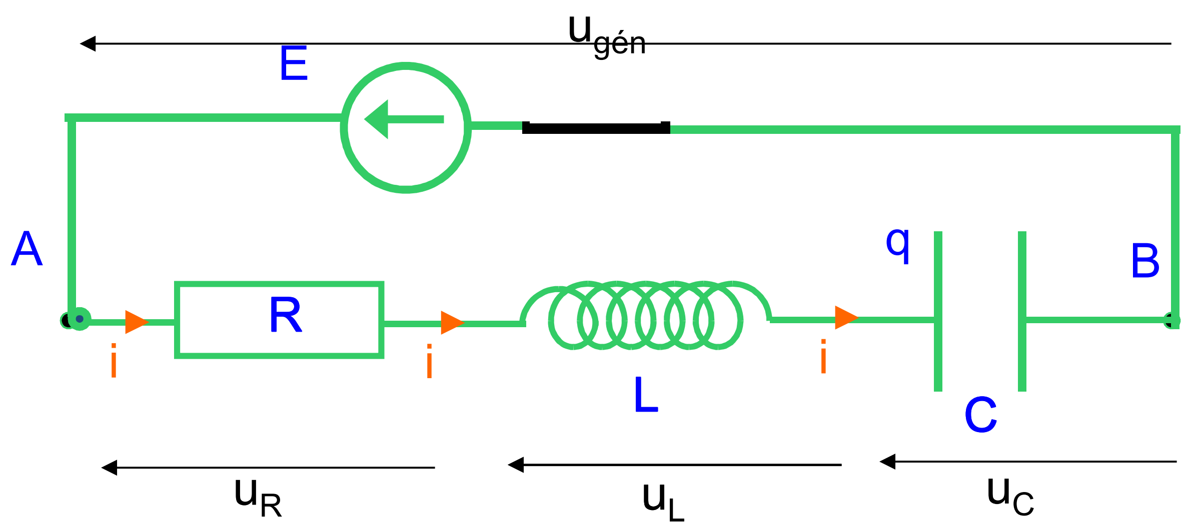
iutenligne
Le catalogue de ressources de l'enseignement technologique universitaire.

Régime transitoire

Hugues Ott

Maître de Conférences à l'IUT Robert Schuman
Université de Strasbourg Département Chimie



$$E = R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

Expression de i en fonction de q

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

$$\boxed{E} = \boxed{R.\frac{dq}{dt}} + \boxed{L.\frac{d}{dt}\frac{dq}{dt}} + \boxed{\frac{q}{C}}$$

On pose

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{d}{dt}q \\ \ddot{q} = \frac{d^2}{dt^2}q \end{cases}$$

On divise par R - on réarrange

$$\boxed{\frac{E}{L}} = \boxed{\frac{d^2}{dt^2}q} + \boxed{\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}} + \boxed{\frac{1}{LC}q}$$

$$\boxed{\ddot{q}} + \boxed{\frac{R}{L}\dot{q}} + \boxed{\frac{1}{LC}q} = \boxed{\frac{E}{L}}$$

On pose

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \\ \frac{R}{L} = 2\lambda \end{cases}$$

w_0: pulsation propre

l: coefficient d’amortissement

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 EC}$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 EC}$$

Solution générale
- solution particulière $\begin{cases} q = EC = cte \\ \dot{q} = 0 \\ \ddot{q} = 0 \end{cases}$
- solution équation sans 2e membre

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

On cherche une solution de la forme $q = Ke^{rt}$ $\quad \dot{q} = Kre^{rt}$ $\quad \ddot{q} = Kr^2e^{rt}$

$$\left(e^u\right)' = u' e^u$$

L 'équation sans 2d membre devient $\cancel{K}r^2\cancel{e^{rt}} + 2\lambda \cancel{K}r\cancel{e^{rt}} + \omega_0^2 \cancel{K}\cancel{e^{rt}} = 0$

On simplifie par Ke^{rt}

$$\boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0}$$

Equation caractéristique

Equation caractéristique

$$\boxed{r^2} + \boxed{2\lambda} r + \boxed{\omega_0^2} = 0$$

Discriminant

$$\Delta = \boxed{b^2} - 4\boxed{a}\boxed{c} = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$$

2 solutions réelles

$$\Delta > 0$$

$$\lambda^2 > \omega_0^2$$

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

R élevée

1 solution double

$$\Delta = 0$$

$$\lambda^2 = \omega_0^2$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

R limite

2 solutions complexes

$$\Delta < 0$$

$$\lambda^2 < \omega_0^2$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

R faible

Amortissement important

$$\Delta > 0 \qquad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2 solutions réelles

$$r_{1,2} = \frac{-\boxed{b} \pm \sqrt{\boxed{\Delta}}}{\boxed{2a}} = \frac{-\cancel{2}\lambda \pm \sqrt{\cancel{4}\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)}}{\cancel{2}}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta'} \qquad \begin{cases} \boxed{r_1 = -\lambda + \sqrt{\Delta'}} \\ \boxed{r_2 = -\lambda - \sqrt{\Delta'}} \end{cases}$$

