup>(4)</sup> Cette approximation est souvent faite pour modéliser les phénomènes en évitant une approche trop compliquée.

Soit, par exemple,  $e(t) = -E_{max} \cdot \cos(\omega t)$  avec un circuit magnétique de section droite “ $S$ ” et sans entrefer.

Le flux  $\varphi_c(t)$  est la primitive de  $-\frac{e(t)}{N} \Rightarrow \varphi_c(t) = \frac{E_{max}}{N \cdot \omega} \cdot \sin(\omega t) + constante$ .

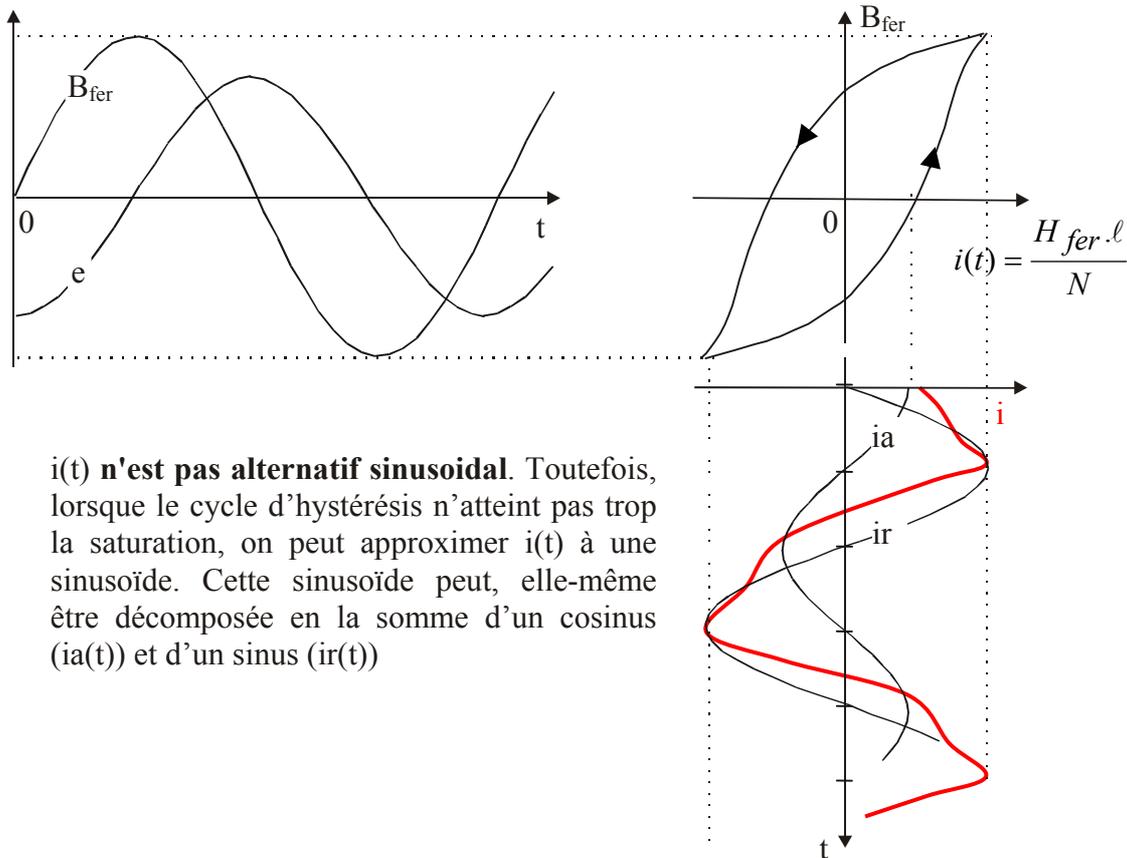
$$\Rightarrow B_{fer}(t) = \frac{\varphi_c(t)}{S} = \frac{E_{max}}{N \cdot \omega \cdot S} \cdot \sin(\omega t) + \frac{constante}{S} = B_{max} \cdot \sin(\omega t) + B_0$$

*En régime permanent, cette constante d'intégration  $B_0$  est nécessairement nulle car il n'existe aucune source d'excitation continue susceptible de maintenir une composante continue du champ d'induction magnétique (La tension d'alimentation est alternative sinusoïdale).*

$$\varphi_c(t) = \frac{E_{max}}{N \cdot \omega} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow B_{fer}(t) = \frac{E_{max}}{N \cdot \omega \cdot S} \cdot \sin(\omega t)$$

(Connaissant la relation  $B_{fer}(H_{fer})$  dans le circuit magnétique (cycle d'hystérésis ci-après), on en

déduit  $H_{fer}(t)$  et donc  $i(t)$  qui est égal à  $i(t) = \frac{H_{fer} \cdot \ell}{N}$ . (avec  $\ell$  : longueur de la fibre moyenne).



$i(t)$  n'est pas alternatif sinusoïdal. Toutefois, lorsque le cycle d'hystérésis n'atteint pas trop la saturation, on peut approximer  $i(t)$  à une sinusoïde. Cette sinusoïde peut, elle-même être décomposée en la somme d'un cosinus ( $ia(t)$ ) et d'un sinus ( $ir(t)$ )

Voir l'animation :

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/cyclehys.html>

Donc si l'influence de  $r$  et de  $L_f$  est faible, si la tension  $u(t)$  est alternative sinusoïdale, si le circuit magnétique n'est pas soumis à une trop forte saturation et si le régime est permanent: le courant  $i(t)$  consommé par la bobine est approximativement sinusoïdal, constitué d'une composante active et d'une composante réactive.

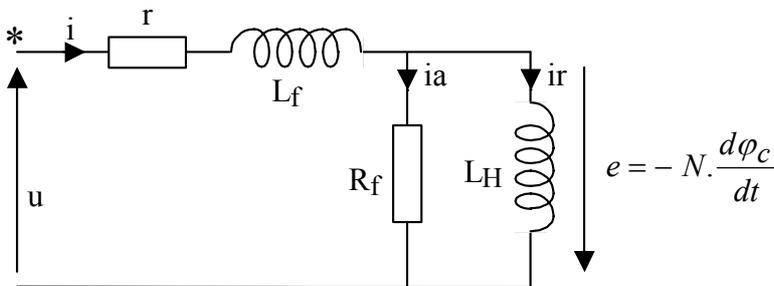
La puissance active perdue par les pertes fer dans la bobine correspond à la puissance active absorbée par le bobinage moins les pertes joule dans  $r$ . Elle s'exprime par :

$$P_{\text{fer}} = [-e(t) \cdot i(t)]_{\text{moy}} = \{-e(t) \cdot [i_a(t) + i_r(t)]\}_{\text{moy}} = [-e(t) \cdot i_a(t)]_{\text{moy}} + [-e(t) \cdot i_r(t)]_{\text{moy}}$$

$$P_{\text{fer}} = E_{\text{eff}} \cdot I_{a\text{eff}} \cos(0) + E_{\text{eff}} \cdot I_{r\text{eff}} \cos(\pi/2) = E_{\text{eff}} \cdot I_{a\text{eff}}$$

La valeur efficace de  $i_a$  sera donc choisie de façon à rendre compte de la puissance active perdue sous forme de pertes fer.

On en déduit le schéma équivalent d'une bobine (avec les hypothèses précédentes).



Modèle en régime permanent  
alternatif sinusoïdal si  $-e$  est voisin de  $u$

$r$ : résistance du bobinage.

$L_f$ : inductance de fuite du bobinage.

$R_f$ : La puissance dissipée dans  $R_f$  est égale aux pertes fer dans le circuit magnétique. ( $R_f$  varie avec la fréquence et peut varier avec l'amplitude  $B_{\text{max}}$  de l'induction).

$L_H$ : inductance principale ou inductance de magnétisation. ( $L_H$  varie avec la fréquence et peut varier avec l'amplitude  $B_{\text{max}}$  de l'induction).

## 2.3 Bobine avec composante continue de la tension ou du courant.

- Si on applique au bobinage une tension  $u(t)$  qui présente une composante continue  $U_{moy}$ .

On a alors  $U_{moy} = r.I_{moy}$ ; (la valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance  $L_f$  est nulle ainsi que  $e_{moy}$ ).

En effet, en régime périodique:

$$(-e(t))_{moy} = \left( N \cdot \frac{d(\varphi(t))}{dt} \right)_{moy} = N \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d(\varphi(t))}{dt} \cdot dt = N \cdot \frac{1}{T} [\varphi(t_0+T) - \varphi(t_0)] = 0$$

La composante continue de  $i(t)$  n'est limitée que par la résistance  $r$  du bobinage

$I_{moy} = \frac{U_{moy}}{R}$ . La résistance  $r$  est généralement faible;  $I_{moy}$  risque donc d'être élevé et d'engendrer des pertes Joule importantes dans la bobine  $\Rightarrow$  **DANGER s'il n'y a pas de contrôle du courant!**

- Si on applique au bobinage un courant  $i(t)$  présente une composante continue  $I_{moy}$ .

$\Rightarrow$  la f.m.m. présente une composante continue  $N.I_{moy} \Rightarrow$  le champ magnétique  $H$  dans le circuit magnétique présente une composante continue  $\Rightarrow$  le flux  $\varphi_c$  dans une section du circuit magnétique présente une composante continue.