La solution de l 'équation sans 2e membre est de la forme :

$$q(t) = A.e^{\boxed{r_1}t} + B.e^{\boxed{r_2}t}$$

$$q(t) = A.\,e^{\left(\boxed{-\lambda}+\sqrt{\Delta'}\right).t} + B.\,e^{\left(\boxed{-\lambda}-\sqrt{\Delta'}\right).t}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t}\left(A.e^{+\sqrt{\Delta'}.t} + B.e^{-\sqrt{\Delta'}.t}\right)$$

A et B sont déterminés par les conditions initiales à savoir q(t=0)=i(t=0)=0

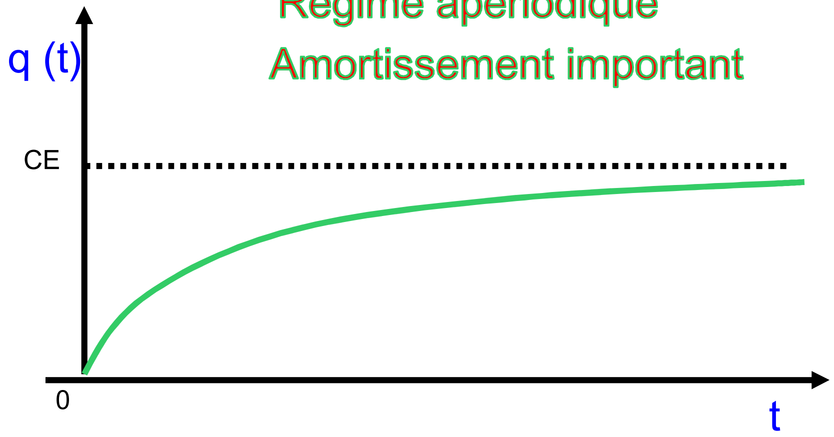
Equation caractéristique

$$\boxed{r}^2 + \boxed{2\lambda}r + \omega_0^2 = 0$$

$$\boxed{\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)}$$

Régime apériodique

Amortissement important



Solution générale

$$q(t) = CE + e^{-\lambda t}\left(A.e^{+\sqrt{\Delta'}.t} + B.e^{-\sqrt{\Delta'}.t}\right)$$

solution particulière

solution de l 'équation sans 2e membre

Amortissement faible

$$\Delta < 0 \qquad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2 solutions imaginaires

Equation caractéristique

$$\boxed{r^2} + \boxed{2\lambda} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$$

$$\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right) = -4\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) = 4j^2\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) = \boxed{4j^2\Omega^2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\boxed{b} \pm \boxed{\sqrt{\Delta}}}{\boxed{2a}} = \frac{-\cancel{2}\lambda \pm \sqrt{4j^2\Omega^2}}{\cancel{2}} = -\lambda \pm j\Omega$$

La solution est de la forme $\begin{cases} \boxed{r_1 = -\lambda + j\Omega} \\ \boxed{r_2 = -\lambda - j\Omega} \end{cases}$

$$q(t) = A.e^{\boxed{r_1 t}} + B.e^{\boxed{r_2 t}}$$

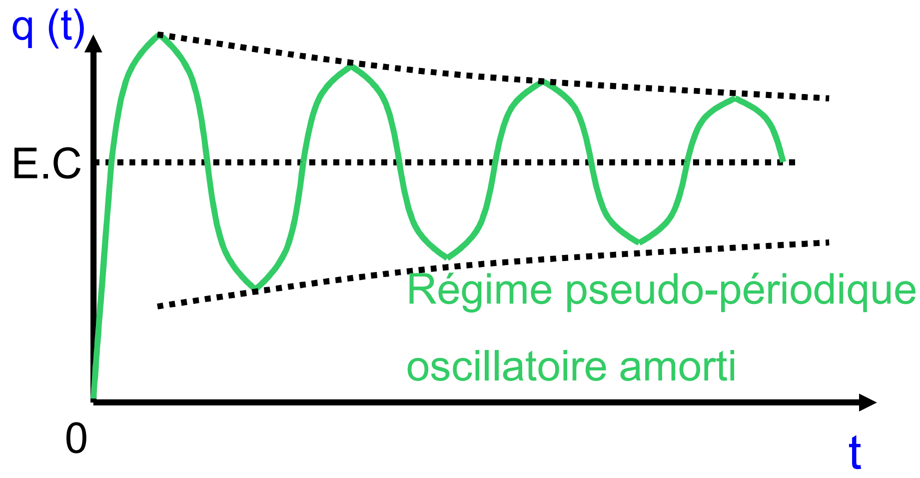
$$q(t) = A.\,e^{(-\lambda + j\Omega)t} + B.\,e^{(-\lambda - j\Omega)t}$$

$$q(t) = A\boxed{.e^{-\lambda t}}.e^{j\Omega t} + B\boxed{.e^{-\lambda t}}.e^{-j\Omega t}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t}\,\underbrace{\left(A.e^{j\Omega t} + B.e^{-j\Omega t}\right)}$$

$$q(t) = A.e^{-\lambda t}\cos\left(\Omega t + \Phi\right) \qquad e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