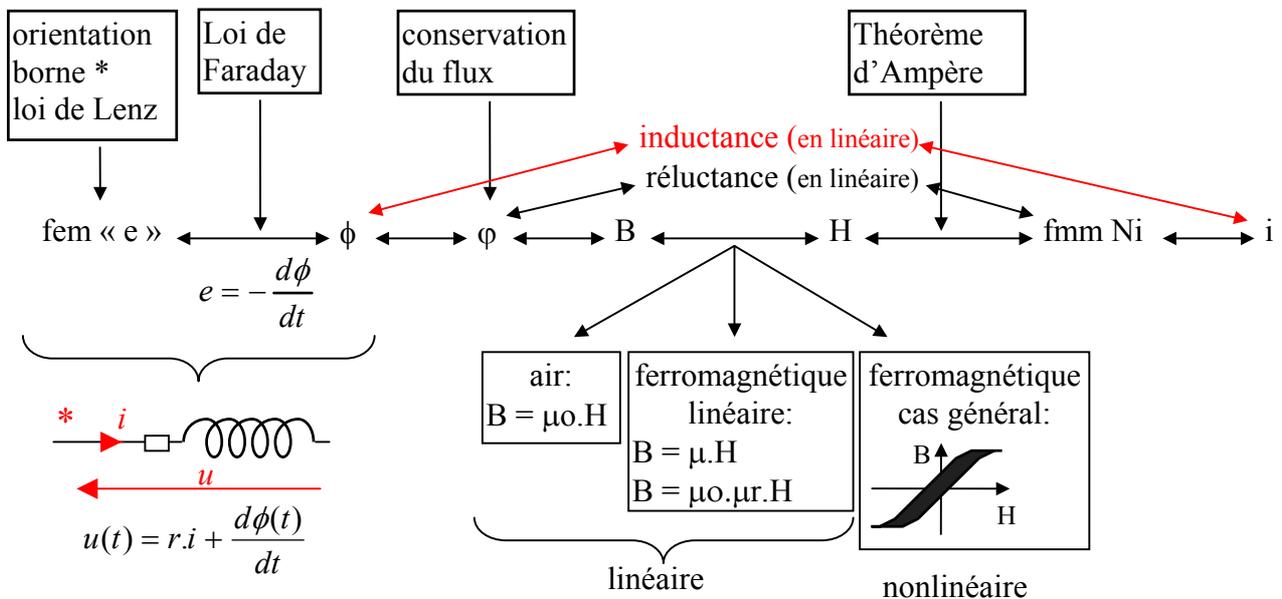
La composante continue du flux n'engendre pas de f.e.m. dans le bobinage, en effet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{soit } \varphi_c(t) = \varphi_{c_{moy}} + \varphi_{c_a}(t) \\ \text{(avec } \varphi_{c_a} : \text{composante alternative)} \end{array} \right\} \Rightarrow e(t) = -N \cdot \frac{d\varphi_c(t)}{dt} = -N \cdot \frac{d\varphi_{c_a}(t)}{dt}$$

Mais la composante continue du flux peut saturer le circuit magnétique et donc modifier la relation  $B(H) \Rightarrow$  augmentation des pertes fer et diminution de l'inductance principale  $L_H$ .

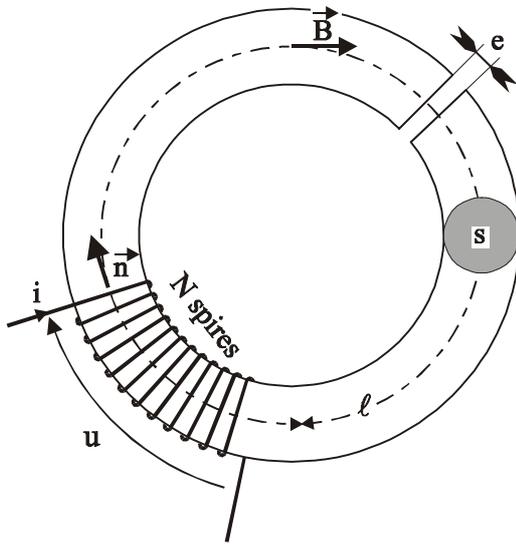
### 3 CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE

- Dans l'hypothèse d'un circuit magnétique linéaire, qu'est-ce qu'une inductance propre ?
- En excluant un fonctionnement à haute fréquence (où il faudrait faire intervenir l'effet de peau et les capacités parasites), on peut considérer la bobine comme un dipôle obéissant à la loi  $\Rightarrow u(t) = r.i(t) + \frac{d\phi}{dt}$ . Est-ce que je connais chaque terme de cette équation ainsi que les conventions d'orientation qui y sont associées ?
- Nous avons établi trois modèles différents pour la bobine. Chacun de ces modèles est une vision simplifiée de la réalité dans un contexte particulier. Suis-je capable de représenter ces trois modèles avec les hypothèses qui les accompagnent ? (*La démonstration un peu longue du troisième modèle est à comprendre mais il n'est pas indispensable de la retenir.*)
- Est-ce que je maîtrise les termes:
  - Inductance propre ?
  - Inductance principale ?
  - Inductance de fuite ?
- Est-ce que je comprends l'équation  $L_H + L_f = L$  ?
- Comment se comporte une bobine en régime permanent vis à vis de la composante continue de son courant ou de sa tension ?
- Au résumé du chapitre 2, on peut maintenant ajouter la notion d'inductance. Ai-je mémorisé le résumé suivant ?



## 4 PROBLEMES ET EXERCICES.

## Chap 4. Exercice 1 : Inductance propre.



Soit le tore ci-contre dont les caractéristiques sont les suivants:

Nombre de spires:  $N$

Longueur de la fibre moyenne:  $\ell$

Perméabilité magnétique absolue:  $\mu = \text{constante}$

Section droite du tore:  $S$

La résistance du fil sera négligée.

Le bobinage de  $N$  spires est supposé "sans fuites"; c'est-à-dire que tout le flux créé par celui-ci passe dans le tore.

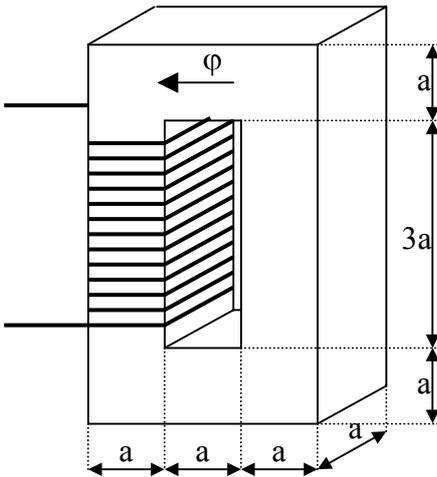
La largeur de l'entrefer est  $e \ll \ell$ .

$e$  étant faible, les lignes d'induction sont supposées

traverser celui-ci par le chemin le plus court.

- Placer la borne de polarité "\*" cohérente avec l'orientation de la normale aux spires  $\vec{n}$  choisie.
- Exprimer l'induction magnétique  $B(t)$  dans le tore en fonction du courant  $i(t)$  dans le bobinage et des paramètres du circuit magnétique.
- Exprimer  $\varphi(t)$  dans le circuit magnétique en fonction de  $i(t)$  et des paramètres du circuit magnétique.
- En déduire l'inductance propre «  $L$  » du dipôle "bobinage".
- Si  $i(t) = I_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t)$ , exprimer  $u(t)$ .
- Déterminer la relation qui lie  $U_{\text{eff}}$  à  $B_{\text{max}}$  et à la fréquence en régime alternatif sinusoïdal.
- Si  $i(t) = I_0 = \text{constante}$ , exprimer  $u(t)$ .
- Si  $u(t) = U_0 = \text{constante}$  et  $i(0) = I'$ , exprimer  $i(t)$ .

### Chap 4. Exercice 2 : Calcul d'une inductance de lissage.



1) Soit la bobine à noyau ferromagnétique ci-contre. Le bobinage est constitué de  $N_1$  Spires. Le circuit magnétique est supposé sans fuite. Sa perméabilité magnétique absolue  $\mu$  est constante. Ses dimensions géométriques sont données en fonction d'un paramètre « a ».

a) Orienter le courant  $i_1$  dans ce bobinage ainsi que la borne de polarité de façon cohérente avec le sens choisi pour le flux  $\varphi$  dans le circuit magnétique.

b) Définir l'inductance propre  $L_1$  du bobinage en fonction de  $i_1$ ,  $\varphi$  et des constantes de la bobine.

c) Déterminer la longueur de la fibre moyenne en fonction de a.

d) Etablir le schéma électrique équivalent au circuit magnétique. Calculer la réluctance équivalente  $\mathfrak{R}$  en fonction de  $\mu$  et a

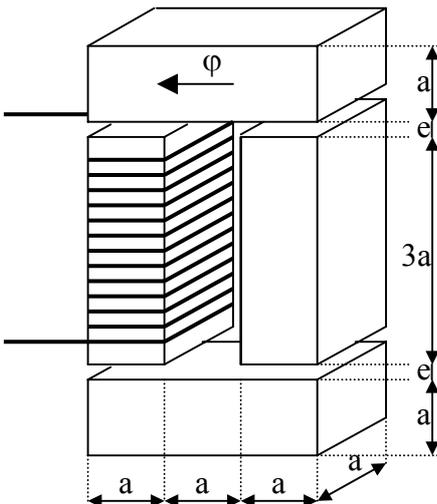
e) Calculer l'inductance propre  $L_1$  du bobinage en fonction des paramètres  $N_1$ ,  $\mu$  et a de la bobine à noyau ferromagnétique.