A et F sont déterminés par les conditions initiales à savoir q(t=0)=i(t=0)=0



Solution générale

$$q(t) = CE + A.e^{-\lambda t}.\cos\left(\Omega t + \Phi\right)$$

solution particulière

solution de l 'équation sans 2e membre

iutenligne

Amortissement critique

$\Delta = 0$ $\qquad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

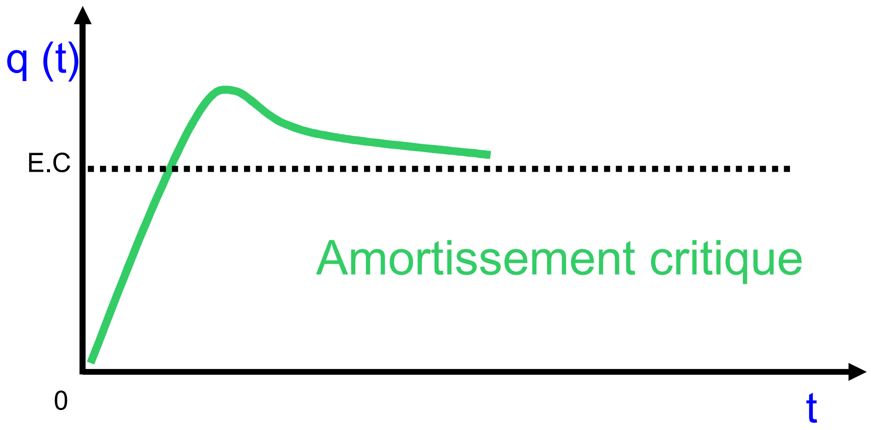
Equation caractéristique

$$\boxed{\mathbf{r}}^2 + \boxed{\mathbf{2\lambda}}\mathbf{r} + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$$

1 solution double

$$\mathbf{r_1} = \frac{-\boxed{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\boxed{2a}} = \frac{-2\lambda}{2} = \boxed{-\lambda}$$



La solution est de la forme

$$\mathbf{q(t) = (At + B).e^{\boxed{r_1 t}}}$$

$$\mathbf{q(t) = (At + B).e^{-\lambda t}}$$

Solution générale

$$\mathbf{q(t) = CE + (At + B).e^{-\lambda t}}$$

solution particulière

solution de l 'équation sans 2e membre

A et B sont déterminés par les conditions initiales à savoir q(t=0)=i(t=0)=0

Aspect Energétique

Puissance générateur = Puissance électrique + Puissance magnétique + Puissance Joule

(fournie par le générateur) = (emmagasinée dans le condensateur) + (emmagasinée dans la bobine) + (dissipée dans le cond. Ohmique)

$$E.i(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L.i^2\right) + R.i^2$$

Energie emmagasinée dans le condensateur — Energie emmagasinée dans une bobine

$$= \frac{1}{\cancel{2}C}\cancel{2}q.i(t) + \frac{1}{\cancel{2}}L\,\cancel{2}i\frac{di}{dt} + R.i^2$$

$$E.\cancel{i}(t) = \frac{q}{C}\cancel{i}(t) + L.\cancel{i}.\frac{di}{dt} + R.i^{\cancel{2}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$\frac{di}{dt} = \ddot{q}$$

$$E = \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + R.i = \frac{q}{C} + L\ddot{q} + R\dot{q}$$

On divise par L

$$\frac{E}{L} = \frac{1}{LC}q + \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$

On réarrange

On pose
$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{L.C} \\ \dfrac{R}{L} = 2\lambda \end{cases}$$

w_0: pulsation propre

l: coefficient d'amortissement

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 EC}$$

Réponse d ’un circuit RLC série à un échelon carré

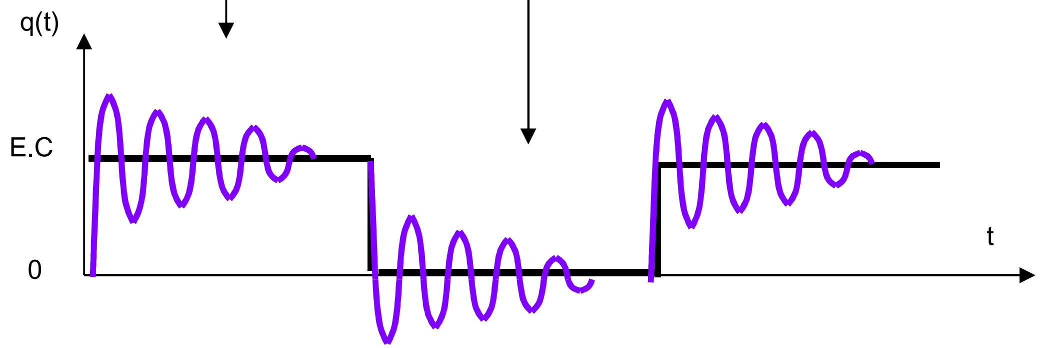
Amortissement peu important

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda.\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}}$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda.\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = 2\lambda$$



Régime pseudo-périodique

Pour les variations de i(t), il suffit de dériver l ’expression de q(t) par rapport au temps