Calculer sa valeur numérique sachant que  $a = 185 \text{ mm}$ ,  $\mu = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ SI}$  et  $N_1 = 59$  spires.

Calculer la valeur du champ d'induction dans le circuit magnétique si  $i_1 = 20 \text{ A}$ .

La densité de courant dans le cuivre est de  $5 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$  de section, avec un coefficient de foisonnement de 2,95 (<sup>5</sup>).

De façon à déterminer si l'encombrement de la bobine est compatible avec la taille de la fenêtre au centre du circuit magnétique, calculer la section totale (cuivre + isolants) de la bobine. Conclure.



2) Soit la bobine à noyau ferromagnétique ci-contre. Le bobinage est constitué de  $N_2 = 707$  Spires. Le circuit magnétique est supposé sans fuites. Sa perméabilité magnétique absolue est  $\mu = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ SI}$ . Ses dimensions géométriques sont données en fonction d'un paramètre  $a = 53 \text{ mm}$  et d'une épaisseur de chacun de ses 4 entrefers :  $e = 4,3 \text{ mm}$ .

a) Calculer la valeur numérique de son inductance propre  $L_2$ .

(On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ )

b) Calculer la valeur du champ d'induction dans le circuit magnétique si  $i_2 = 20 \text{ A}$ .

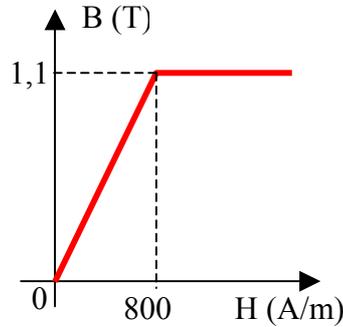
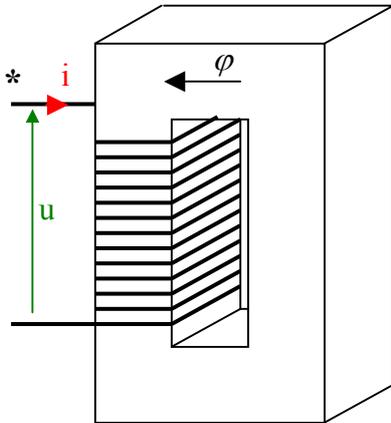
c) La densité de courant dans le cuivre est de  $5 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$  avec un coefficient de foisonnement de 2,95. Calculer la section totale (cuivre + isolants) de la bobine. Conclure.

(<sup>5</sup>) Rapport entre la section du bobinage et la section du cuivre (prenant en compte les vides d'air entre les conducteurs et l'encombrement des isolants).

3) Avec une même échelle, représenter la vue de face des deux bobines précédentes (circuit magnétique et encombrement du bobinage). Conclure sur l'intérêt d'un entrefer.

### Chap 4. Exercice 3 : Energie emmagasinée dans un circuit magnétique

1) Soit la bobine à noyau ferromagnétique ci-dessous. Le bobinage est constitué de  $N = 100$  spires.



➤ La bobine comporte  $N = 100$  spires.

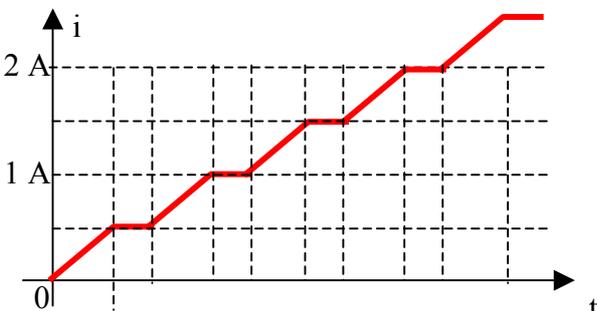
➤ De façon à simplifier les calculs, le cycle d'hystérésis du circuit magnétique est modélisé par les deux segments de droite ci-contre.

➤ La résistance interne de la bobine ainsi que les fuites magnétiques sont négligées.

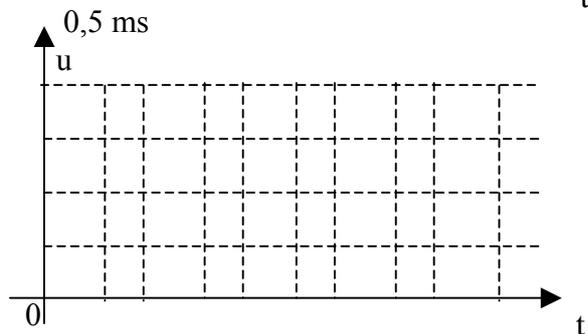
➤ Section droite du circuit magnétique :  $S = 4\text{cm}^2$ . Longueur de la fibre moyenne :  $\ell = 25\text{cm}$ .

1-a) Avec la modélisation retenue, que peut-on dire des pertes joule et des pertes fer ?

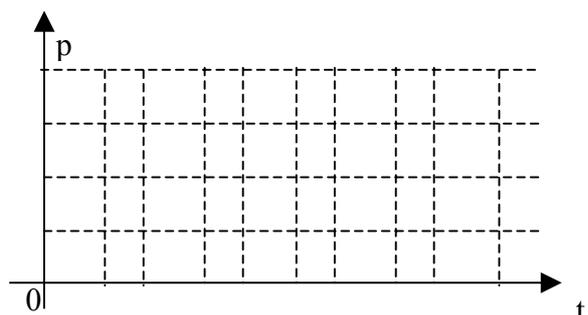
1-b) Calculer la valeur du courant  $I_{sat}$  au delà de laquelle le circuit magnétique est saturé ?



1-c) Etablir la relation entre la tension  $u(t)$  aux bornes de la bobine et le courant  $i(t)$  dans celle-ci lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé, puis lorsque le circuit magnétique est saturé. En déduire le graphe de  $u(t)$



1-d) Représenter le graphe de la puissance instantanée. En déduire l'énergie maximum qui peut être stockée dans l'ensemble bobine + circuit magnétique.



1-e) Montrer que, lorsque le circuit magnétique est en régime linéaire ( $B = \mu \cdot H$ ), l'énergie  $W$  emmagasinée dans l'ensemble bobine + circuit magnétique est exprimée par :  $W = \frac{V \cdot B^2}{2 \cdot \mu}$  avec :

- \*  $V$  : volume du circuit magnétique  $V = S \cdot \ell$
- \*  $B$  : valeur de l'induction magnétique
- \*  $\mu$  : perméabilité absolue du circuit magnétique.

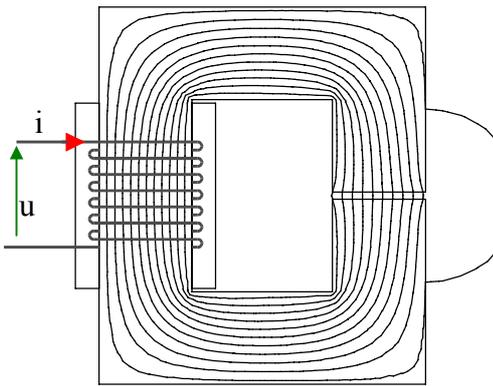
( Partir de  $\frac{d(W(t))}{dt} = u(t) \cdot i(t)$  puis, en utilisant la loi de Faraday et le Théorème d'Ampère, exprimer  $\frac{d(W(t))}{dt}$  en fonction de  $V$ ,  $B(t)$ ,  $\mu$  et  $\frac{d(B(t))}{dt}$ ).

Intégrer ensuite en posant que pour  $B = 0$  ( circuit magnétique désaimanté ), l'énergie magnétique est nulle.

En déduire que l'énergie maximale  $W_{max}$  que peut emmagasiner l'ensemble bobine + circuit

magnétique est :  $W_{max} = \frac{V \cdot B_{max}^2}{2 \cdot \mu}$  avec  $B_{max}$  : valeur maximale de l'induction magnétique.

Faire l'application numérique pour  $B_{max} = 1,1 \text{ T}$



**2-a)** On réalise maintenant dans le circuit magnétique un entrefer d'épaisseur  $e$

On supposera que cet entrefer est suffisamment étroit pour n'occasionner aucune fuite magnétique. <sup>(6)</sup>

Dans ce cas, déterminer l'expression littérale de  $W_{max}$  et l'expression du courant  $I_{sat}$  au delà de laquelle le circuit magnétique est saturé.

**2-b)** Pour une valeur variable de  $e$  ( $0 < e < 1 \text{ mm}$ ), représenter en fonction de  $e$  : le graphe de  $W_{max}$  et le graphe de l'intensité  $I_{sat}$  (en limite de saturation).

**2-c)** Exprimer l'inductance  $L$  <sup>(7)</sup> du bobinage. Pour une valeur variable de  $e$ , représenter le graphe de  $L$  en fonction de  $e$  : ( $0 < e < 1 \text{ mm}$ ).

<sup>(6)</sup> Cela signifie qu'on néglige le flux de fuite qui ne traverse pas l'entrefer et qu'on néglige l'épanouissement des lignes d'induction (visible au niveau de l'entrefer). Le calcul sera conduit comme si toutes les lignes d'induction traversaient l'entrefer perpendiculairement aux faces de celui-ci.

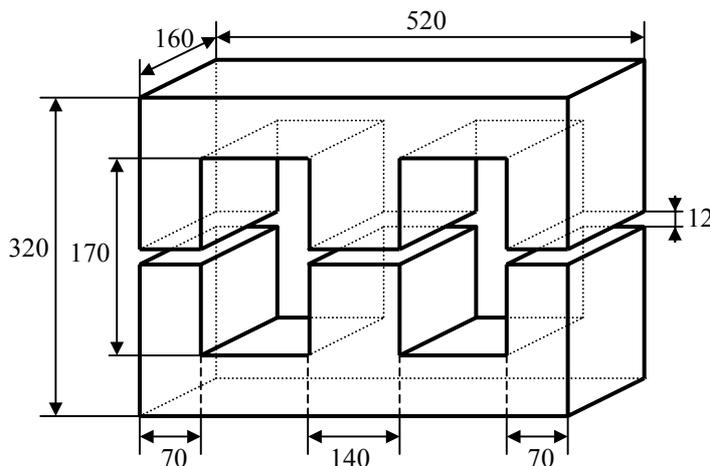
<sup>(7)</sup> inductance du bobinage lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé.

## Chap 4. Exercice 4 : Justification de la constitution d'une inductance de lissage

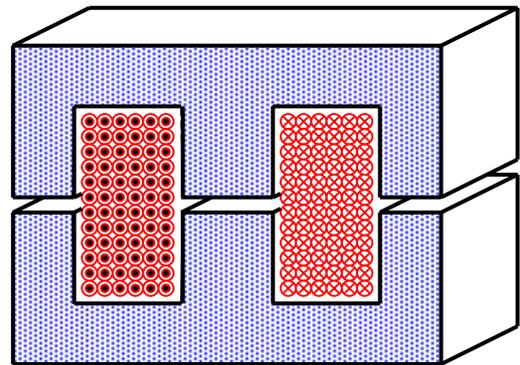
D'après un extrait du concours externe CAPLP 1998 Génie Electrique option électrotechnique et énergie

### Données :

- Inductance 4,4 mH ;
- Courant : valeur moyenne :  $I_{moy} = 410 \text{ A}$ . Ondulation alternative sinusoïdale d'amplitude 65 A
- Induction maximale :  $B_{max} = 1,5 \text{ T}$  <sup>(8)</sup>
- Rappel de la perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7} \text{ SI}$
- Perméabilité magnétique relative du circuit magnétique :  $\mu_r = 1500$  (Saturation magnétique négligée).
- On néglige l'épanouissement polaire des lignes de champ.
- Coefficient de foisonnement du bobinage <sup>(9)</sup> :  $K_b = \frac{\text{Section du bobinage}}{\text{Section du cuivre}} = 3$
- Densité de courant maximum dans le cuivre :  $J_{max} = 5 \text{ A/mm}^2$  <sup>(10)</sup>
- Section du fil de cuivre :  $S_{cu} = 95 \text{ mm}^2$ . Nombre de spires :  $N = 62$
- Entrefer :  $e = 2 \times 12 \text{ mm}$
- Longueur moyenne du circuit magnétique :  $\ell_f = 0,98 \text{ m}$



Circuit magnétique de la bobine  
Toutes les dimensions sont en mm



Bobinage sur la colonne centrale

- Déterminer d'après la figure la valeur de la surface de fer «  $S_{fer}$  ». Justifier la valeur de  $S_{fer}$  en supposant que le matériau est utilisé jusqu'à son induction maximum.
- Calculer la valeur efficace du courant  $I_{eff}$ . Justifier la section utilisée pour les conducteurs.
- Justifier la surface  $S_b$  du bobinage.

<sup>(8)</sup> Limitée par la saturation qui augmente les pertes fer.

<sup>(9)</sup> Les isolants et les vides entre les spires occupent les 2/3 de la section totale du bobinage.

<sup>(10)</sup> Limitation due à l'échauffement lié à l'effet Joule.

d) Calculer les réluctances du « fer » et de « l'air » vues par le bobinage. En déduire la valeur effective de l'inductance du bobinage.

e) L'énergie magnétique stockée dans un matériau de volume «  $v$  » s'exprime, en régime linéaire, par la relation :  $W_m = \frac{B^2 \cdot v}{2 \cdot \mu}$ . Calculer l'énergie magnétique maximale  $W_{f_{max}}$  stockée dans le « fer » du circuit magnétique et l'énergie magnétique maximale  $W_{e_{max}}$  stockée dans l'ensemble des entrefers.

Sachant que l'énergie magnétique stockée dans l'air environnant la bobine (en dehors des entrefers) est négligeable, en déduire l'énergie magnétique maximale  $W_{t_{max}}$  stockée par le circuit magnétique (fer + entrefers)

A partir de l'expression de l'énergie stockée dans une inductance, vérifier la valeur de l'inductance de la bobine.

### Complément au sujet de CAPLP 1998 : Dimensionnement d'une inductance

➤ Avec les courbes obtenues en 2-b) et 2-c) de l'exercice *Energie emmagasinée dans un circuit magnétique* page 15, on constate qu'en présence d'un entrefer de 1 mm, l'inductance  $L$ , le courant limite de saturation  $I_{sat}$  et l'énergie magnétique maximum stockée  $W_{max}$  sont déterminés à plus de 75% par l'entrefer.

On se propose donc d'étudier le dimensionnement du circuit magnétique en négligeant le « fer » par rapport à l'entrefer. On néglige également les fuites. *Cette démarche permet de faire un premier choix de circuit magnétique pour construire une inductance.*

➤ Pour des considérations thermiques, la section du conducteur constituant la bobine est déterminée par le courant efficace qui doit le traverser. (On retiendra une valeur typique de densité de courant

$J_{max} = 5 \text{ A/mm}^2$ ). La section du fil de cuivre est donc  $S_{cu} \geq \frac{I_{eff}}{J_{max}}$  (en prenant la valeur immédiatement supérieure disponible chez les fabricants de fil conducteur).

Soit  $S_b$  la section du bobinage avec un coefficient de foisonnement du bobinage <sup>(11)</sup>:

$$K_b = \frac{\text{Section du bobinage}}{\text{Section du cuivre}} \Rightarrow N \cdot \frac{I_{eff}}{J} \cdot K_b = S_b, \Leftrightarrow I_{eff} = \frac{J \cdot S_b}{N \cdot K_b} \cdot \left( \text{avec } \left( J = \frac{I_{eff}}{S_{cu}} \right) \leq J_{max} \right)$$

➤ On appelle **facteur de crête** le rapport  $F_c = \frac{I_{max}}{I_{eff}}$

**2-a)** En adoptant les hypothèses ci-dessus :

- exprimer l'inductance  $L$  en fonction de  $N$ ,  $S_{fer}$  et  $e$ .
- exprimer le courant  $i$  dans le bobinage en fonction de  $B$ ,  $e$ , et  $N$ . En déduire  $I_{max}$  en fonction de  $B_{max}$ ,  $e$  et  $N$ .
- exprimer  $L \cdot I_{max}^2$  sous la forme  $L \cdot I_{max} \cdot F_c \cdot I_{eff}$ .

En déduire que  $L \cdot I_{max}^2 = B_{max} \cdot \frac{J \cdot S_{fer} \cdot S_b \cdot F_c}{K_b}$

*Voir le corrigé de cet exercice dans MagnElecPro pour l'application de ce résultat au choix du circuit magnétique et du bobinage.*

---

<sup>(11)</sup> Les isolants et les vides entre les spires occupent usuellement environ les 2/3 de la section totale du bobinage.

## 5 REPONSES DU CHAPITRE INDUCTANCES ET BOBINES.

### Réponse 1:

$$\varphi_4 = \varphi_2 \text{ et } \varphi_5 = \varphi_1. \quad \phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 \quad L = \frac{\phi}{i} = 0,57 \mu H$$

[Retour](#)

### Réponse 2:

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{5 \cdot \varphi}{i} = 15,8 \mu H$$

[Retour](#)

### Réponse 3:

En supposant le champ d'induction uniforme sur une section droite (et en appliquant le théorème d'Ampère sur la fibre moyenne) :

$$H = \frac{N \cdot i}{\ell} \Leftrightarrow B = \mu \cdot H = \mu \cdot \frac{N \cdot i}{\ell} \Leftrightarrow \varphi = B \cdot S = \mu \cdot \frac{N \cdot i}{\ell} \cdot S$$

$$\Leftrightarrow \phi = N \cdot \varphi = \mu \cdot \frac{N^2 \cdot i}{\ell} \cdot S = \frac{N^2}{\mu \cdot S} \cdot i = L \cdot i$$

$$\boxed{\Rightarrow L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}} \quad (\text{On en déduit que la réluctance peut s'exprimer en (Henry)}^{-1} : H^{-1})$$

[Retour](#)<sup>T</sup>